模拟卷1

2022年6月7日 19:04

1. 二阶非线性系统 $\ddot{x}-(2-x^2)\dot{x}+3x=0$ 相轨迹上切线斜率为1的所有点构成的曲线方程为____________。

$\ddot{x}+f(x,\dot{x})=0$　　斜率 $\alpha=\frac{d\dot{x}}{dx}=-\frac{f(x,\dot{x})}{\dot{x}}=\frac{(2-x^2)\dot{x}-3x}{\dot{x}}=1$

$$\alpha=\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}=-\frac{f(x,\dot{x})}{\dot{x}}$$

2. 给定一个连续时间线性系统，若它是能控的，则其离散化状态空间模型__（是/不是）能控的；若它是不能观的，则其离散化状态空间模____（是/不是/不一定是）能观的。

不一定（?

3. 在频域设计中，一般地说，开环频率特性的___频段表征了闭环系统的稳态性能；开环频率特性的___频段表征了闭环系统的动态特性；开环频率特性的___频段表征了闭环系统的抗干扰能力。

低 中 高

4. 对于单位反馈连续系统，增加开环___会使系统的根轨迹向左移动；增加开环____会使根轨迹向右移动。

零点 极点

注：通常增加开环极点,将导致系统根轨迹向右移动,使系统稳定性变差;

相反选择增加开环零点,会让系统的根轨迹相左边移动,系统的稳定性变好。

5. 开环频域性能指标与闭环频域性能指标有着对应关系，开环频域性能指标中的___对应闭环频域性能指标闭环带宽 ω_b，它们反映了系统动态过程的____；开环频域性能指标中的____对应闭环频域性能指标相对谐振峰值 M_r，它们反映了系统动态过程的___。

剪切频率Wc　快速性

相位裕度γ　　稳定性

二、简答题

1. (3分) 怎样的单输入单输出连续时间系统的状态空间实现是能控且能观的？

单输入单输出系统**传递函数没有零极点对消**，那么它的任意一个状态空间的实现均为能控且能观的

2. (4分) 谈一谈对描述函数的理解？

传递函数应该是系统的微分方程经过拉普拉斯变换之后得到的，表示了输入和输出拉普拉斯变换的关系，也可以理解为是系统冲击响应的拉普拉斯变换

3. (4 分) 在基于频率特性的校正方法有哪几种？它们的特点是什么？

串联超前校正　超前环节具有正相角，提高稳定性、提高快速性，但是无助于稳态精度

串联迟后校正　迟后环节具有负相角可以提高稳定性和稳态精度，但是快速性较低

串联迟后-超前校正　可全面提高系统的控制性能

期望频率特性法　简单、直观,可适合任何形式的校正装置

4. (5 分) 给定如下二阶线性系统

$$\ddot{x}+5\dot{x}+4x=0$$

该系统存在两条特殊的相轨迹：这两条相轨迹也是该系统的等倾线。请求出这两条特殊相轨迹的方程，并在相平面上画出这两条相轨迹。

解：系统方程 $\ddot{x}+f(x,\dot{x})=0$

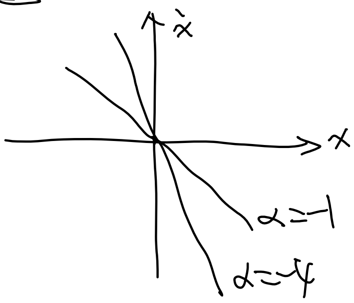
若相轨迹也是等倾线，则二者斜率相同

相轨迹斜率 $\alpha=\frac{d\dot{x}}{dx}=\frac{-f(\dot{x},x)}{\dot{x}}=\frac{-5\dot{x}-4x}{\dot{x}}$

等倾斜线方程 $\dot{x}(\alpha+5)=-4x$ 即 $\dot{x}=\frac{-4x}{\alpha+5}$，斜率为 $\frac{-4}{\alpha+5}$

则有 $\alpha=\frac{-4}{\alpha+5}$，即 $\alpha^2+5\alpha+4=0$ 解得 $\alpha=-1$ 或 -4.

这两条相轨迹如图所示



三、(10 分) 某控制系统的状态空间描述如下

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -4 & 3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u=Ax+bu$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}x=cx$$

判断系统的能控性和能观性。

考察线性定常连续系统的状态方程

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t) \tag{8.2.1}$$

式中 x 是 n 维状态向量；u 是 r 维输入向量；$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 和 $B\in\mathbb{R}^{n\times r}$ 是常矩阵，分别为系统矩阵和输入矩阵。

线性定常系统 (8.2.1) 能控的充分必要条件是

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$$

其中 n 是矩阵 A 的维数。

考察线性定常连续系统的状态方程

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \tag{8.5.1}$$

式中 x 是 n 维状态向量；y 是 m 维输出向量；$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 和 $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 是常矩阵，分别为系统矩阵和输出矩阵。

线性定常系统 (8.5.1) 能观的充分必要条件是

$$\operatorname{rank} Q_o = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

或

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} C^T & A^TC^T & (A^T)^2C^T & \cdots & (A^T)^{n-1}C^T \end{bmatrix} = n$$

四、(8 分) 某单位反馈系统的开环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{10}{s(0.2s+1)(0.5s+1)}$$

要求校正后系统相角裕度$\gamma > 45^{c}$，幅值裕度不小于 6dB，试确定串联校正的类型，并进行设计。

答：

$$20\lg|G_0(jw)| = \begin{cases} 20(\lg 10 - \lg w) & 0 < w < 2 \\ 20(\lg 10 - \lg w - \lg 0.5w) & 2 < w < 5 \\ 20(\lg 10 - \lg w - \lg 0.5w - \lg 0.2w) & w > 5 \end{cases}$$

$$20\lg|G_0(j\omega_{c0})| = 0 \Rightarrow \begin{cases} \omega_{c0} = 4.4721\mathrm{rad/s} \\ \gamma_0 = 180^\circ + \angle G_0(j\omega_c) \\ \quad = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.2\omega_{c0} - \arctan 0.5\omega_{c0} \\ \quad = -17.72^\circ \end{cases}$$

(1) 串联超前校正：

若用单级串联超前校正，需提供的相角至少为 $\varphi_m = \gamma - \gamma_0 + \Delta = 67.72^\circ \sim 72.12^\circ$，较大，故应采用两级串联超前校正。

第一级：

取 $\varphi_{m1} = \gamma - \gamma_0 + \Delta = 72.7155^\circ(\Delta = 10^\circ)$

则 $\alpha_1 = \frac{1+\sin\varphi_{m_1}}{1-\sin\varphi_{m1}} = 43.2882$

令

$$\begin{aligned} &20\lg\left|G_0\left(j\omega_{c_1)}\right)\right| = -10\lg\alpha_1 \\ &\Rightarrow 22\left(\lg 10 - \lg\omega_{c_1} - \lg 0.5\omega_{c_1} - \lg 0.2\omega_{c_1}\right) = -10\lg\alpha_1 \\ &\Rightarrow \omega_{c_1} = 8.6975rad/s \end{aligned}$$

则 $T_1 = \frac{1}{\omega_{c1}\sqrt{\alpha_1}} = 0.01748 \Rightarrow G_{c_1}(s) = \frac{0.7565s+1}{0.01748s+1}$

第一级校正后 $G_1(s) = \frac{10(0.7565s+1)}{s(0.2s+1)(0.5s+1)(0.01748s+1)}$

令

$$\begin{aligned} &20\lg|G_1(j\omega_{c1})| \\ &= 20\left(\lg 10 + \lg 0.7565\omega_{c01} - \lg\omega_{c01} - \lg 0.2\omega_{C01} - \lg 0.5\omega_{c01}\right) = 0 \\ &\Rightarrow \omega_{c01} = 8.698\mathrm{rad/s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{01} &= \angle G_1(j\omega_{c1}) + 180^\circ \\ &= \arctan 0.7565\omega_{c01} - 90^\circ - \arctan 0.2\times\omega_{c01} - \arctan 0.5\omega_{c01} - \arctan 0.01748\omega_{c01} + 180^\circ \\ &= 25.5573^\circ < 45^\circ \end{aligned}$$

第二级:

令 $\varphi_{m2} = \gamma - \gamma_{01} + \Delta = 29.4427^\circ\ (\Delta = 10^\circ)$, 则 $\alpha_2 = \frac{1+\sin\varphi_{m2}}{1-\sin\varphi_{m2}} = 2.9335^\circ$

令 $20\lg|G_1(j\omega_{c2})| = -10\lg\alpha_2$

$\Rightarrow 20(\lg 10 + \lg 0.7565\omega_{c2} - \lg\omega_{c2} - \lg 0.2\omega_{c2} - \lg 0.5\omega_{c2})$

$= -10\lg\alpha_2$

$\Rightarrow w_{c2} = 11.3829\text{rad/s}$

则 $T_2 = \frac{1}{w_{c2}\sqrt{\alpha_2}} = 0.05129$

$\Rightarrow G_{C2} = \frac{0.1505.s+1}{0.05129s+1}$

则 $G(s) = G_0(s)G_{C1}(s)G_{C2}(s) = \frac{10(0.7565s+1)(0.1505s+1)}{s(0.2s+1)(0.5s+1)(0.01748s+1)(0.05129s+1)}$

令 $20\lg|G(j\omega_{c2}) = 0 \Rightarrow \Omega_{c2} = 11.38\text{rad/s}$

$\gamma_2 = \angle G(j\omega_{c2}) + 180^\circ = \arctan 0.7565\omega_{c2} + \arctan 0.1505\omega_{c2} - 90^\circ - \arctan 0.2\omega_{c2} - \arctan 0.5\omega_{c2} - \arctan 0.017$

满足要求。

令 $\angle G(j\omega_g) = 180^\circ \Rightarrow \omega_g = 32.2\text{rad/s}$

$\therefore 20\lg k_g = 20\lg\frac{1}{|G(j\omega_g)|} = 15.9dB > 6dB$, 满足要求

综上，$G_c(s) = \frac{(0.7565s+1)(0.1505s+1)}{(0.01748s+1)(0.05129s+1)}$

(2) 串联滞后校正

取校正后 $\omega_c = 1\text{rad/s}$

算得 $\gamma_0(\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.2 - \arctan 0.5 = 52.125^\circ > 45^\circ +$
$\Delta \quad (\Delta = 6^\circ)$

令$20\lg|G_0(j\omega_c)| - 20\lg\beta = 0$

$\Rightarrow \beta = \frac{10}{\omega_c} = 10$

取$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{10}\omega_c \Rightarrow \tau = \frac{10}{\omega_c} = 10\text{rad/s}$ 4

则$G_c(s) = \frac{10s+1}{100s+1}$

校正后$G(s) = G_0(s)G_c(s) = \frac{10(10s+1)}{s(0.2s+1)(0.5s+1)(100s+1)}$

令$20\lg|G(j\omega_c)| = 0$

$\Rightarrow \omega_c = 1\text{rad/s}$

$\gamma = 180^\circ + \arctan 10 - 90^\circ - \arctan 0.2 - \arctan 0.5 - \arctan 100 = 46.987^\circ > 45^\circ$, 满足要求

令$\angle G(j\omega_g) = \arctan 10\omega g - 90^\circ - \arctan 0.2\omega_g - \arctan 0.5\omega_g - \arctan 100k_g = -180^\circ$

$\Rightarrow \omega_g = 3.0612\text{rad/s}$

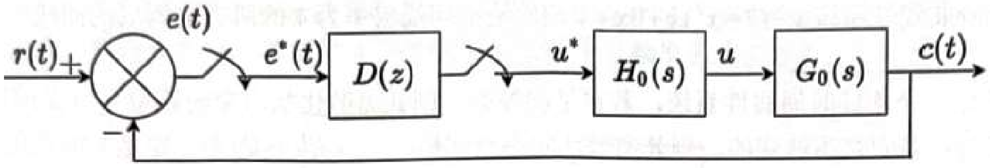
$20\lg k_g = 20\lg\frac{1}{|G(j\omega_g)|} = -20(\lg 10 + \lg 10\omega_g - \lg\omega_g - \lg 0.5\omega_g - \lg 100\omega_g) = 13.42\text{ dB} > 6\text{ dB}$, 满足要求

综上，串联滞后校正为 $G_c(s) = \frac{(10s+1)}{(100s+1)}$

五、(10 分) 设离散系统如下图所示，其中 $H_0(s)$ 为零阶保持器，采样周期为 T=1s，

$$G_0(s) = \frac{K}{s}$$

试求当 $r(t) = R_1 1(t) + R_1 t$ 时，系统无稳态误差，过渡过程在最小拍内结束的 D(z)。



解： $G(Z)=Z\cdot[ZOH\cdot G(s)]=(1-Z^{-1})\cdot\frac{KTZ}{(Z-1)^2}=\frac{K}{Z-1}$

由于输入信号为 $r(t)=R_1\cdot 1(t)+R_1\cdot t$，取 $K(Z)=1$，$\Phi_e(Z)=(1-Z^{-1})^2$，$\Phi(Z)=2Z^{-1}-Z^{-2}$

则 $D(Z)=\frac{\Phi(Z)}{G(Z)\cdot\Phi_e(Z)}=\frac{2Z^{-1}-Z^{-2}}{K/(Z-1)\cdot(1-Z^{-1})^2}=\frac{2(1-0.5Z^{-1})}{K(1-Z^{-1})}$

此时：① 输为 $r_1(t)=R_1\cdot 1(t)$ 时，$R_1(Z)=\frac{R_1}{1-Z^{-1}}$

$Y(Z)=\Phi(Z)\cdot R_1(Z)=\frac{R_1}{1-Z^{-1}}\cdot(2Z^{-1}-Z^{-2})=R_1(2Z^{-1}+Z^{-2}+Z^{-3}+\cdots+Z^{-k}+\cdots)$

两拍到达稳态

② 输入为 $r_2(t)=R_1\cdot t$ 时，$R_2(Z)=\frac{RZ}{(Z-1)^2}=\frac{RZ^{-1}}{(1-Z^{-1})^2}$

$Y(Z)=\Phi(Z)\cdot R_2(Z)=\frac{RZ^{-1}}{(1-Z^{-1})^2}\cdot(2Z^{-1}-Z^{-2})=2Z^{-2}+3Z^{-3}+4Z^{-4}+\cdots+kZ^{-k}+\cdots$

两拍到达稳态

因此设计的 $D(Z)=\frac{2(1-0.5Z^{-1})}{K(1-Z^{-1})}$

六、(10 分) 设某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G_0(s)=\frac{K}{s(0.12s+1)(0.02s+1)}$$

要求校正后系统静态速度误差系数大于等于 $70\ s^{-1}$，最大超调小于等于 40%，调节时间小于 1s。试采用期望频率特性法设计串联校正网络。

方法一：迟后-超前校正

采用迟后校正将剪切频率降为$w_c=5rad/s$:

$\beta=|G_0(j5)|=11.9453$， $1/\tau=w_c/10\Rightarrow\tau=2$

$$G_{c1}(s)=\frac{\tau s+1}{\beta\tau s+1}=\frac{2s+1}{23.89s+1}$$

对$G_1(s)=G_{c1}(s)G_0(s)$，有$\gamma_1=47.9957°$，$\omega_{c1}=5.0192rad/s$。

采用超前校正将剪切频率升为$w_c=12rad/s$：

$\alpha=\frac{1}{|G_1(12j)|^2}=13.6076$，$T=1/(\omega_c\sqrt{\alpha})=0.02259$

$$G_{c2}(s)=\frac{\alpha Ts+1}{Ts+1}=\frac{0.3074s+1}{0.02259s+1}$$

校验系统性能：

$$G_c(s)=G_{c1}(s)G_{c2}(s)=\frac{2s+1}{23.89s+1}\cdot\frac{0.3074s+1}{0.02259s+1}$$

校验后系统：

$$G_c(s)=G_c(s)G_0(s)=\frac{43.04s^2+161.5s+70}{0.001295s^5+0.133s^4+3.89s63+24.05^2+s}$$

其中$\gamma=78.7692°$，$\omega_c=12rad/s$，$K=70$满足要求。

方法二：超前滞后校正法1

先降低开环增益，使得

$$G_0'(s) = \frac{10}{s(0.12s+1)(0.02s+1)}$$

求得$\omega_{c0} = 9.13rad/s$，$\gamma_0 = 32.04°$

采用超前校正将频率置为$w_c = 12.5rad/s$:

$\alpha = 3.52$，$T = 1/(\omega_c\sqrt{\alpha}) = 0.043$

$$G_{c1}(s) = \frac{\alpha Ts+1}{Ts+1} = \frac{0.15s+1}{0.043s+1}$$

校正后

$$G_c(s) = G_0'(s)G_{c1}(s) = \frac{10}{s(0.12s+1)(0.02s+1)} \cdot \frac{0.15s+1}{0.043s+1}$$

求得$\omega_{c1} = 12.5rad/s$，$\gamma_1 = 53.32°$。

采用迟后校正使得开环增益满足要求：

$\beta = \frac{K}{K1} = 7$，令$\tau = \frac{5}{\omega_{c1}} = 0.4$

$$G_{c2}(s) = \beta\frac{\tau s+1}{\beta\tau s+1} == 7\frac{0.4s+1}{2.8s+1}$$

校正后

$$G_c(s) = G_0'(s)G_{c1}(s)G_{c2}(s) = \frac{70(0.15s+1)(0.4s+1)}{s(0.12s+1)(0.02s+1)(0.043s+1)(2.8s+1)}$$

其中$\gamma = 43.65°$，$\omega_c = 12.5rad/s$，$K = 70$满足要求。

方法三：超前-滞后校正法2

先采用超前校正将频率置为$\omega_c = 13rad/s$:

则$\varphi_m = \gamma - \gamma_0(\omega_c) + \Delta_2 = 25.59°$，$\alpha = \frac{1+sin\varphi_m}{1-sin\varphi_m} = 2.62$，$T = \frac{1}{\omega_c\sqrt{\alpha}} = 0.48$，

$$G_{c1}(s) = \frac{0.13s+1}{0.048s+1}$$

校正后

$$G_1(s) = G_0(s)G_{c1}(s) = \frac{70(0.13s+1)}{s(0.12s+1)(0.02s+1)(0.048s+1)}$$

采用滞后校正使剪切频率满足要求:

$\beta = |G_1(jw_c)| = 5.83$，令$\frac{1}{\tau} = \frac{w_c}{10} \Rightarrow \tau = 0.77$，

$$G_{c2}(s) = \frac{0.77s+1}{4.49s+1}$$

校正后：

$$G(s) = \frac{70(0.13s+1)(0.77s+1)}{s(0.12s+1)(0.02s+1)(0.048s+1)(4.49s+1)}$$

检验$w_c = 13rad/s$，$\gamma = 40.79°$满足要求。

方法四：期望频率特性法

首先确定低频段为$\frac{70}{s}$，假定期望$\gamma = 45°$，$\omega_c = 15rad/s$

对称最佳方法确定中频段：

$$h = \frac{1+sin\gamma}{1-sin\gamma} = 5.8284$$

$$\omega_2 \le \frac{\omega_c}{\sqrt{h}}, \omega_3 \ge \omega_c\sqrt{h} = 36.2132,$$

取$\omega_2 = 1$，$\omega_3 = 40$。设低高频衔接段时间常数t_1，中频段的传递函数约为

$$G = \frac{70(\frac{1}{\omega_2}s+1)}{s(t_1 s+1)(\frac{1}{\omega_3}s+1)}$$

由剪切频率$w_c = 15rad/s$可得

$$\frac{70\frac{15}{\omega_2}}{15t_1 \cdot 15} = 1 \Rightarrow t_1 = 4.6667$$

高频段使用原系统时间常数0.02，校正后系统为：

$$G(s) = \frac{70(s+1)}{s(4.6667s+1)(0.025s+1)(0.02s+1)}$$

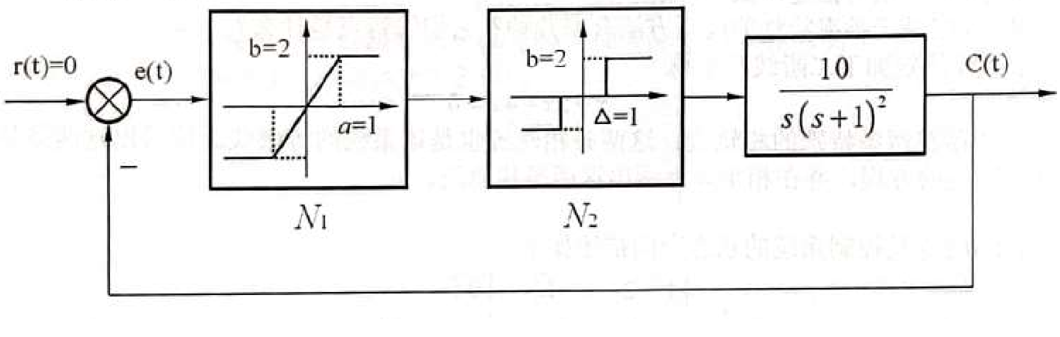
经检验校正后系统$\gamma = 52.5°$，$\omega_c = 15rad/s$，$K = 70$满足要求。

$$G_c(s) = G(s)/G0(s) = \frac{(0.12s+1)(s+1)}{(4.446s+1)(0.025s+1)}$$

七、(10 分) 已知某非线性系统的结构图如图 2 所示，试用描述函数法分析系统的稳定性。若系统存在自激振荡，则求出自激振荡的频率和振幅。

已知：$N_1 = \frac{2K}{\pi}[\arcsin\frac{a}{A} + \frac{a}{A}\sqrt{1-(\frac{a}{A})^2}], A \ge a$

$N_2 = \frac{4b}{\pi A}\sqrt{1-(\frac{\Delta}{A})^2}, A \ge \Delta$



八、(10 分) n阶线性定常系统的状态方程和输出方程为：

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = cx$$

若用$x = Pz$对系统进行线性变换，试对下面两个问题进行分析（要求给出分析过程）。

(1) 线性变换是否改变u到y的传递函数矩阵？（5 分）

(2)线性变换是否改变系统的可控性？（5 分）

(1) 变换前：$W_1(s)=C(sI-A)^{-1}B$

变换后：$P\dot{z}=APz+Bu$，$y=CPz$ $\Rightarrow$ $\dot{z}=P^{-1}APz+P^{-1}Bu$，$y=CPz$

$$W_2(s)=CP(sI-P^{-1}AP)^{-1}P^{-1}B=C[P(sI-P^{-1}AP)P^{-1}]^{-1}B=C(sPIP^{-1}-PP^{-1}APP^{-1})^{-1}B=C(sI-A)^{-1}B=W_1(s)$$

∴ 线性变换不改变u到y的传递函数矩阵。

(2)

变换前：$Q_{c1}=[B\ \ AB\ \ A^2B\ \cdots\ A^{n-1}B]$

变换后：
$$\begin{aligned}Q_{c2}&=[P^{-1}B\ \ P^{-1}APP^{-1}B\ \ (P^{-1}AP)^2P^{-1}B\ \cdots\ (P^{-1}AP)^{n-1}P^{-1}B]\\&=[P^{-1}B\ \ P^{-1}AB\ \ P^{-1}A^2B\ \cdots\ P^{-1}A^{n-1}B]\\&=P^{-1}[B\ \ AB\ \ A^2B\cdots A^{n-1}B]=P^{-1}Q_{c1}\end{aligned}$$

∴ $\mathrm{rank}(Q_{c1})=\mathrm{rank}(Q_{c2})$

∴ 线性变换不改变系统的可控性。

九、(14 分) 某单位反馈系统的开环传递函数为

$$G_0(s)=\frac{K}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$$

采用频率校正法设计串联校正装置，使得系统开环增益 K=30s^{-1}，系统截止频率 $\omega_b=12rad/s$，相角裕度$\gamma\geq 40^{\circ}$。不要采用期望频率校正方法。

方法1：迟后-超前校正

采用迟后校正将剪切频率降为$w_c=4rad/s$：

$\beta=|G_0(j4)|=5.4376$，$\frac{1}{\tau}=\frac{w_c}{10}\Rightarrow\tau=2.5$

$$G_c1(s)=\frac{\tau s+1}{\beta taus+1}=\frac{2.5s+1}{13.59s+1}$$

对$G_1(s)=G_c1(s)G_0(s)$，有$\gamma_1=24.7475°$，$\omega_{c1}=4rad/s$。

采用超前校正将剪切频率升为$\omega_c=12rad/s$:

$\alpha=\frac{1}{|G_1(12j)|^2}=77.9491$，$T=\frac{1}{\omega_c\sqrt{\alpha}}=0.0094$，

$$G_{c2}=\frac{\alpha Ts+1}{Ts+1}=\frac{0.7357s+1}{0.0094s+1}$$

检验系统性能

$$G(s)=G_{c1}(s)G_{c2}(s)G_0(s)=\frac{30(2.5s+1)(0.7357s+1)}{s(0.1s+1)(0.2s+1)(13.59s+1)(0.0094s+1)}$$

算得$\gamma=47.94°$，$\omega_c=12rad/s$，$K_v=30$满足要求。

方法2：超前-迟后校正1
改变K:

$$G_{c1}=0.1$$

$G_1(s)=G_{c1}(s)G_0(s)$，$\gamma=48.22^\circ$，$\omega_c=2.58rad/s$。
采用超前校正将剪切频率升为$\omega_c=12rad/s$:
$\alpha=\frac{1}{|G_1(12j)|^2}=263.91$，$T=\frac{1}{\omega_c\sqrt{\alpha}}=0.0051$

$$G_{c2}(s)=\frac{\alpha Ts+2}{Ts+1}=\frac{1.354s+1}{0.00513s+1}$$

校正后

$$G_2(s)=G_{c2}(s)G_{c1}(s)G_0(s)$$

得到$\gamma=55.3806^\circ$，到$\omega_c=12rad/s$。
采用迟后校正使得开环增益满足要求：
$\beta=\frac{1}{G_{c1}}=10$，$\tau=\frac{10}{\omega_c}=0.8333$

$$G_{c3}(s)=\beta\frac{\tau s+1}{\beta\tau s+1}=\frac{8.333s+10}{8.333s+1}$$

校验系统性能：

$$G_c(s)=G_{c1}(s)G_{c2}(s)G_{c3}(s)=0.1\cdot\frac{1.354s+1}{0.00513s+1}\cdot\frac{8.333s+10}{8.333s+1}$$

校正后系统

$$G(s)=G_c(s)G_0(s)=\frac{3}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}\cdot\frac{1.354s+1}{0.00513s+1}\cdot\frac{8.333s+10}{8.333s+1}$$

其中$\gamma=50.0966^\circ$，$\omega_c=12rad/s$，$K_v=30$满足要求。

方法3：超前-迟后校正2
采用超前校正提供$12rad/s$处相位储备：
G_0在$12rad/s$处相位储备为$\angle G_0(12j)=-27.5746^\circ$，可取$\varphi_m=80^\circ$。
$\alpha=\frac{1+sin\varphi_m}{1-sin\varphi_m}=130.6461$，$T=\frac{1}{\varphi_m\sqrt{\alpha}}=0.0073$，

$$G_{c1}(s)=\frac{\alpha Ts+1}{Ts+1}=\frac{0.9525s+1}{0.007291s+1}$$

校正后

$$G_1(s)=G_0(s)G_{c1}(s)=\frac{30}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}\cdot\frac{0.9525s+1}{0.007291s+1}$$

采用迟后校正使剪切频率满足要求：
$\beta=|G_1(12j)|=7.0359$，$\tau=10/12=0.8333$

$$G_{c2}(s)=\frac{\tau s+1}{\beta\tau s+1}=\frac{0.8333s+1}{5.863s+1}$$

校验系统性能：

$$G_c(s)=G_{c1}(s)G_{c2}(s)=\frac{0.9525s+1}{0.007291s+1}\cdot\frac{0.8333s+1}{5.863s+1}$$

校正后系统：

$$G(s)=G_c(s)G_0(s)=\frac{0.9525s+1}{0.007291s+1}\cdot\frac{0.8333s+1}{5.863s+1}\cdot\frac{30}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$$

求得$\gamma=47.3843^\circ$，$\omega_c=12rad/s$，$K_v=30$满足要求。

模拟卷2

2022年8月27日 14:57

1. 一般系统的位置误差是____信号所引起的输出位置上的误差。

阶跃

2. 已知系统的开环传递函数为$\frac{100}{(0.1s+1)(s+5)}$,则系统的开环增益是___。

20

分母每一项化为标准形式(as+1)，原式=20/(0.1s+1)(0.2s+1)

3.对自动控制系统得基本要求可以概括为三个方面，即____、快速性、____。

快速性 准确性 稳定性

4. _______和_______是最优控制器和最优估计器的设计基础。

能控性 能观测性

5.由闭环控制系统的特征方程确定的系统稳定的充要条件是_______ 。

闭环系统特征方程的根（闭环极点）都分布在s平面的左半平面（有负实部）

二、简答题

1. (3 分) 具有正相位裕度的负反馈系统一定是稳定的吗？

具有正相位裕度的负反馈系统一定是稳定的吗？

答：不一定。对于包含不稳定惯性环节的非最小相位系统，只有当相位裕度为正，幅值裕度为负时，闭环系统才是稳定的。

2. (4 分) 相位裕度和幅值裕度的几何意义和物理意义？

相位裕度

几何意义：系统开环频率特性曲线与单位圆的交点 A 与原点 O 所在直线 OA，相位裕度即为负实轴与 OA 的夹角，逆时针为正。

物理意义：相位裕度表示开环极坐标图与单位圆的交点沿单位圆与（-1，j0）的远近程度。若系统剪切频率 ω_c 处的相位再减小 γ，则 $\varphi(\omega_c) = -180°$，Nyquist 曲线过（-1,0），系统将处于临界稳定状态。

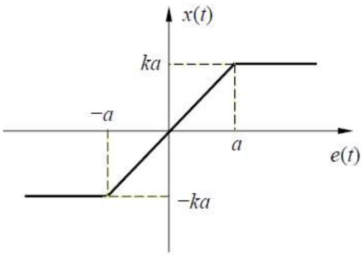
幅值裕度

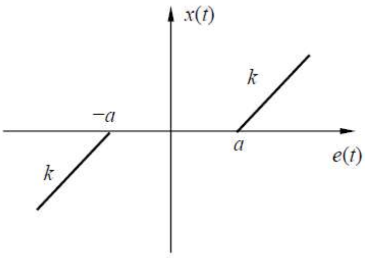
几何意义：系统开环频率特性曲线与负实轴交点到原点的距离的倒数。

物理意义：幅值裕度表示开环极坐标图与负实轴的交点离（-1，j0）的远近程度。若系统的开环增益增大到原来的 K_g 倍，则 $A(\omega_g) = 1$，Nyquist 曲线过（-1，0），系统将处于临界稳定状态。

3. (4 分)典型的非线性特征有哪一些，请画出他们的简图。

1. 饱和特性　　　　2. 死区特性

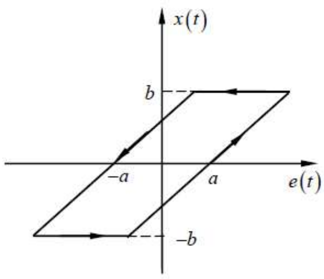


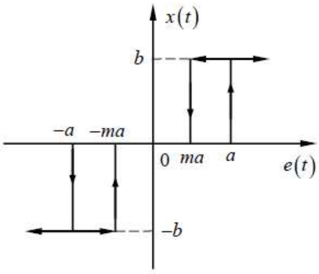


$$x(t)=\begin{cases} ke(t), & |e(t)|\le a \\ ka\,\mathrm{signe}(t), & |e(t)|>a \end{cases}$$

$$x(t)=\begin{cases} k(e(t)+a), & e(t)<-a \\ 0, & |e(t)|<a \\ k(e(t)-a), & |e(t)|>a \end{cases}$$

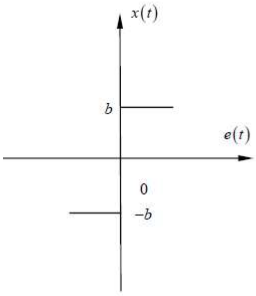
3. 滞环特性　　　　4. 继电特性

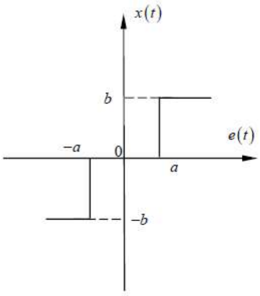


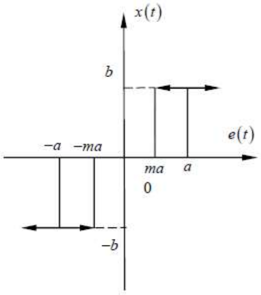


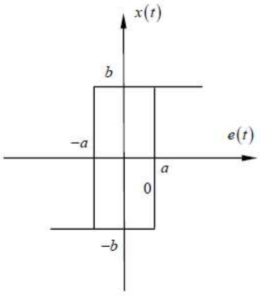
$$x(t)=\begin{cases} k\left[e(t)-a\right], & \dot{x}(t)>0 \\ b\,\mathrm{signe}(t), & \dot{x}(t)=0 \\ k\left[e(t)+a\right], & \dot{x}(t)<0 \end{cases}$$

$$x(t)=\begin{cases} 0, & -ma<e(t)<a, \dot{e}(t)>0 \\ 0, & -a<e(t)<ma, \dot{e}(t)<0 \\ b\mathrm{signe}(t), & |e(t)|\geqslant a \\ b, & e(t)\geqslant ma, \dot{e}(t)<0 \\ -b, & e(t)\leqslant -ma, \dot{e}(t)>0 \end{cases}$$









4. (4 分)二阶系统的性能指标中，如果要减少最大超调量，其余性能有何影响？

要减小最大超调量就要增大阻尼比。会引起上升时间、峰值时间变大，影响系统的快速性。

超调量：

$$\sigma_{\mathrm{p}} = \exp\left(\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

5. (5 分)增添系统的开环增益，对闭环系统的性能有如何的影响？

增大了系统无阻尼震荡频率，减小系统的阻尼比，降低了系统的动态性能。误差系数有所增大，减小了稳态误差，因而提高了系统的精度。

三、(10 分)设线性定常系统为

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

而且 $\lambda \neq 0$。试问能否取合适的 $b \in \mathbb{R}^3$，使系统是状态完全能控的。若能控，给出 b 的选取方法；若不能控，说明理由。

2、$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} u$

能控充要条件是向量组 $\{[b_1], [b_3]\}$ 线性无关，而两个一维向量构成的向量组一定线性相关

一定不能控

四、(8 分) 某单位反馈系统的开环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+2)}$$

要求校正后系统的开环增益为 5，系统相角裕度 $\gamma \geq 40^{\circ}$，幅值裕度不小于 10dB，试确定串联校正的类型，并进行设计。

解：

确定原系统的剪切频率和相角裕度：

$$G_0(s)=\frac{10}{s(s+1)(s+2)}\quad G_0(j\omega)=\frac{10}{j\omega(1+j\omega)(2+j\omega)}$$

$$\begin{cases}|G_0(j\omega)|=\frac{10}{\omega\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{\omega^2+4}}\\ \angle G_0(j\omega)=-90^0-\arctan\omega-\arctan\frac{\omega}{2}\end{cases}$$

$$|G_0(j\omega)|=\frac{10}{\omega\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{\omega^2+4}}=1\quad 解得\omega_c=1.8\mathrm{rad/s}$$

相角裕度: $\gamma=180°+\angle G_0(j\omega)=180°-90°-\arctan\omega-\arctan\frac{\omega}{2}=$ 12.9°

不满足要求。

$$G_0(s)=\frac{10}{s(s+1)(s+2)}=\frac{5}{s(s+1)(0.5s+1)}$$

满足稳态误差要求。

设计串联迟后环节 $G_c(s)=\frac{\tau s+1}{Ts+1}(T>\tau)$

要求相角裕度 $\gamma\geq 40°$，取 $\gamma(\omega_c)=40°+\Delta=46°$

则校正后剪切频率 ω_c 满足：$\angle G_0(j\omega_c)=46°-180°$，即：

$$\angle G_0(j\omega)=-90^0-\arctan\omega-\arctan\frac{\omega}{2}=46°-180°$$

得 $\omega_c=0.547\mathrm{rad/s}$

根据 $20\lg|G_0(j\omega)|=20\lg\beta$，故 $\beta=7.735$

取 $\frac{1}{\tau}=\frac{1}{10}\omega_c$

解得:$\tau=18.3$

$T=\beta\tau=7.735\times18.3=141.5$

则校正环节为 $G_c(s)=\frac{18.3s+1}{141.5s+1}$

校正后系统 $G_0(s)G_c(s)=\frac{5(18.3s+1)}{s(s+1)(0.5s+1)(141.5s+1)}$

检验：

剪切频率：$|G_0(j\omega_c)G_c(j\omega_c)|=\frac{5\sqrt{18.3^2\omega_c^2+1}}{\omega_c\sqrt{\omega_c^2+1}\sqrt{0.25\omega_c^2+1}\sqrt{141.5^2\omega_c^2+1}}=1$

$\Rightarrow\omega_c=0.5492\mathrm{rad/s}$

相位裕度

$$\gamma=180°-90°+arctan18.3w_c-arctanw_c-arctan0.5w_c-arctan141.5w_c$$
$$=40.92°>40°$$

满足条件

穿越频率：

$$\angle G_0(j\omega_g)G_c(j\omega_g)=-90°-\arctan\omega_g-\arctan0.5\omega_g+\arctan18.3\omega_g-\arctan141.5\omega_g$$
$$=-180°$$
$$\Rightarrow\omega_g=1.3628\mathrm{rad/s}$$

幅值裕度 $20\lg\mathrm{k_g}=-20\lg|G_0(j\omega_g)G_c(|\mathrm{w_g})|=12.68\ \mathrm{dB}>10\ \mathrm{dB}$

满足要求。

五、(10 分) 设某单位负反馈离散系统的开环传递函数为

$$G_0(s)=\frac{1-e^{-T_0 s}}{s}\cdot\frac{10}{s(s+1)}$$

式中 $T_0=1s$ 为采样周期。试确定在匀速输入信号 $r(t)=t$ 作用下，使校正后系统响应输入信号时既无稳态误差又能在有限拍内结束的串联校正环节的脉冲传递函数 $D(z)$。

六、(10 分) 设某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G_0(s)=\frac{8}{s(s+2)}$$

要求校正后系统在信号 $r(t)=t$ 的作用下的稳态误差为 0.05，系统的开环剪切频率为 $\omega_c\geq 10rad/s$，相角裕度 $\gamma\geq 40^{\circ}$，设计串联校正网络。

解：

① 首先满足稳态误差为 0.05

则 $0.05=\frac{1}{k_v}$，得 $k_v=20$

故 $G_0'(s)=\frac{20}{s(0.5s+1)}$　$G_0'(j\omega)=\frac{20}{j\omega(0.5j\omega+1)}$

② 求 $G_0'(j\omega)$ 的剪切频率

$|G_0'(j\omega)|=\frac{20}{\omega\sqrt{0.25w^2+1}}$　$\angle G_0'(j\omega)=-90^\circ-\arctan 0.5\omega$

令 $|G_0'(j\omega)|=1$ 解得：$\omega_c=6.16\mathrm{rad/s}$

相角裕度 $\gamma=180^\circ-90^\circ-\arctan 0.5\omega_c=180^\circ-162^\circ=18$

故 ② 采用超前校正，设 $G_C(S)=\frac{K_C(\tau S+1)}{TS+1}$

1、计算串联超前校正装置的超前相角 $\psi_m=45^\circ-18^\circ+8^\circ=35^\circ$

2、求 α 的值：$\alpha=\frac{1-\sin 35}{1+\sin 35^\circ}=0.27$

3、计算 $-20\lg\frac{1}{\sqrt{\alpha}}=-20\lg\frac{1}{\sqrt{0.27}}=-5.71dB$

4、求出 $G_0'(S)$ 的幅频特性为 $-5.71dB$ 处的频率为 $\omega_m=8.67\mathrm{rad/s}$

$\tau=\frac{1}{\omega_m\sqrt{\alpha}}=0.222$　$T=\alpha\tau=0.06$

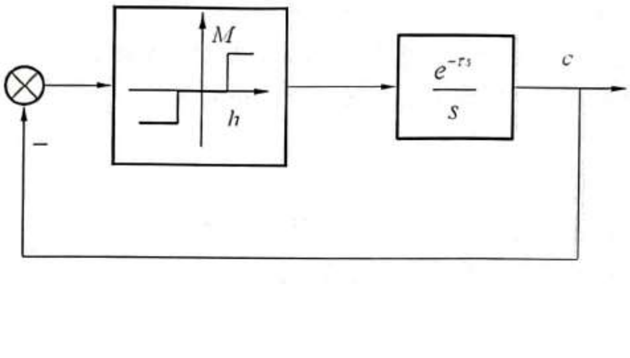
5、计算 k_c：　$k_c=\frac{k}{k_0}=\frac{20}{4}=5$

最终得到超前校正装置为:

$$G_c(s)=\frac{5(0.222s+1)}{0.06s+1}\quad G(s)=\frac{20(0.222s+1)}{s(0.5s+1)(0.06s+1)}$$

验证剪切频率 $\omega_c=8.6\mathrm{rad/s}$　$\gamma=180^\circ+\angle G(j\omega)=180^\circ-131.85^\circ=48.15^\circ>45^\circ$

七、(10 分) 已知图 2 所示的非线性系统，试求延迟时间 τ 为何值时，会使系统产生临界自振？临界自振时，非线性元件输入信号的振幅及频率各为多少？



5、解：

$$N(A)=\frac{4M}{\pi A}\sqrt{1-(\frac{h}{A})^2}$$

即 $-1/N(A)=-\frac{\pi A}{4M}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(h/A)^2}}$ 在 $A=\sqrt{2}h$ 时取最大值 $-\frac{\pi h}{2M}$

$G(jw)=\frac{e^{-\tau jw}}{jw}$ 由 $Im(G(jw))=0$ 得：$w_1=\frac{\pi}{2\tau}$ rad/s $w_2=\frac{3\pi}{2\tau}$

即 $Re\, G(jw_1)=-\frac{2\tau}{\pi}$，$Re\, G(jw_2)=\frac{2\tau}{3\pi}>0$，舍去

临界自振即：$-\frac{2\tau}{\pi}=-\frac{\pi h}{2M}\Rightarrow\tau=\frac{\pi^2 h}{4M}$

振幅为 $\sqrt{2}h$，频率为 $\frac{\pi}{2\tau}$ rad/s

八、(10分) 根据系统的开环传递函数

$$G(s)H(s)=\frac{2e^{-\tau s}}{s(1+s)(1+0.5s)}$$

绘制系统的 Bode 图，并确定能使系统稳定的 τ 范围。

答：系统的开环频率特性：$G(jw)H(jw)=\frac{2e^{-\tau j\omega}}{jw(1+jw)\left(1+\frac{jw}{2}\right)}$

幅频特性：$|G(jw)H(jw)|=\frac{2}{w\sqrt{1+w^2}\sqrt{1+\left(\frac{w}{2}\right)^2}}$

$$L(w)=\begin{cases}20(\lg 2-\lg w) & w<1\\ 20(\lg 2-\lg w-\lg w) & 1<w<2\\ 20\left(\lg 2-\lg w-\lg w-\lg\frac{w}{2}\right) & w>2\end{cases}$$

基准线: $20\lg\left|\frac{2}{w}\right|$.

相频特性：$\angle G(j\omega)H(j\omega)=(-\tau\omega)-90^\circ-\arctan\omega-\arctan\frac{\omega}{2}$

$$\varphi(\omega)=-90^\circ-\tau\omega-\arctan\omega-\arctan\frac{\omega}{2}$$

剪切频率:$|G(jw)H(jw)|=1$

$$\Rightarrow w_c{}^2\left(1+w_c{}^2\right)\left(1+\frac{w_c^2}{4}\right)=4$$

$$\Rightarrow \quad w_c\approx 1.1432\mathrm{rad/s}$$

穿越频率：$\angle G\left(jw_g\right)H\left(jw_g\right)=-180^\circ$

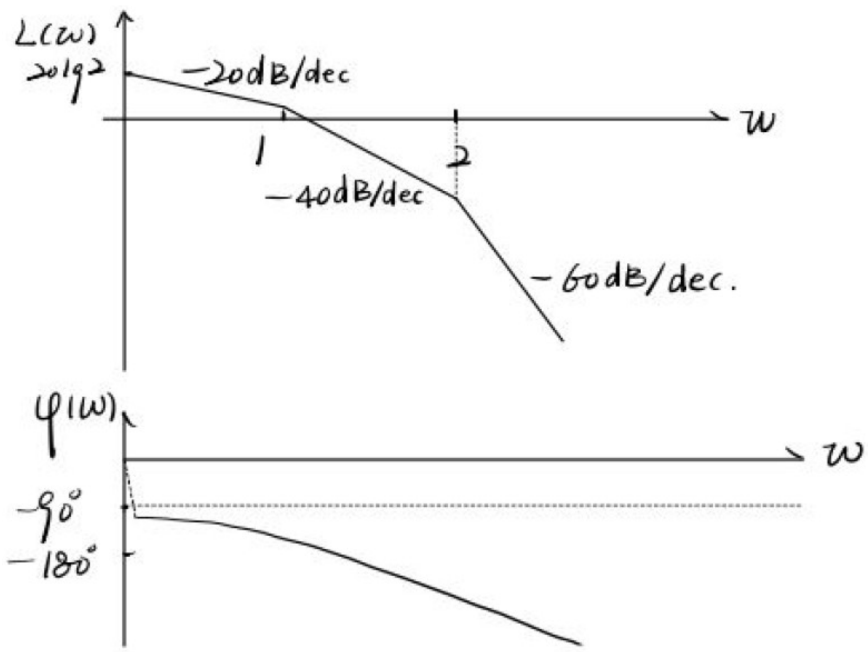
$$\Rightarrow -90^\circ-\tau\omega_g-\arctan\omega_g-\arctan\frac{\omega_g}{2}=-180^\circ$$
$$\Rightarrow \tau\omega_g+\arctan\omega_g+\arctan\frac{\omega_g}{2}=90^\circ$$

临界稳定，有 $\omega_g=\omega_c=1.1432\mathrm{rad/s}$

$$\Rightarrow 1.1432\tau+\arctan 1.1432+\arctan\frac{1.1432}{2}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\tau=0.1744$$

所以 $0<\tau<0.1744$

Bode 图：



九、(14 分) 某单位反馈系统的开环传递函数为

$$G_0(s)=\frac{2}{s(s+1)(0.02s+1)}$$

设计一个串联校正装置，使得跟踪单位斜坡输入信号时的稳态误差为 0.01，开环剪切频率为$0.6\le\omega_c\le 1rad/s$，相角裕度$\gamma\ge 40^c$。

分析: 由原系统开环传递函数 $G_0(S)$ 知，原系统已为 I 型，要求稳态误差 0.01，即 $\frac{1}{k}=0.01\Rightarrow k=100$,

原系统剪切频率:$20\lg 2-20\lg\omega_{c0}-20\lg\omega_{c0}=0\Rightarrow\omega_{c0}=\sqrt{2}\approx 1.414\text{rad/s}$,
大于要求的剪切频率，故采用迟后校正，$G_c(s)=\frac{50(\tau s+1)}{\beta\tau s+1}(\beta>1)$

设计：取校正后剪切频率 $\omega_c=0.7\text{rad/s}$

即：$20\lg|50G_0(j\omega_c)|=20\lg\beta$

$$\beta=\frac{100}{w_c\sqrt{0.02^2w_c^2+1}\sqrt{w_c^2+1}}=117.022$$

原系统 0.7rad/s 处相位储备

$$\begin{aligned}\gamma_0(\omega_c)&=180^\circ-90^\circ-\arctan\omega_c-\arctan0.02\,\omega_c\\&=55.81^\circ>40^\circ+6^\circ\end{aligned}$$

具有足够的相位储备。

取 $\frac{1}{\tau}=\frac{1}{10}\omega_c$, 即$\tau=14.286$

则校正环节设计为：$G_c(s)=\frac{50(14.286s+1)}{1671.8s+1}$

检验：

校正后系统：$G_0(s)G_c(s)=\frac{100(14.286s+1)}{s(s+1)(0.02s+1)(1671.8s+1)}$

剪切频率：

$$\begin{aligned}&0=20\lg 100+20\lg 14.286\omega_c-20\lg\omega_c-20\lg 1671.8\omega_c\\&\Rightarrow\omega_c=0.8545\quad\text{rad/s}\end{aligned}$$

符合条件。

相角裕度:

$$\begin{aligned}\gamma&=180^\circ-90^\circ+arctan7.143\omega_c-arctan\omega_c-arctan0.02\omega_c-arctan835.9\omega_c\\&=43.86^\circ>40^\circ\end{aligned}$$

符合条件。

迟后超前校正

2022年9月3日　22:24

六、(10分) 设某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G_0(s)=\frac{K}{s(0.12s+1)(0.02s+1)}$$

要求校正后系统静态速度误差系数大于等于 $70\ s^{-1}$，最大超调小于等于 40%，调节时间小于 1s。试采用期望频率特性法设计串联校正网络。

方法一：迟后-超前校正

采用迟后校正将剪切频率降为$w_c=5rad/s$:

$\beta=|G_0(j5)|=11.9453$，$1/\tau=w_c/10\Rightarrow\tau=2$

$$G_{c1}(s)=\frac{\tau s+1}{\beta\tau s+1}=\frac{2s+1}{23.89s+1}$$

对$G_1(s)=G_{c1}(s)G_0(s)$，有$\gamma_1=47.9957°$，$\omega_{c1}=5.0192rad/s$。

采用超前校正将剪切频率升为$w_c=12rad/s$:

$\alpha=\frac{1}{|G_1(12j)|^2}=13.6076$，$T=1/(\omega_c\sqrt{\alpha})=0.02259$

$$G_{c2}(s)=\frac{\alpha Ts+1}{Ts+1}=\frac{0.3074s+1}{0.02259s+1}$$

校验系统性能：

$$G_c(s)=G_{c1}(s)G_{c2}(s)=\frac{2s+1}{23.89s+1}\cdot\frac{0.3074s+1}{0.02259s+1}$$

校验后系统：

$$G_c(s)=G_c(s)G_0(s)=\frac{43.04s^2+161.5s+70}{0.001295s^5+0.133s^4+3.89s63+24.05^2+s}$$

其中$\gamma=78.7692°$，$\omega_c=12rad/s$，$K=70$满足要求。

屏幕剪辑的捕获时间: 2022/9/3 22:41

九、(14 分) 某单位反馈系统的开环传递函数为

$$G_0(s)=\frac{K}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$$

采用频率校正法设计串联校正装置，使得系统开环增益 K=30s^{-1}，系统截止频率 $\omega_b=12rad/s$，相角裕度$\gamma\geq 40^{\circ}$。不要采用期望频率校正方法。

方法1：迟后-超前校正

采用迟后校正将剪切频率降为$w_c=4rad/s$：

$\beta=|G_0(j4)|=5.4376$，$\frac{1}{\tau}=\frac{w_c}{10}\Rightarrow\tau=2.5$

$$G_c1(s)=\frac{\tau s+1}{\beta taus+1}=\frac{2.5s+1}{13.59s+1}$$

对$G_1(s)=G_c1(s)G_0(s)$，有$\gamma_1=24.7475^{\circ}$，$\omega_{c1}=4rad/s$。

采用超前校正将剪切频率升为$\omega_c=12rad/s$:

$\alpha=\frac{1}{|G_1(12j)|^2}=77.9491$，$T=\frac{1}{\omega_c\sqrt{\alpha}}=0.0094$，

$$G_{c2}=\frac{\alpha Ts+1}{Ts+1}=\frac{0.7357s+1}{0.0094s+1}$$

检验系统性能

$$G(s)=G_{c1}(s)G_{c2}(s)G_0(s)=\frac{30(2.5s+1)(0.7357s+1)}{s(0.1s+1)(0.2s+1)(13.59s+1)(0.0094s+1)}$$

算得$\gamma=47.94^{\circ}$，$\omega_c=12rad/s$，$K_v=30$满足要求。

屏幕剪辑的捕获时间: 2022/9/3 22:41

迟后-超前校正　卷1、T六九

题目类型　$G_0(S)=\frac{K}{S(t_1S+1)(t_2S+1)}$

解 采用迟后校正将剪切频率降为 $w_c=$　rad/s

$\beta=|G_0(jw_c)|=$

$\frac{1}{\tau}=\frac{w_c}{10}\Rightarrow\tau=\frac{10}{w_c}=$

$\therefore G_{c1}(S)=\frac{\tau S+1}{\beta\tau S+1}=$ ______

对$G_1(S)=G_{c1}(S)\,G_0(S)$，有$\gamma_1=$　　，$w_{c1}=$

采用超前校正将剪切频率升至 $w_c=$ rad/s

$$\alpha=\frac{1}{|G_1(jw)|^2}=$$

$$T=\frac{1}{w_c\sqrt{\alpha}}=$$

$$\therefore G_{c2}(s)=\frac{\alpha Ts+1}{Ts+1}=\underline{\qquad}$$

校验后系统 $G_1(s)=G_{c1}(s)G_{c2}(s)G_0(s)=$

检验系统性能 $\gamma=$ $w_c=$ $k=$ 满足要求。

由 $G(s)$ 算 γ： $G(s)=\dfrac{k(a_1s+1)\cdots(a_ms+1)}{s^n(b_1s+1)\cdots(b_ns+1)}$

$$\gamma=180^\circ+\sum\arctan\frac{w_c}{a_i}-n\cdot 90^\circ-\left(\sum\arctan\frac{w_c}{b_i}\right)$$