Summary - Ch2 控制系统的性能指标

① 控制系统的性能指标

- 开环频域
  - 相角(位)裕度 γ & 剪切频率 ω_c　$\angle G(j\omega_c)H(j\omega_c)+180^\circ$
  - 幅值裕度 $K_g/20\lg K_g$ & 穿越频率 ω_g　$K_g=\frac{1}{|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|}$, $20\lg K_g=-20\lg|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|$
- 闭环频域
  - 零频幅值 $A(0)=1$
  - 相对谐振峰值 $M_r=\frac{A_m}{A(0)}$ & 谐振频率 ω_r　$M_r=\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$, $\omega_r=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$
  - 截止频率 ω_b: $A(\omega_b)=\frac{\sqrt{2}}{2}A(0)$　$\omega_b=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2+\sqrt{2-4\xi^2+4\xi^4}}$
- 闭环时域(开)
  - 超调量 $\sigma_p=\exp\left(\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$
  - 上升时间 $t_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$
  - 调节时间 $t_s=\frac{4}{\xi\omega_n}$ (5%)

② 系统性能与各指标的关系

		时域性能指标	开环频域	闭环频域
稳(平稳性)	一阶	$\sigma_p=0$	$\gamma=90^\circ$	$M_r=0$
	二阶	$\sigma_p=e^{-\xi\pi\sqrt{1-\xi^2}}$	$\gamma=\arctan\frac{2\xi}{\sqrt{\sqrt{4\xi^4+1}-2\xi^2}}$ $\xi\approx0.01\gamma, \xi\le0.7$	$M_r=\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}, 0<\xi<0.707$
	高阶	$\sigma\%=0.16+0.4(M_r-1)=0.16+0.4\left(\frac{1}{\lvert\sin\gamma\rvert}-1\right), \gamma\in[34^\circ,90^\circ], 1\le M_r\le1.8$		
快(快速性)	一阶	$t_s=3T\ (\Delta=5\%)$	$\omega_c=\frac{1}{T}=\frac{3}{t_s}(\Delta=5\%)$	$\omega_c=\frac{1}{T}=\frac{3}{t_s}(\Delta=5\%)$
	二阶	$t_s=\frac{3.5}{\xi\omega_n}(\Delta=5\%)$ $t_r=\frac{\pi-\theta}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}, \theta=\arccos\xi$ $t_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$	$\omega_c=\omega_n\sqrt{\sqrt{4\xi^4+1}-2\xi^2}$ $\omega_c t_s=\frac{7}{\tan\gamma}$	$\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2}, 0<\xi<0.707$ $\omega_b=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2+\sqrt{(1-2\xi^2)^2+1}}$
	高阶	$t_s=\frac{K_0\pi}{\omega_c}, K_0=2+1.5\left(\frac{1}{\sin\gamma}-1\right)+2.5\left(\frac{1}{\sin\gamma}-1\right)^2=2+1.5(M_r-1)+2.5(M_r-1)^2, \gamma\in[34^\circ,90^\circ], 1\le M_r\le1.8$		

		位置误差	速度误差	加速度误差	开环频域	闭环频域
准(误差相关)	0型	$e_{ss}=\frac{A}{1+K}=\frac{1}{1+K_p}$	∞	∞	同左边	$A(0)=\frac{K}{1+K}\approx1$ (K大)
	1型	0	$e_{ss}=\frac{A}{K}=\frac{1}{K_v}$	∞		$A(0)=1$
	2型	0	0	$e_{ss}=\frac{A}{K}=\frac{1}{K_a}$		
		输入 $r=A\cdot1(t)$	$r=A\cdot t$	$r=A\cdot\frac{1}{2}t^2$		

Ch2. 总结

性能指标之间的关系

- 开环频↔闭环频
- 闭环频↔时
- 开环频↔时

公式见该小节总结。

几个必须记住的：

- 开环频&闭环频，高阶系统近似公式：
  $$\begin{cases} M_r = \dfrac{1}{\sin\gamma} \\ \gamma = \arcsin\dfrac{1}{M_r} \end{cases}$$
- 闭环频&时，高阶系统经验公式：
  $$\begin{cases} \sigma_p = 1.6 + 0.4(M_r - 1),\ 1 \le M_r \le 1.8 \\ t_s = \dfrac{\pi}{\omega_c}\left[2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2\right],\ 1 \le M_r \le 1.8 \end{cases}$$
- 开环频&时，高阶系统经验公式：
  $$\begin{cases} \sigma_p = 1.6 + 0.4\left(\dfrac{1}{\sin\gamma} - 1\right),\ 34^\circ \le \gamma \le 90^\circ \\ t_s = \dfrac{\pi}{\omega_c}\left[2 + 1.5\left(\dfrac{1}{\sin\gamma} - 1\right) + 2.5\left(\dfrac{1}{\sin\gamma} - 1\right)^2\right],\ 34^\circ \le \gamma \le 90^\circ \end{cases}$$

三段频理论

设计合理的三频段：

- 低频：可有更大斜率，提高稳态性能；不可过大斜率
- 中频：
  - 斜率以-20dB为宜，-40dB也可以，但不可再小了（否则有右半平面的根）
  - 必须有足够带宽，$\gamma_m = \arctan\dfrac{h-1}{2\sqrt{h}}$，保证相角裕度。$h\uparrow \Rightarrow \gamma_m\uparrow$
  - ω_c大小：取决于快速性要求，$\omega_c\uparrow \Rightarrow$ 快速性$\uparrow$ 抗扰$\downarrow$；尽可能令 $\omega_c = \omega_m$
- 高频：可有更大斜率，排除干扰；注不可过大斜率，否则相角$\downarrow$，影响γ，系统可能会不稳定。

相角储备最大时的频率

中频带宽度：

$$\frac{\omega_c}{\omega_m} = |G(j\omega_m)| = \frac{M_r}{\sqrt{M_r^2 - 1}} \quad (\text{近似公式})$$

$$\begin{cases} \omega_2 \le \omega_c \dfrac{2}{h+1} \\ \omega_3 \ge \omega_c \dfrac{2h}{h+1} \end{cases} \quad \& \quad \begin{cases} \omega_2 \le \omega_c \dfrac{M_r - 1}{M_r} \\ \omega_3 \ge \omega_c \dfrac{M_r + 1}{M_r} \end{cases}$$

$\omega_3 = h\omega_2$，h：中频带宽度

Ch3 基于频率特性的校正

→得练题，必须练

串联超前校正
串联迟后校正
串联迟后—超前校正
期望频率特性法
反馈校正

串联超前校正

超前校正环节的性质

传递函数：$G_c(s)=\frac{\tau s+1}{Ts+1}$，$\tau>T$

频率特性：$G_c(j\omega)=\frac{j\tau\omega+1}{jT\omega+1}$

相频特性：$\varphi(\omega)=\angle G_c(j\omega)=\arctan\tau\omega-\arctan T\omega$

幅频特性：$|G_c(j\omega)|=\frac{\sqrt{\tau^2\omega^2+1}}{\sqrt{T^2\omega^2+1}}$

☆超前环节具有正相角⇒对原系统具有超前补偿

我觉得可以不用细看

超前环节的α
管幅频特性
& 转折频率
所以可能试错
会较多.

$\varphi(\omega)=\arctan\frac{(\tau-T)\omega}{1+T\tau\omega^2}=\arctan\frac{\tau-T}{\frac{1}{\omega}+T\tau\omega}$

最大相角
↓
对应的频率在转折频率的中点.

① $\omega=\omega_m=\frac{1}{\sqrt{T\tau}}$，$\varphi_m=\arctan\frac{\tau-T}{2\sqrt{T\tau}}$（分母最小时$\varphi(\omega)$最大）

② 定义 $\boxed{\tau=\alpha T}$ ☆

$\omega_m=\frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$，$L_c(\omega_m)=20\lg\tau\frac{1}{T\sqrt{\alpha}}=10\lg\alpha$ ☆

$\varphi_m=\arctan\frac{\alpha-1}{2\sqrt{\alpha}}=\arcsin\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$（只与α有关）☆

↓
可补偿的最大相角

∴要使校正环节提供的是最大相角（即令$\omega_m=\omega_c$）.

（一般φ_m有要求）：$\sin\varphi_m=\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\Rightarrow\alpha=\frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$

且令$20\lg|G_c(j\omega_m)|=10\lg\alpha=-20\lg G_o(j\omega_m)$

最后求T：$T=\frac{1}{\omega_m\sqrt{\alpha}}$.

原系统在ω_m处的幅值与超前环节提供的幅值抵消

作用：作用在系统中频段附近，目的是提供正的相角.

若仅采用超前环节进行设计，相角和剪切频率都会增加.

⇒不适用：原$\varphi(\omega_c)$随ω↑下降得很快的系统，因为ω_c↑，γ下降得比补偿的多.

最合适的α：α最多用到20，即提供60多度的相角

φ_m太大的话实际上根本补偿不到那么多相角→损失很大

同时注意，φ_m要提供一定的余量，以补偿ω_c提高而导致的相位裕度的损失.⇒ $\boxed{\varphi_m=\gamma-\gamma_0+\Delta}$，Δ表示校正前后因剪切频率变化引起的未校正的系统的γ的变化（减小）

一般Δ取5°~10°（其实实际做题会有超出10°的）

注意：设计完了一定要检验！⇒ 写出新的渐近对数幅频特性

首先都要计算原系统的 ω_{c0}、γ_0 和幅值裕度 L_{g0}

超前校正环节的设计

三种方案设计完都要检验

方案一：相角裕度优先

① 由 $\varphi_m=\gamma-\gamma_0+\Delta$ 定 φ_m，然后：$\alpha=\dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$ 得 α.

② $-10\lg\alpha=20\lg|G_0(j\omega_c)|$ 得期望 ω_c，然后令 $\omega_c=\omega_m$

③ $T=\dfrac{1}{\omega_m\sqrt{\alpha}}$ 得 T，$\tau=\alpha T$ 得 τ ⇒ $G_c(s)=\dfrac{\tau s+1}{Ts+1}$

· 若有稳态误差的要求，则需根据稳态误差的要求确定开环增益 K.

· 中途可能会不断调整补偿相角的值（Δ）

· 尽可能利用全部超前环节的 φ_m 退保证校正后 $\omega_m=\omega_c$.

方案二：剪切频率优先

① 根据设计要求确定校正后系统的剪切频率 ω_c（不要取太大），并让超前环节取最大相角的频率时值 ω_c，即令 $\omega_m=\omega_c$.

② 确定 α：$-10\lg\alpha=20\lg|G_0(\omega_c)|$

③ 确定 φ_m：$\varphi_m=\arcsin\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}$，检验 φ_m 是否 $>\gamma-\gamma_0+\Delta$

④ $T=\dfrac{1}{\omega_m\sqrt{\alpha}}$ 得 T，$\tau=\alpha T$ 得 τ ⇒ $G_c(s)=\dfrac{\tau s+1}{Ts+1}$

· 同理，若有稳态误差要求，要先确定开环增益 K

方案三：① 根据要求取 ω_c 并将其近似为 ω_m

② 根据 γ 的要求确定 α. $\alpha=\dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$

③ $T=\dfrac{1}{\omega_m\sqrt{\alpha}}$，得 T，$\tau=\alpha T$ 得 τ ⇒ $G_c(s)=\dfrac{\tau s+1}{Ts+1}$

Tip：取值时，一般"贴边走"

单级&多级超前校正

单级超前校正：相角裕度优先 or 剪切频率优先

若需要补偿的相角很大，或是原系统相角衰减太快，单级可能不适用，采用多级超前校正.

多级可以先不管

多级超前校正：
- 每一级提供的相角人为决定 （一般 γ 优先）
- 第一级超前校正：提供一定量，看看最后实际提供多少（检验）
- 第二级超前校正：由第一级校正后的指标决定用什么方案设计 （一般 ω_c 优先）
- 可能会不停修正
- 全部设计完后，要进行检验

超前校正后：
- 相角裕度↑，剪切频率↑
- 中频和高频幅值↑

串联迟后校正

迟后校正环节的性质

- 传递函数 $G_c(s)=\frac{\tau s+1}{\beta\tau s+1}, \beta>1$
- 频率特性 $G_c(j\omega)=\frac{j\tau\omega+1}{j\beta\tau\omega+1}, \beta>1$
- 相频特性 $\varphi(\omega)=\angle G_c(j\omega)=\arctan\tau\omega-\arctan\beta\tau\omega$.
- 幅频特性 $|G_c(j\omega)|=\frac{\sqrt{\tau^2\omega^2+1}}{\sqrt{\beta^2\tau^2\omega^2+1}}$

可以不用管

迟后环节具有$\boxed{\text{负相角}}$ ⇒ 降低剪切频率 ω_c

最小相角
- $\varphi(\omega)=\arctan\frac{(1-\beta)\tau\omega}{1+\beta\tau^2\omega^2}=\arctan\frac{(1-\beta)\tau}{\frac{1}{\omega}+\beta\tau^2\omega}=\arctan\tau\omega-\arctan\beta\tau\omega$
- $\omega=\omega_m=\frac{1}{\tau\sqrt{\beta}}$ 最小相角对应的频率在转折频率的中点
- $\varphi_m=\arctan\frac{1-\beta}{2\sqrt{\beta}}$

迟后的参数β只关注幅频衰减特性，几乎没有反复试错的过程.

注意：迟后校正一定不可用于中频段，因为它会使剪切频率下降
用于低频段，同时希望校正环节的转折频率离校正后的 ω_c 足够远 ($\boxed{\frac{1}{\tau}=\frac{1}{5}\omega_c \text{或} \frac{1}{10}\omega_c}$)
- 取 $\frac{1}{\tau}=\frac{1}{5}\omega_c$，在 ω_c 处相角下降约 $11°$
- 取 $\frac{1}{\tau}=\frac{1}{10}\omega_c$，在 ω_c 处相角下降约 $6°$ (常用；越远损失越小)

校正思路：迟后环节幅值下降 ⇒ ω_c 降低 ⇒ 若未校正系统在降低后的 ω_c 处有足够的相位储备，则可满足 γ 的要求.
要能够抵消迟后带来的相角损失

原理
- 利用校正装置的高频段的幅值衰减特性降低 ω_c.
- 利用自身的相位储备 (相对高频) 提高相位裕度
  原系统本身"能力要强"

↓

和超前校正不同：超前：额外提供相角；迟后："激发系统潜能".

★检验的过程也必不可少！

迟后校正环节的设计 提高相角裕度

方案一：相角裕度优先

① 确定 ω_c：$180°+\angle G_0(j\omega_c)=\gamma+\Delta$，$\gamma$ 为要求的相角裕度，Δ 为补偿相角损失
即：$\gamma_0=\gamma+\Delta$

② 确定β：$20\lg|G_0(j\omega_c)|-20\lg\beta=0$，即 $\beta=|G_0(j\omega_c)|$，ω_c 为校正后的剪切频率

③ 确定τ：$\frac{1}{\tau}=(\frac{1}{5}\sim\frac{1}{10})\omega_c$，一般选 $\frac{1}{\tau}=\frac{1}{10}\omega_c$，补偿相角 $\Delta=6°$.

·若有稳态误差要求，先确定系统的型别与开环增益.

(后接)

方案二：剪切频率优先

① 选择 w_c：贴边走，不宜选择太大（否则可能相角不够），且保证 $180°+\angle G_0(jw_c)>\gamma+\Delta$

② 确定 β：$20\lg|G_0(jw_c)|-20\lg\beta=0$.

③ 确定 T：$\frac{1}{T}=(\frac{1}{5}\sim\frac{1}{10})w_c$，一般令 $\frac{1}{T}=\frac{1}{10}w_c$，$\Delta$ 取 $6°$

迟后校正的作用

- 提高相角裕度 → 降低 w_c，利用系统自身更大的相角储备

  $G_c(s)=\frac{Ts+1}{\beta Ts+1}$，$\beta>1$

- 提高稳态精度 → 抬高低频段幅值，不显著改变系统的动态特性.

  $G_c(s)=\beta\frac{Ts+1}{\beta Ts+1}$，有一个系数 β，原 K_0，新 K，则 $\boxed{K_c=\beta=\frac{K}{K_0}}$

串联迟后－超前校正

三种设计方法

① 先迟后拉低 w_c，再超前

② 先超前改善动态性能，再保持动态性能不变利用迟后抬高低频

③ 关注原系统 w_c 周围性质（计算中最好用）

共同点：超前 & 迟后分开设计

设计原则

- 原系统相位储备不够
  - w_c 有要求且 $w_c>w_{c0}$：用超前
  - $w_c<w_{c0}$：不可用超前；超前＋迟后.
- 原系统相位储备足够且 $w_c<w_{c0}$：用迟后.

方法①：迟后环节优先的迟后－超前校正设计

- 2个环节的作用
  - 迟后：降低系统的剪切频率
  - 超前：提高相角裕度
- 注意：迟后环节降低 w_c 可以比期望的 w_c 小一点，因为后续的超前校正会把 w_c 抬回来
- 方案一：剪切频率优先的超前校正 → 即设计超前时，w_c 优先取设定的 w_c，贴边选，然后求 α（$20\lg|G(jw_c)|=-10\lg\alpha$），然后求 φ_m 和 T，然后检验
- 方案二：相角裕度优先超前校正 → 设计超前时，先考虑 φ_m 然后求 α，然后求 w_c，然后求 T，然后检验

方法②③ 超前环节优先的迟后－超前校正设计

① 先压低原系统幅值，再对压低幅值后的系统进行超前校正使其满足动态特性，再增加迟后环节抬高低频，维持中高频特性不变

（压多少自己选）

压低剪切频率

② 只关心剪切频率点处的相位储备，让超前环节的最优频率对准目标剪切频率.

方法②
①降低开环增益，使$\omega_{c1}<\omega_{c0}$，人为因素强
②设计超前校正，相角裕度 or 剪切频率优先（有可能条件不满足时要返回①调整K，不要压太狠）

超前环节要考虑：
- 迟后校正完后相角的衰减 $\begin{cases}\frac{1}{\tau}=\frac{1}{10}\omega_c \Rightarrow 6^\circ \\ \frac{1}{\tau}=\frac{1}{5}\omega_c \Rightarrow 10^\circ\end{cases}$
- 超前环节自己的φ_m中的Δ

因此有Δ_1和Δ_2

$\varphi_m=\gamma-\gamma_{10}(\omega_c)+\Delta_1+\Delta_2$ → 要求的ω_c

通过超前后，ω_c变高，此时动态性能要满足（ω_c和γ）
且γ要有补偿迟后环节的余量

③再用迟后抬高低频。

迟后：$G_{c2}(s)=\beta\dfrac{\tau s+1}{\beta\tau s+1} \Rightarrow \beta=\dfrac{K}{K_1}$，K为要求的开环增益，$K_1$为经过超前后的增益

$\frac{1}{\tau}$取$\frac{1}{5}\omega_c$或$\frac{1}{10}\omega_c$（看第②步中补偿的相角是多少）

方法③
核心：只要中间感兴趣的频率点处有足够的相位储备即可
①选取期望的剪切频率（贴边选，比期望的下界多一点点）ω_c.
②考虑超前环节在目标剪切频率ω_c处提供的超前相角φ_m

$\boxed{\varphi_m=\gamma-\gamma_0(\omega_c)+\Delta_1+\Delta_2}$ → 考虑校正后的相角损失.

③令$\omega_c=\omega_m$，求T，即让超前环节在所关注的频率点处提供最大相角.
④. 在ω_c处，经超前校正后的系统要在迟后的作用下衰减至0dB.　令ω_c与ω_m对齐

$20\lg\beta=20\lg|G_1(j\omega_c)| \Rightarrow \beta=|G_1(j\omega_c)|$

⑤取$\frac{1}{\tau}=\frac{1}{10}\omega_c/\frac{1}{5}\omega_c \Rightarrow \tau$，确定迟后环节

最后检验.

→ 最好的设计方法，用他！超前只管相角，迟后只管幅值.

恰当选取ω_c，并利用超前校正提升ω_c处的相角并使校正后ω_c处幅值大于0
再用迟后的幅值衰减作用使校正后ω_c处幅值等于0dB.
- 超前：增大相角裕量，保证较大的ω_c，且在ω_c处幅值大于0.
- 迟后：使$20\lg|G_1(j\omega_c)|$衰减至0

期望频率特性法

思路：根据系统要求的性能指标求校正后系统的传函，然后除以未校正系统的传函　把性能指标→传递函数

考虑
①原系统在高频段的特性尽可能利用
②原系统和期望系统在高频段平行 or 重合（取原系统高频段性质）

低频段：系统稳态误差 → 型别 + 开环增益 → $G_L(s)=\frac{K}{s^v}$

中频段：动态特性 → 平稳性、快速性：ω_c、ω_2、ω_3，斜率 -20dB.
（超调、t_s 等等）

高频段：利用原系统的高频段，与之重合

中频段宽度 h

$h=\frac{\omega_3}{\omega_2}$

M_r 和 h 的关系：$M_r=\frac{h+1}{h-1}$，$h=\frac{M_r+1}{M_r-1}=\frac{1+\sin\gamma}{1-\sin\gamma}$，$\gamma=\arcsin\frac{h-1}{h+1}$

对称最佳方法：$\omega_2\le\frac{\omega_c}{\sqrt{h}}$，$\omega_3\ge\omega_c\sqrt{h}$

剪切频率错位：$\omega_2\le\omega_c\frac{2}{h+1}$，$\omega_3\ge\omega_c\frac{2h}{h+1}$　让中频段更宽

最小峰值法：$\omega_2\le\omega_c\frac{M_r-1}{M_r}$，$\omega_3\ge\omega_c\frac{M_r+1}{M_r}$

期望频率特性校正设计

↓

其实很不准，余量要给够（中频段 h）

① K，v ⇒ 低频 $G_L(s)=\frac{K}{s^v}$

② 动态性能定中频段特性：ω_c、ω_2、ω_3、斜率 -20dB/dec

③ 低和中频段过渡特性：斜率一般取 -40dB/dec

④ 高频特性：尽量平行或等于校正前

⑤ 中和高过渡特性：斜率一般取 -40dB/dec

⑥ 确定 $G(s)$ 并检验

⑦ $G_c=\frac{G(s)}{G_0(s)}$

有好多种方法

得做题了

n 个公式：

① -20dB/dec：中频段：$\frac{20\lg|G(j\omega_2)|-20\lg|G(j\omega_c)|}{\lg\omega_2-\lg\omega_c}=-20$ / $\frac{20\lg|G(j\omega_c)|-20\lg|G_0(\omega_3)|}{\lg\omega_c-\lg\omega_3}=-20$

原系统.

$\Rightarrow |G_0(\omega_3)|=\frac{\omega_c}{\omega_3}$；$|G(j\omega_2)|=\frac{\omega_c}{\omega_2}$.

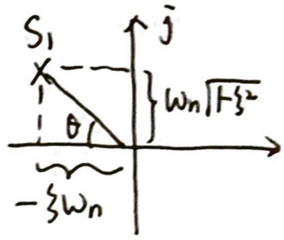
② 低与中频过渡特性：$|G(j\omega_1)|=|G_L(j\omega_1)|$

$\frac{20\lg|G(j\omega_1)|-20\lg|G(j\omega_2)|}{\lg\omega_1-\lg\omega_2}=-40.$ ⇒ $\left|\frac{G(j\omega_1)}{G(j\omega_2)}\right|=\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2.$

Ch4 基于根轨迹的校正 → 性能指标以时域量形式给出时

e.g.: 阻尼比、自然振荡角频率、超调、调整时间

一般根据性能指标要求确定闭环主导极点，用二阶系统近似
使校正后的根轨迹通过期望的闭环主导极点。



性能指标的转换

- 给定ξ和ω_n：闭环主导极点为：$s_{1,2}=-\xi\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$
  对于s_1：$\theta=\arccos\xi$，$|s_1|=\omega_n$.
- 给定超调量和调节时间：
  - $\sigma\%=e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}\times100\%\Rightarrow\xi$
  - $t_s=\frac{3.5}{\xi\omega_n}\Rightarrow\omega_n$
  - $\Rightarrow s_{1,2}=-\xi\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

零极点对根轨迹的影响

- 增加零点会使根轨迹左移 → 整体动态性能变好
- 增加极点会使根轨迹右移 → 对动态性能产生不好的影响
  ↳ 分母上增加，负相角，P↓.

根轨迹由零点→极点

$\Rightarrow$ Review：$\sum\frac{k(s-z_i)}{(s-p_i)}$，其中k为根轨迹增益

幅角条件：求某点是否在根轨迹上 $\begin{cases}|GH|=1 \\ \angle GH=(2m+1)\pi\end{cases}$ → 可求对应的根轨迹增益；⇒ 负反馈：180°根轨迹

超前环节

传函：$G_c(s)=K_c\frac{s-z_c}{s-p_c}$ → 多补充了一个零点&极点（$\frac{\tau s+1}{Ts+1}$ 变为零极点形式）

$p_c<z_c<0$，极点在零点左侧

超前网络产生的幅角：$\varphi_c=\varphi_z-\varphi_p>0$. $\Rightarrow \sum_{i=1}^{m}\angle(A-z_j)-\sum_{i=1}^{m}\sum\angle(A-p_i)+[\angle(A-z_c)-\angle(A-p_c)]=(2l+1)180^\circ$

φ_c 不宜太大，否则难以实现

使根轨迹向左移动，动态性能↑

开环偶极子对根轨迹的影响

- 定义：指离原点非常近的零极点。
- 开环增益和根轨迹增益的换算关系：$\boxed{K=k\frac{\prod_{i=1}^{m}(-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(-p_j)}}$，和零极点有关
- 增加$G_c(s)=K_c\frac{s-z_c}{s-p_c}\Rightarrow G(s)H(s)G_c(s)=k\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{s\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}\cdot\frac{s-z_c}{s-p_c}$，只能是一个滞后（否则不稳定）
  $\Rightarrow$ 开环增益：$K_*=k\frac{\prod_{i=1}^{m}(-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(-p_j)}\frac{-z_c}{-p_c}=K\cdot\frac{z_c}{p_c}$
- $\Rightarrow$ 开环增益变化 ⇒ 静态性能可↑，选择适当的偶极子.

超前校正→使根轨迹左移

$$\boxed{G_c(s)=K_c\frac{\alpha Ts+1}{Ts+1}=K_c\alpha\frac{s-z_c}{s-p_c}}$$ $\begin{cases}K_c:\text{开环增益}\\K_c\alpha:\text{根轨迹增益}\end{cases}$ $\boxed{\alpha=\frac{|p_c|}{|z_c|}}$

超前校正设计

校正后期望主导极点在系统根轨迹上→前提条件

⇒满足幅角条件：

$$\angle G(s_1)=\angle(s_1-z_1)+\angle(s_1-z_2)+\cdots+\angle(s_1-z_m)-\angle(s_1-z_1)-\angle(s_1-p_2)-\cdots-\angle(s_1-p_n)$$
$$+\angle(s_1-z_c)-\angle(s_1-p_c)=(2l+1)180^\circ$$

主导极点之一

⇒在 s_1 处 $\boxed{\angle G(s_1)=\angle G_0(s_1)+\angle G_c(s_1)=(2l+1)180^\circ}$

设计步骤
① 性能指标⇒闭环主导极点 s_1 的期望位置
② 作出未校正的根轨迹⇒若根轨迹通过闭环主导极点的期望位置，调整K即可
若闭环主导极点期望位置在根轨迹左侧⇒超前校正.
③ 确定超前环节产生的幅角：$\phi=(2l+1)180^\circ-\angle G_0(s_1)$
$=\angle(s_1-z_c)-\angle(s_1-p_c)$.
④ 确定 K_c：$K_c=\frac{|z_c||s_1-p_c|}{|G_0(s_1)||p_c||s_1-z_c|}$ ⇒ $G_c(s)=K_c\alpha\frac{s-z_c}{s-p_c}$，最后检验

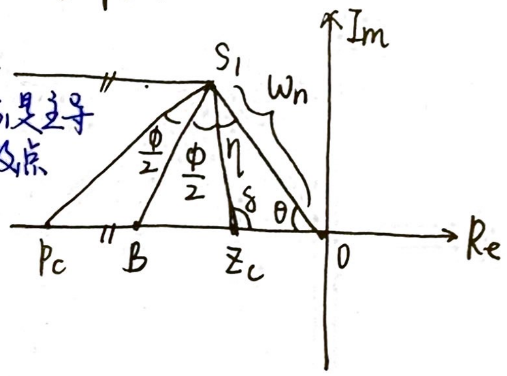
由 $|GH\cdot G_c|=1$ 得.

超前校正设计的2种方法

→问题所在：没有考虑开环增益，只能保证 s_1 是主导极点

$\boxed{\text{角平分线法}}$：作 s_1A // x 轴，s_1B 平分 $\angle Os_1A$

（最小比值法）⇒为了求 p_c 和 z_c.



超前环节所希望提供的幅角为 ϕ

θ 为阻尼角.

⇒ $\begin{cases}p_c=-|s_1|\frac{\cos\frac{1}{2}(\phi-\theta)}{\cos\frac{1}{2}(\theta+\phi)} & \text{→比值大的，} p_c \text{长度}\\ z_c=-|s_1|\frac{\cos\frac{1}{2}(\phi+\theta)}{\cos\frac{1}{2}(\phi-\theta)} & \text{→比值小的，} z_c \text{长度}\end{cases}$

⇒但只能说明 s_1 在根轨迹上

还要用幅值条件才能说明 s_1 是否为极点

最后作出校正后的根轨迹检验根轨迹是否通过期望闭环极点.

$\alpha=\frac{|p_c|}{|z_c|}$ 最小值为：$\alpha_{min}=1+\frac{2\sin\theta\sin\varphi}{\cos(\theta+\varphi)+1}$，此时 $\angle Os_1z_c=\frac{1}{2}(180^\circ-\theta-\Phi)$

$\boxed{\text{幅值确定法}}$：相当于在原幅角条件①基础上增加稳态精度的约束②⇒①②2个约束解2个未知数

$$G_c(s)=\frac{\alpha Ts+1}{Ts+1}=\alpha\frac{s-z_c}{s-p_c}$$

稳态精度要求可通过未校正系统的开环增益满足.

（图见上图）$\frac{\sin\eta}{\sin\theta}=\frac{|z_c|}{|s_1-z_c|}$，$\frac{\sin(\phi+\eta)}{\sin\theta}=\frac{|p_c|}{|s_1-p_c|}$ ⇒ $\frac{\sin(\phi+\eta)}{\sin\eta}=\alpha\frac{|s_1-z_c|}{|s_1-p_c|}$

⇒ $\frac{1}{\tan\varphi}+\frac{1}{\tan\eta}=\alpha\frac{|s_1-z_c|}{|s_1-p_c|}\cdot\frac{1}{\sin\varphi}$ ⇒ $\boxed{\frac{1}{\tan\eta}=\alpha\frac{|s_1-z_c|}{|s_1-p_c|}\frac{1}{\sin\varphi}-\frac{1}{\tan\varphi}}$ $=\cos\phi+\frac{\cos\eta}{\sin\eta}$（和差化积公式）

（下接）

(幅值确定法)

校正后：$G(s)=G_0(s)G_c(s)=\alpha k\frac{(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{s^v(s-p_1)\cdots(s-p_{n-v})}\cdot\frac{s-z_c}{s-p_c}$

$|G(s_1)|=\frac{\alpha k}{M}\cdot\frac{|s_1-z_c|}{|s_1-p_c|}=1 \Rightarrow \boxed{\alpha\frac{|s_1-z_c|}{|s_1-p_c|}=\frac{M}{k}}$，其中 $\boxed{M=\frac{|s_1^v|\cdot|s_1-p_1|\cdots|s_1-p_{n-v}|}{|s_1-z_1|\cdots|s_1-z_m|}}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\tan\eta}=\frac{M}{k}\frac{1}{\sin\phi}-\frac{1}{\tan\phi}}$ ⇒得η后：$|z_c|=\omega_n\frac{\sin\eta}{\sin\delta}$，$|p_c|=\omega_n\frac{\sin(\phi+\eta)}{\sin(\delta-\phi)}$

$\alpha\frac{|s_1-z_c|}{|s_1-p_c|}$

式中 $\delta=180°-\eta-\theta$，$\theta=\arccos\zeta$ 阻尼角

超前幅角大一点没关系；"带惯性的PD控制器"：即超前校正的形式

$G_c=K_c\frac{(\tau s+1)}{(\beta\tau s+1)}=k_c\frac{z_c}{p_c}\cdot\frac{s-z_c}{s-p_c}=k_c\cdot\beta\cdot\frac{s-z_c}{s-p_c}$，$z_c=-\frac{1}{\tau}$，$p_c=-\frac{1}{\beta\tau}$ 极点在零点左边

迟后校正：目的不是为了改善动态性能，关注开环增益，$K^*=K\frac{z_c}{p_c}$

频域法关注时间常数的比值

(通过期望主导极点下的开环增益)

迟后校正的设计(关注零极点的比值)

设计步骤

①作出原根轨迹，确认调整开环增益可以使其满足性能指标

s_1在根轨迹上

主要是静态指标

即，当根轨迹经过s_1时，对应的K满足稳态要求.

②确定主导极点s_1，求出s_1对应的开环增益K。

③求校正后的K

④求$\beta=\frac{K}{K_0}$ 注意这里的K_0是主导极点处对应的未校正的K。

⑤确定零极点：$\boxed{\beta=\frac{z_c}{p_c}}$，$z_c$、$p_c$充分靠近原点，自己选 一般"0.n"

⑥检验动态、静态指标

注意

①开环增益和根轨迹增益的转换 $K=k\frac{\prod_{i=1}^{m}(-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(-p_j)}$

②开环增益的临界值：看与y轴交点对应的开环增益是多少

有可变参数时，检验时可画根轨迹

③若原系统的传递函数中没有可变参数，可人为增加一个画出根轨迹

④闭环主导极点$\zeta\omega_n$满足某一条件，据此在原根轨迹上选

⑤校正环节的开环增益为K_c，如果原来的K_0是一个定值，则要用$\frac{K}{K_0}=K_c$

注意，这里增益与β无关 　可能没经过主导极点

β只负责零极点比值

迟后—超前校正

超前：改善系统的动态性能

迟后：减小系统的稳态误差.

设计步骤

①性能指标要求⇒闭环极点主导区域.

②确定超前部分：使根轨迹穿过期望主导极点

③检验动态性能指标，若不满足，则可调整闭环系统的主导极点/右移校正环节的零点/左移极点

④确定迟后部分：对③中的主导极点，求根轨迹增益k、静态误差系数

检验静态指标；确定迟后的z_c、p_c. $\beta=\frac{z_c}{p_c}=\frac{K}{K_0}$

⑤检验迟后—超前校正后的系统根轨迹，判断其性能是否满足要求

Tip：通常考虑引入零点以抵消校正前系统的一个非零开环极点