

相对稳定性通过稳定裕度定量描述，包括

- 相位裕度
- 幅值裕度

稳定裕度

1 相角裕度

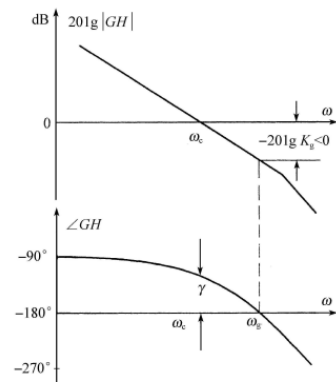
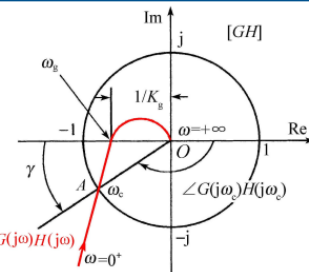
剪切频率 ω_c : Nyquist曲线穿越单位圆的频率
 相位裕度定义为:

$$\gamma = \angle G(j\omega_c)H(j\omega_c) - (-180^\circ) = 180^\circ + \angle G(j\omega_c)H(j\omega_c)$$

负实轴与OA的角度，逆时针为正。

物理意义:

- 相位裕度表示开环极坐标图与单位圆的交点沿单位圆与 $(-1, j0)$ 的远近程度。
- 若系统剪切频率 ω_c 处的相位再减小 γ ，则 $\varphi(\omega_c) = -180^\circ$ ，Nyquist曲线过 $(-1, 0)$ ，系统将处于临界稳定状态。



2 幅值裕度

相位穿越频率 ω_g : 开环频率特性相角为 -180° 的频率
 幅值裕度定义为:

$$K_g = \frac{1}{|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|}$$

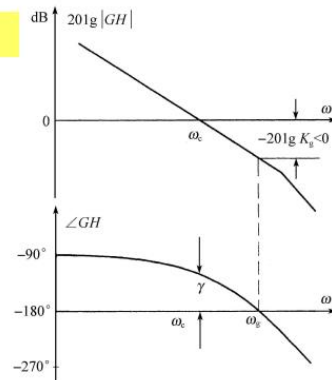
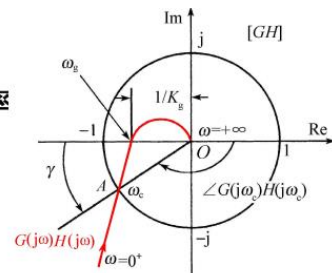
Nyquist图

$$20\lg K_g = -20\lg |G(j\omega)H(j\omega)| \text{ dB}$$

Bode图

物理意义:

- 幅值裕度表示开环极坐标图与负实轴的交点离 $(-1, j0)$ 的远近程度。
- 若系统的开环增益增大到原来的 K_g 倍，则 $A(\omega_g)=1$ ，Nyquist曲线过 $(-1, 0)$ ，系统将处于临界稳定状态。



Nyquist稳定判据

$$N=P-Z \iff Z=P-N$$

N : $G(j\omega)H(j\omega)$, $-\infty \leq \omega \leq \infty$ 逆时针包围 $(-1, j0)$ 的圈数

P : 辅助函数 $F(s)$ 不稳定极点的个数

Z : 辅助函数 $F(s)$ 不稳定零点的个数

P : 开环不稳定极点的个数

Z : 闭环不稳定极点的个数

开环传递函数在全频段的频率特性逆时针包围 $(-1, j0)$ 的圈数等于开环不稳定极点的个数，则闭环系统稳定

闭环频域性能

(1) 零频幅值 $A(0)$ $\omega = 0$ 时的闭环幅频特性值

(2) 相对谐振峰值 M_r 闭环幅频特性最大值与零频特性值之比，即

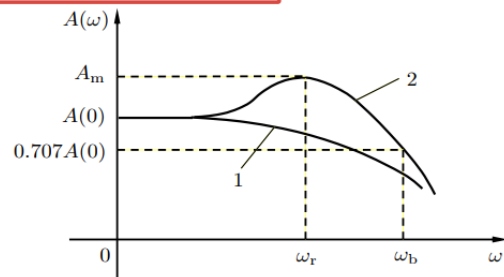
$$M_r = \frac{\max_{\omega} A(\omega)}{A(0)}$$

(3) 谐振频率 ω_r 出现谐振峰值时的频率，其满足

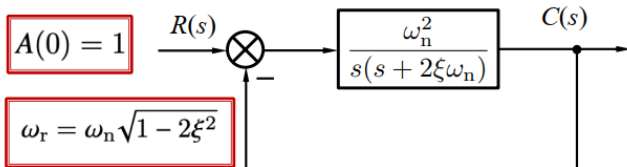
$$A(\omega_r) = \max_{\omega} A(\omega)$$

(4) 截止频率 ω_b 闭环幅频特性下降到频率为零时的 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 对应的频率，其满足

$$A(\omega_b) = \frac{\sqrt{2}}{2} A(0)$$

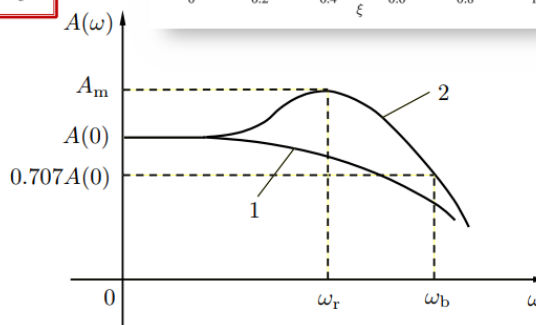
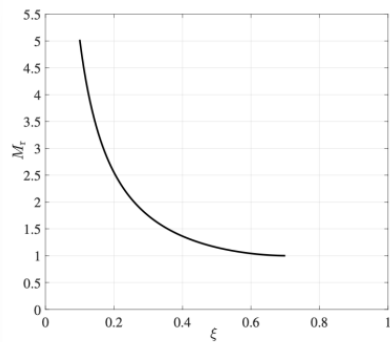


二阶系统的闭环频域性能

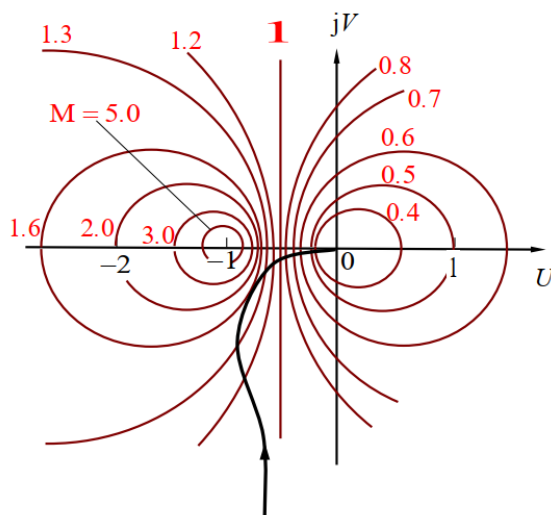


$$M_r = A(\omega_r)/A(0) = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{\omega_n^4(4\xi^2 - 4\xi^4)}} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\omega_b = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} + \sqrt{2-4\xi^2+4\xi^4}$$



闭环特性图示法

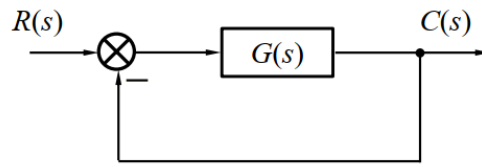


当 $G(j\omega)$ 与某一 M 圆相切不再进入更深的区域，相切 M 圆的 M 值就是闭环幅频特性的峰值 M_r ，切点处的 ω 就是谐振频率 ω_r 。

闭环频域指标与开环频域指标之间的关系

闭环幅频特性

$$A(\omega) = \frac{|G(j\omega)|}{|1 + G(j\omega)|}$$



$$M_r = \frac{A_{\max}}{A(0)} \approx \frac{1}{\sin \gamma}$$

$$\gamma = \arcsin \frac{1}{M_r}$$

闭环频域指标和时域指标之间的关系

$$\sigma_p = 0.16 + 0.4(M_r - 1), \quad 1 \leq M_r \leq 1.8$$

$$\sigma_p = \begin{cases} M_r - 1, & 1 \leq M_r \leq 1.25 \\ 0.5\sqrt{M_r - 1}, & 1.25 < M_r \leq 2 \end{cases}$$

$$t_s = \frac{\pi}{\omega_c} \left[2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2 \right]$$

经验公式

开环频域指标和时域指标之间的关系

$$\sigma_p = 0.16 + 0.4 \left(\frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right), \quad 34^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$$

$$t_s = \frac{\pi}{\omega_c} \left[2 + 1.5 \left(\frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right) + 2.5 \left(\frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right)^2 \right]$$

经验公式

$$\xi = \frac{\tan \gamma}{2\sqrt[4]{1 + \tan^2 \gamma}}$$

$$M = \frac{2 + \tan^2 \gamma}{\tan^2 \gamma}$$

一个设计合理的系统的三频段

- 中频段的斜率以 -20dB 为宜；
- 低频段和高频段可以有更大的斜率
低频段斜率大，提高稳态性能；
高频段斜率大，排除干扰。
- 中频段必须有足够的带宽，以保证系统的相位裕量，带宽越大，相位裕量越大。

ω_c 的大小取决于系统的快速性要求。

ω_c 大快速性好，但抗扰能力下降。

超前校正环节性质

命题 3.1

对于 $\tau = \alpha T$, $\alpha > 1$ 的超前校正环节 (3.1.1), 其有如下特性

$$\begin{cases} \omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \\ \varphi_m = \arcsin \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \\ 20 \lg |G_c(j\omega_m)| = 10 \lg \alpha \end{cases}$$

传递函数

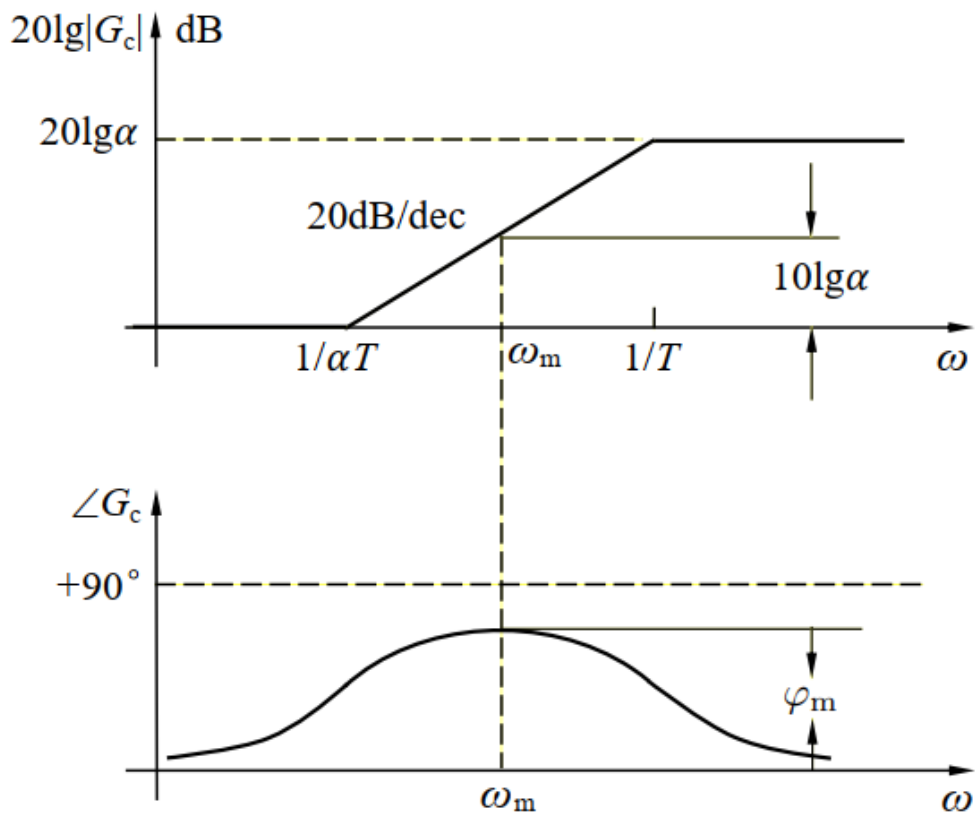
$$G_c(s) = \frac{\tau s + 1}{Ts + 1}, \quad \tau > T$$

相频特性

$$\varphi(\omega) = \angle G_c(j\omega) = \arctan \tau\omega - \arctan T\omega$$

幅频特性

$$|G_c(j\omega)| = \frac{\sqrt{\tau^2\omega^2 + 1}}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}$$



单级超前校正设计

设计方法 3.1: 相角裕度优先超前校正设计

第 1 步. 根据所要求的稳态性能指标确定系统的开环增益。

第 2 步. 利用已知的开环增益, 绘制原系统的 Bode 图, 并计算未校正系统的剪切频率 ω_{c0} , 相角裕度 γ_0 和幅值裕度 L_{g0} 。

第 3 步. 根据相角裕度的要求确定超前校正环节的 α 。为使相角裕度达到要求值, 计算所需增加的超前相角 φ_m , 即

$$\varphi_m = \gamma - \gamma_0 + \Delta$$

式中 γ 为要求的相角裕度, Δ 是因为考虑到校正装置影响剪切频率的位置而附加的相角, 一般取 $\Delta = 5^\circ \sim 10^\circ$ 。按下式计算 α

$$\alpha = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} \quad (3.2.8)$$

第 4 步. 确定校正后系统的剪切频率 ω_c 。在校正后的剪切频率处, 未校正系统的负幅值由超前校正环节补偿, 因此校正后系统的剪切频率 ω_c 由下式确定

$$20 \lg |G_0(\omega_c)| = -10 \lg \alpha \quad (3.2.9)$$

如果求得的剪切频率满足要求, 则进行下一步; 否则返回第 3 步调整 Δ 。

第 5 步. 确定超前校正环节。让超前校正环节取得最大值的频率对准校正后系统的剪切频率, 即 $\omega_m = \omega_c$ 。根据

$$T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{\alpha}}$$

确定校正装置的时间常数, 进而确定校正环节的传递函数。

第 6 步. 检验系统的性能指标, 若不满足要求, 可增大 Δ 的值, 从第 3 步起重新计算。♡

设计方法 3.2: 剪切频率优先超前校正设计

第 1 步. 根据所要求的稳态性能指标确定系统的开环增益;

第 2 步. 利用已知的开环增益, 绘制原系统的 Bode 图, 并计算未校正系统的剪切频率 ω_{c0} , 相角裕度 γ_0 和幅值裕度 L_{g0} ;

第 3 步. 根据设计要求确定校正后系统的剪切频率 ω_c , 并让超前校正环节取最大相角的频率对准该剪切频率, 即 $\omega_m = \omega_c$ 。

第 4 步. 根据幅值补偿确定超前校正环节的 α 。在校正后的剪切频率处, 未校正系统的负幅值由超前校正环节补偿, 因此校正环节的 α 由 ω_c 由下式确定

$$20 \lg |G_0(\omega_c)| = -10 \lg \alpha \quad (3.2.10)$$

根据该式确定的 α , 按下式计算 φ_m

$$\varphi_m = \arcsin \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$

如果 $\varphi_m > \gamma - \gamma_0 + \Delta$, 其中 γ 为所要求的相角裕度, Δ 取 $5^\circ \sim 10^\circ$, 则进行下一步; 否则, 返回第 3 步重新选择剪切频率。

第 5 步. 确定超前校正环节。由第 3 步和第 4 步确定的 ω_m 和 α , 根据

$$T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{\alpha}}$$

确定校正装置的时间常数, 进而确定校正环节的传递函数。

第 6 步. 检验系统的性能指标, 若不满足要求, 可修改剪切频率 ω_c , 从第 3 步起重新计算。♡

设计方法 3.3: 相角裕度优先超前校正修正设计

第 1 步. 根据所要求的稳态性能指标确定系统的开环增益。

第 2 步. 利用已知的开环增益, 绘制原系统的 Bode 图, 并计算未校正系统的剪切频率 ω_{c0} , 相角裕度 γ_0 和幅值裕度 L_{g0} 。

第 3 步. 根据相角裕度的要求确定超前校正环节的 α 。为使相角裕度达到要求值, 计算所需增加的超前相角 φ_m , 即

$$\varphi_m = \gamma - \gamma_0(\omega_{cL}) + \Delta$$

式中 γ 为要求的相角裕度, $\gamma_0(\omega)$ 是未校正系统的在 ω 处的相位储备, ω_{cL} 是所要求的剪切频率的下界, Δ 是因为考虑到校正装置影响剪切频率的位置而附加的相角。按式 (3.2.8) 计算 α 。

第 4 步. 确定校正后系统的剪切频率 ω_c 。在校正后的剪切频率处, 未校正系统的负幅值由超前校正环节补偿, 因此校正后系统的剪切频率 ω_c 由式 (3.2.9) 确定。如果求得的剪切频率满足要求, 则进行下一步; 否则返回第 3 步调整 Δ 。

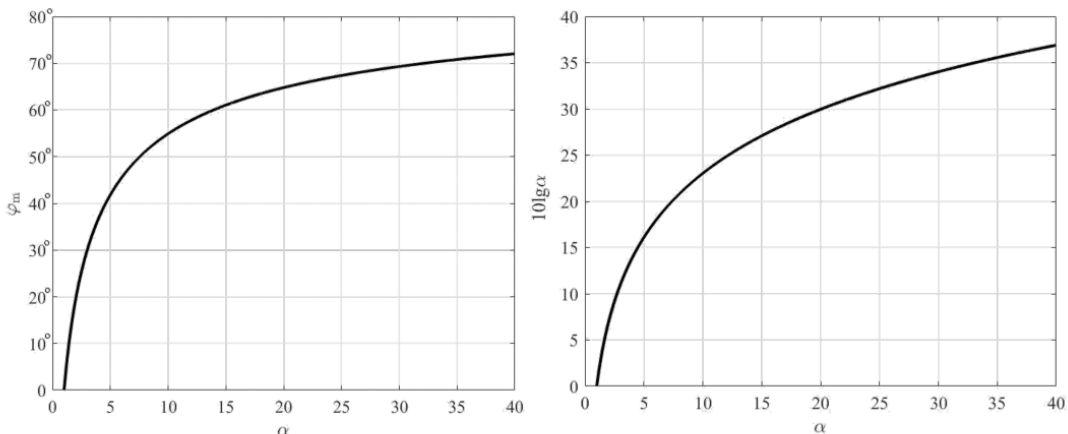
第 5 步. 确定超前校正环节。让超前校正环节取得最大值的频率对准校正后系统的剪切频率, 即 $\omega_m = \omega_c$ 。根据

$$T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{\alpha}}$$

确定校正装置的转折频率, 进而确定校正环节的传递函数。

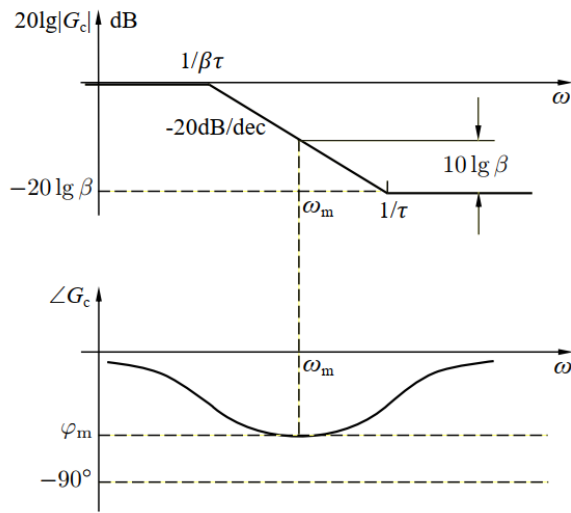
第 6 步. 检验系统的性能指标, 若不满足要求, 可增大 Δ 的值, 从第 3 步起重新计算。

超前校正环节性质



α	3	5	8	10	15	20	30	40	50	100	∞
φ_m	30°	41.8°	51°	55°	61°	64.8°	69.3°	72°	74°	78.6°	90°

迟后校正环节性质



传递函数

$$G_c(s) = \frac{\tau s + 1}{\beta \tau s + 1}, \quad \beta > 1$$

幅频特性

$$|G_c(j\omega)| = \frac{\sqrt{\tau^2 \omega^2 + 1}}{\sqrt{\beta^2 \tau^2 \omega^2 + 1}}$$

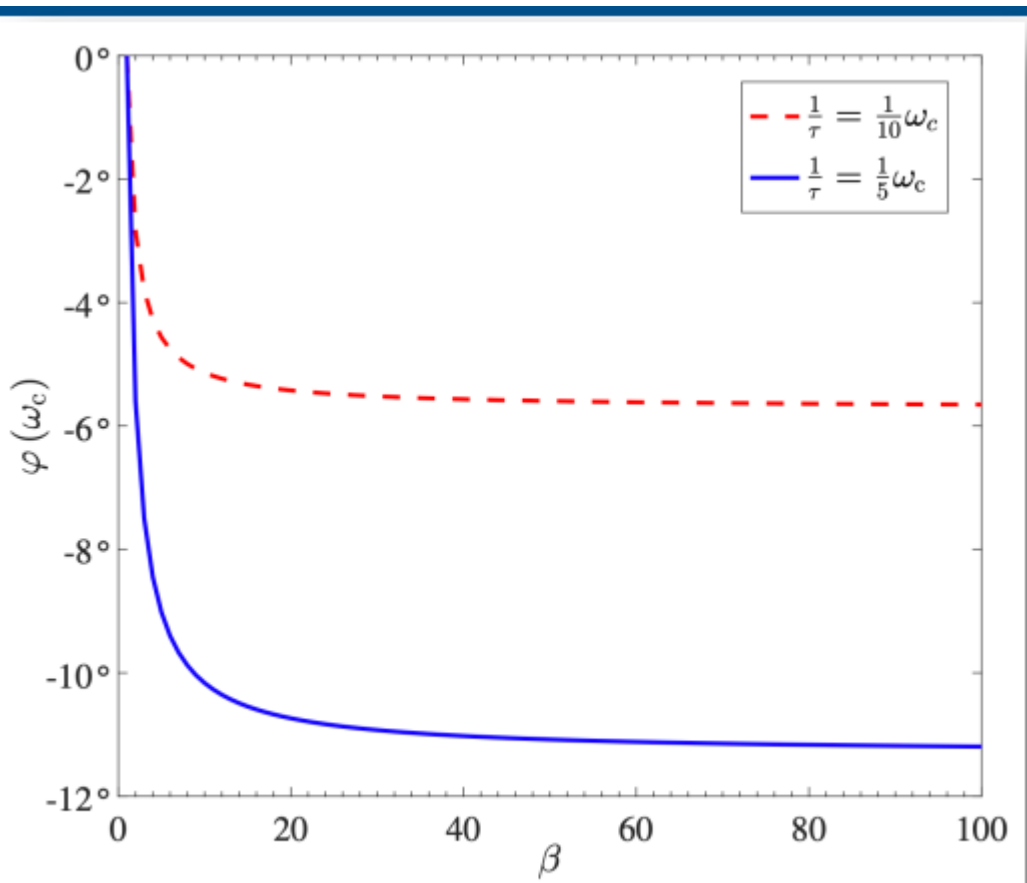


图 3.8: 迟后环节在剪切频率处的相角

设计方法 3.5: 剪切频率优先迟后校正设计

第 1 步. 按稳态性能的要求确定系统的型别与开环增益。

第 2 步. 利用已知的开环增益, 绘制未校正系统 $G_0(s)$ 的 Bode 图, 并计算未校正系统的剪切频率 ω_{c0} , 相角裕度 γ_0 和幅值裕度 L_{g0} 。

第 3 步. 根据剪切频率设计要求确定校正后系统的剪切频率 ω_c , 该剪切频率应该满足下式

$$180^\circ + \angle G_0(j\omega_c) > \gamma + \Delta$$

式中 γ 为要求的相角裕度, Δ 是考虑到迟后校正装置的相位延迟而附加的相角。

第 4 步. 根据下式确定校正装置的 β 值

$$20 \lg |G_0(j\omega_c)| - 20 \lg \beta = 0$$

第 5 步. 按下式确定迟后校正环节的参数 τ

$$\frac{1}{\tau} = \left(\frac{1}{5} \sim \frac{1}{10} \right) \omega_c$$

第 6 步. 校验校正后系统的相位裕度和其余性能指标。如不满足要求, 可增大 Δ 从第 3 步重新计算, 直到满足要求。



设计方法 3.4: 相位裕度优先迟后校正设计

第 1 步. 按稳态性能的要求确定系统的型别与开环增益。

第 2 步. 利用已知的开环增益, 绘制未校正系统 $G_0(s)$ 的 Bode 图, 并计算未校正系统的剪切频率 ω_{c0} , 相角裕度 γ_0 和幅值裕度 L_{g0} 。

第 3 步. 确定校正后系统的剪切频率 ω_c 。该剪切频率应该满足下式

$$180^\circ + \angle G_0(j\omega_c) = \gamma + \Delta$$

式中 γ 为要求的相角裕度, Δ 是由于校正装置产生的相位迟后效应而附加的相角。

第 4 步. 确定校正装置的 β 值。为了使校正后的系统在剪切频率 ω_c 处的幅频特性为 0dB, 应有

$$20 \lg |G_0(j\omega_c)| - 20 \lg \beta = 0$$

即

$$\beta = |G_0(j\omega_c)|$$

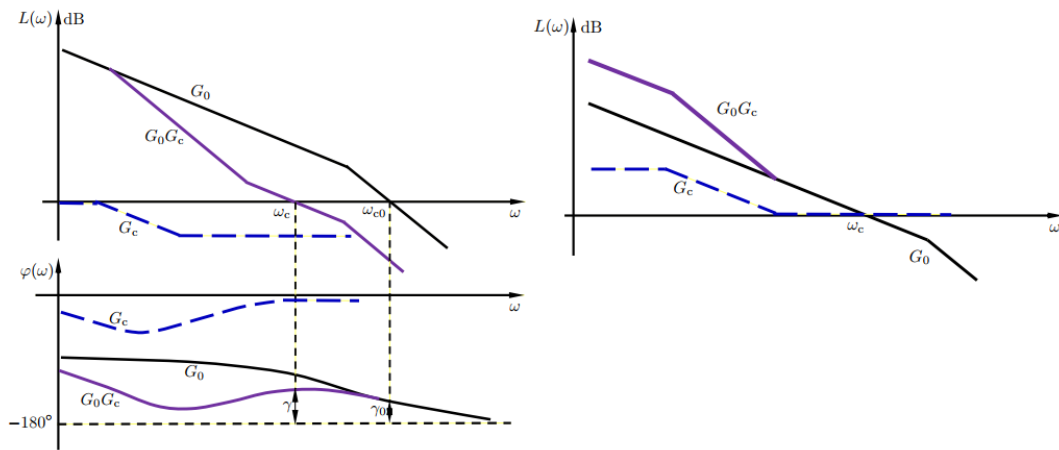
第 5 步. 确定迟后校正环节的参数 τ 。为了减小串联迟后校正对系统相位裕度的影响, 要求校正环节在剪切频率 ω_c 处的迟后相移在 $6^\circ \sim 12^\circ$ 以下, 应选择

$$\frac{1}{\tau} = \left(\frac{1}{5} \sim \frac{1}{10} \right) \omega_c$$

第 6 步. 校验校正后系统的相位裕度和其余性能指标。如不满足要求, 可增大 Δ 从第 3 步重新计算, 直到满足要求。



串联迟后校正



高频幅值衰减降低剪切频率
利用自身相位储备提高相位裕度

维持动态特性基本不变
提高稳态精度

$$G_c(s) = \frac{\tau s + 1}{\beta \tau s + 1}, \beta > 1$$

$$G_c(s) = \beta \frac{\tau s + 1}{\beta \tau s + 1}$$

设计方法 3.8: 迟后环节提高稳态精度的超前环节优先迟后-超前校正设计

第 1 步. 按稳态性能的要求确定系统的型别与开环增益 K 。利用已知的开环增益，绘制未校正系统 $G_0(s)$ 的 Bode 图，并计算未校正系统的剪切频率 ω_{c0} ，相角裕度 γ_0 和幅值裕度 L_{g0} 。

第 2 步. 对 $G_0(s)$ 仅仅改变开环增益，选择合适开环增益 K_1 使得所对应的系统 $G_{01}(s)$ 的剪切频率 ω_{c1} 小于所要求的剪切频率 ω_c 。

第3步. 对系统 $G_{01}(s)$ 进行超前校正确定超前校正环节 $G_{c1}(s)$ 的传递函数

$$G_{c1}(s) = \frac{\alpha Ts + 1}{Ts + 1}$$

为使最终校正系统的相角裕度达到设计要求，超前环节提供的超前相角 φ_m 为

$$\varphi_m = \gamma - \gamma_{01}(\omega_{cL}) + \Delta_1 + \Delta_2$$

式中 γ 为所要求的相角裕度， $\gamma_{01}(\omega_{cL})$ 是系统 $G_{01}(s)$ 在所要求的下限频率 $\omega = \omega_{cL}$ 处的相位储备， Δ_1 是考虑到校正装置影响剪切频率的位置而附加的相角， Δ_2 是为了抵消迟后校正环节所产生的相位延迟而附加的相角。参数 α 由下式确定

$$\alpha = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m}$$

未校正系统 $G_{01}(s)$ 的幅值由超前校正环节补偿，因此校正后系统的剪切频率 ω_c 由下式确定

$$20 \lg |G_{01}(\omega_c)| = -10 \lg \alpha$$

若所得到的剪切频率不满足要求，则增大 Δ_2 重新进行第3步操作。若仍不满足要求，返回第2步，适当增大开环增益 K_1 。若所得到的剪切频率 ω_c 满足要求，则使超前校正环节的最优频率 ω_m 位于 ω_c 处，即 $\omega_m = \omega_c$ 则超前校正环节的时间常数 T 为

$$T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{\alpha}}$$

第4步. 检验超前校正后系统 $G_1(s)$ 的动态性能，注意其相角裕度 γ_1 是否能补偿迟后环节的相位延迟。

第5步. 根据超前校正后的系统 $G_1(s) = G_{01}(s)G_{c1}(s)$ 确定迟后校正环节

$$\beta G_{c2}(s) = \beta \frac{\tau s + 1}{\beta \tau s + 1}$$

为了提高系统 $G_1(s)$ 的精度，取

$$\beta = \frac{K}{K_1}$$

按下式选择参数 τ

$$\frac{1}{\tau} = \left(\frac{1}{5} \sim \frac{1}{10} \right) \omega_c$$

第6步. 检验校正后系统 $G(s) = G_1(s)G_{c2}(s)$ 的性能指标。如果不满足，返回第2步。



设计方法 3.9: 迟后环节降低剪切频率的超前环节优先迟后-超前校正设计

第 1 步. 按稳态性能的要求确定系统的型别与开环增益。利用已知的开环增益, 绘制未校正系统 $G_0(s)$ 的 Bode 图, 并计算未校正系统的剪切频率 ω_{c0} , 相角裕度 γ_0 和幅值裕度 L_{g0} 。

第 2 步. 选取满足要求的剪切频率 ω_c , 确定超前校正环节 $G_{c1}(s)$ 的传递函数

$$G_{c1}(s) = \frac{\alpha Ts + 1}{Ts + 1}$$

为使最终校正系统的相角裕度达到设计要求, 超前环节提供的超前相角 φ_m 为

$$\varphi_m = \gamma - \gamma_0(\omega_c) + \Delta_1 + \Delta_2$$

式中 γ 为所要求的相角裕度, $\gamma_0(\omega_c)$ 是未校正系统在 $\omega = \omega_c$ 处的相位储备, Δ_1 是为保证足够的相角裕度而附加的相角, Δ_2 是为了抵消迟后校正环节所产生的相位延迟而附加的相角。参数 α 由下式确定

$$\alpha = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m}$$

使超前校正环节的最优频率 ω_m 位于 ω_c 处, 即 $\omega_m = \omega_c$ 则超前校正环节的时间常数 T 为

$$T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{\alpha}}$$

第 3 步. 根据超前校正后的系统 $G_1(s) = G_0(s)G_{c1}(s)$ 确定迟后校正环节

$$G_{c2}(s) = \frac{\tau s + 1}{\beta \tau s + 1}$$

为使校正后系统的剪切频率在 $\omega = \omega_c$ 处, 需要利用迟后校正的幅值衰减特性将 $G_1(s)$ 在 $\omega = \omega_c$ 的正幅值下拉到 0dB 线, 即

$$20 \lg \beta = 20 \lg |G_1(j\omega_c)|$$

为了减小串联迟后校正对系统相位裕度的影响, 要求校正环节在剪切频率 ω_c 处的迟后相移在 5° - 10° 以下, 应选择

$$\frac{1}{\tau} = \left(\frac{1}{5} \sim \frac{1}{10} \right) \omega_c$$

第 4 步. 检验校正后系统 $G(s) = G_1(s)G_{c2}(s)$ 的性能指标。如果不满足, 返回第 2 步。



设计方法 3.17: 期望频率特性校正设计

第 1 步. 根据稳态误差确定型别 ν 和开环增益 K , 并绘制未校正系统 $G_0(s)$ 的幅频特性。期望频率特性的低频段与未校正系统低频段相同, 即为

$$G_L(s) = \frac{K}{s^\nu}$$

第 2 步. 根据对系统的动态特性要求, 确定期望特性的中频段特性, 包括剪切频率、上限角频率和下限角频率, 并使其斜率为 -20dB/dec

第 3 步. 确定期望特性低频段和中频段的过渡特性, 其斜率一般取 -40dB/dec 。

第 4 步. 确定期望特性的高频段特性。高频段应尽量等于或平行于校正前的高频段。

第 5 步. 确定期望特性中频段和高频段的过渡特性, 其斜率一般取 -40dB/dec 。

第 6 步. 基于以上步骤确定期望频率特性 $G(s)$, 并检验性能指标。如不满足, 返回第 2 步重新设计。

第 7 步. 根据期望频率特性 $G(s)$ 和校正前的频率特性 $G_0(s)$ 确定校正装置的传递函数 $G_c = \frac{G(s)}{G_0(s)}$ 。



设计方法 3.14: 对称最佳方法确定中频段

$$\sigma_p = 0.16 + 0.4 \left(\frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right)$$

$$t_s = \frac{\pi}{\omega_c} \left[2 + 1.5 \left(\frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right) + 2.5 \left(\frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right)^2 \right]$$

$$h = \frac{1 + \sin \gamma}{1 - \sin \gamma}$$

$$\omega_2 \leq \frac{\omega_c}{\sqrt{h}}, \quad \omega_3 \geq \omega_c \sqrt{h}$$



设计方法 3.15: 剪切频率错位确定中频段

$$\sigma_p = 0.16 + 0.4 \left(\frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right)$$

$$t_s = \frac{\pi}{\omega_c} \left[2 + 1.5 \left(\frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right) + 2.5 \left(\frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right)^2 \right]$$

$$h = \frac{1 + \sin \gamma}{1 - \sin \gamma}$$

$$\omega_2 \leq \omega_c \frac{2}{h+1}, \quad \omega_3 \geq \omega_c \frac{2h}{h+1}$$



设计方法 3.16: 最小峰值法确定中频段

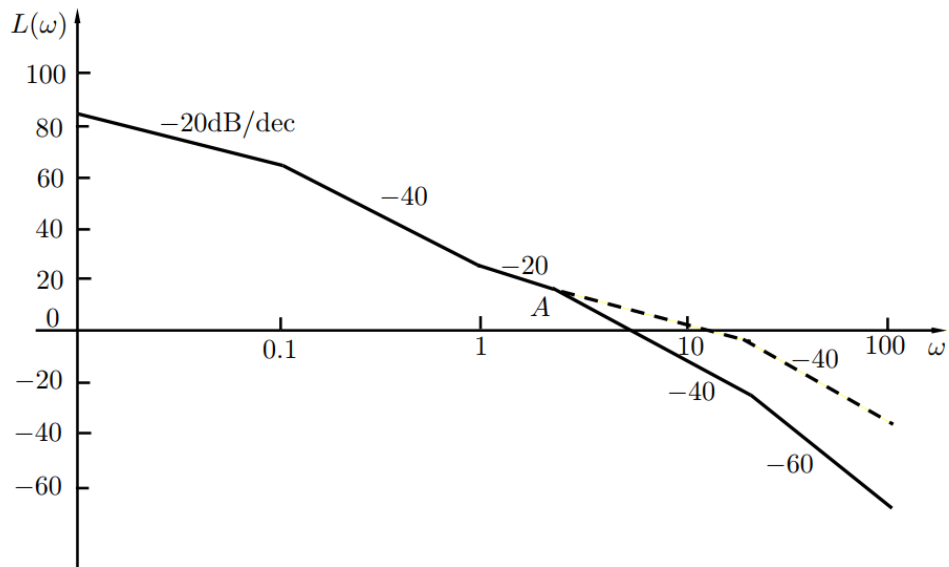
$$\sigma_p = 0.16 + 0.4(M_r - 1)$$

$$t_s = \frac{\pi}{\omega_c} \left[2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2 \right]$$

$$\omega_2 \leq \omega_c \frac{M_r - 1}{M_r}, \quad \omega_3 \geq \omega_c \frac{M_r + 1}{M_r}$$



反馈校正：去掉不希望折点



第 4 步. 围绕不希望折点 A 所对应的传递函数 $G_2(s)$, 建立局部位置反馈, 并令反馈系数为 β 。 $G_2(s)$ 是惯性环节, 其增益为 $K_2 = 10\text{s}^{-1}$, 时间常数 $T_2 = 0.5\text{s}$ 。引入位置反馈后的等效传递函数 $G'_2(s)$ 为

$$G'_2(s) = \frac{\frac{K_2}{1+\beta K_2}}{\frac{T_2}{1+\beta K_2}s + 1}$$

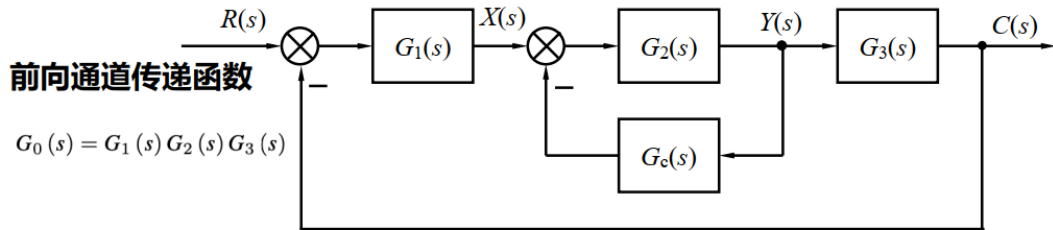
另该惯性环节的时间常数满足

$$\frac{1 + K_2\beta}{T_2} = 10\omega_c = 130$$

由此得 $\beta = 6.4$, 并得到局部反馈小闭环的传递函数 $G'_2(s)$ 是

$$G'_2(s) = \frac{10/65}{\frac{1}{130}s + 1} = \frac{0.154}{0.0077s + 1}$$

期望频率特性反馈校正



于是，校正系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_2(s) G_c(s)} \quad (3.11.3)$$

在满足 $20 \lg |G_2(j\omega) G_c(j\omega)| \ll 0$ 的频段，由式 (3.11.3) 可以看出校正系统的开环频率特性 $G(j\omega)$ 可近似写为

$$G(s) \approx G_0(s) \quad (3.11.4)$$

在满足 $20 \lg |G_2(j\omega) G_c(j\omega)| \gg 0$ 的频段内，由式 (3.11.3) 可以看出校正系统的开环频率特性 $G(j\omega)$ 可近似写为

$$G(s) \approx \frac{G_0(s)}{G_2(s) G_c(s)}$$

该式可等价地写为

$$G_2(s) G_c(s) \approx \frac{G_0(s)}{G(s)} \quad (3.11.5)$$

在反馈校正过程中，应当注意两点：一是在 $20 \lg |G_2(j\omega) G_c(j\omega)| > 0$ 的受校正频段内，应使

$$20 \lg |G_0(j\omega)| > 20 \lg |G_c(j\omega)|$$

上式大得越多，则校正精度越高。二是局部反馈回路必须稳定。

设计方法 3.19: 反馈校正的期望频率特性法

第 1 步. 按稳态性能指标要求，绘制待校正系统的开环对数幅频特性 $L_0(\omega)$ 。

第 2 步. 根据给定性能指标要求，绘制期望开环对数幅频特性 $L(\omega)$ 。

第 3 步. 由下式求得 $G_2(s) G_c(s)$ 的传递函数

$$20 \lg |G_2(j\omega) G_c(j\omega)| = L_0(\omega) - L(\omega),$$

第 4 步. 检验局部反馈回路的稳定性，并检查期望剪切频率附近 $|G_2(j\omega) G_c(j\omega)| > 1$ 的程度。

第 5 步. 由 $G_2 G_c$ 求 G_c 。

第 6 步. 检验校正后系统的性能指标是否满足要求。

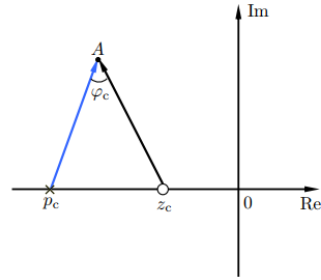
超前环节

超前网络传函为 $G_c(s) = K_c \frac{s - z_c}{s - p_c}$

给开环系统补充了一个零点和一个极点

$p_c < z_c < 0$ 极点总在零点左侧

超前网络产生的幅角 $\varphi_c = \varphi_z - \varphi_p > 0$



$$\sum_{j=1}^m \angle(A - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(A - p_i) = \pm(2l + 1)180^\circ, \quad l = 0, 1, 2 \dots$$

在增加 z_c 和 p_c 后, 显然有

$$\sum_{j=1}^m \angle(A - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(A - p_i) + [\angle(A - z_c) - \angle(A - p_c)] > (2l + 1)180^\circ$$

φ_c 不宜太大, 否则难以实现

超前网络会使系统根轨迹向左移动

设计方法 4.1: 基于根轨迹的超前校正设计

第 1 步. 根据性能指标要求, 确定闭环主导极点 s_1 的期望位置。

第 2 步. 画出未校正系统的根轨迹。如果根轨迹通过闭环主导极点的期望位置, 则简单调整开环增益即可产生期望的闭环极点。如果闭环主导极点的期望位置在根轨迹的左侧, 则采用超前校正。

第 3 步. 对于期望的闭环主导极点 s_1 , 按下式确定超前校正环节应产生的幅角 ϕ

$$\phi = (2l + 1)180^\circ - \angle G_0(s_1)$$

第 4 步. 按下式确定超前校正环节的零点 z_c 和极点 p_c

$$\angle(s_1 - z_c) - \angle(s_1 - p_c) = \phi$$

第 5 步. 根据根轨迹幅值条件, 按下式确定超前校正环节的增益 K_c

$$K_c = \frac{|z_c| |s_1 - p_c|}{|G_0(s_1)| |p_c| |s_1 - z_c|}$$

进而确定超前校正环节的传递函数为

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{s - z_c}{s - p_c}$$

第 6 步. 对于设计好的串联校正环节, 检查校正后系统的动态性能指标是否满足设计要求。如果不满足, 则需要调整主导极点的位置, 重复上述设计过程。



定理 4.1

给定具有阻尼角为 θ 的主导极点 s_1 ，若超前环节 (4.3.1) 在 s_1 处提供的超前角为 ϕ ，则超前环节 (4.3.1) 的一组零极点由下式确定

$$\begin{cases} p_c = -|s_1| \frac{\cos \frac{1}{2}(\phi - \theta)}{\cos \frac{1}{2}(\theta + \phi)} \\ z_c = -|s_1| \frac{\cos \frac{1}{2}(\phi + \theta)}{\cos \frac{1}{2}(\phi - \theta)} \end{cases} \quad (4.4.1)$$

幅值确定法

$$G_c(s) = \frac{\alpha T s + 1}{T s + 1} = \alpha \frac{s - z_c}{s - p_c}$$

$$\frac{1}{\tan \eta} = \alpha \frac{|s_1 - z_c|}{|s_1 - p_c|} \frac{1}{\sin \phi} - \frac{1}{\tan \phi}$$

$$\alpha \frac{|s_1 - z_c|}{|s_1 - p_c|} = \frac{M}{k}$$

$$M = \frac{|s_1^v| \cdot |s_1 - p_1| \dots |s_1 - p_{n-v}|}{|s_1 - z_1| \dots |s_1 - z_m|}$$

$$\frac{1}{\tan \eta} = \frac{M}{k} \frac{1}{\sin \phi} - \frac{1}{\tan \phi} \quad (4.4.7)$$

按式 (4.4.7) 计算出 η 后，可由 $\Delta z_c 0 s_1$ 求得

$$|z_c| = \omega_n \frac{\sin \eta}{\sin \delta} \quad (4.4.8)$$

由 $\Delta p_c 0 s_1$ 求得

$$|p_c| = \omega_n \frac{\sin(\phi + \eta)}{\sin(\delta - \phi)} \quad (4.4.9)$$

式中 $\delta = 180^\circ - \eta - \theta$ ， $\theta = \arccos \xi$ ， ξ 与 ω_n 分别是基于二阶系统决定闭环主导极点 s_1 在 s 平面位置的阻尼比和无阻尼自振角频率。

开环偶极子对根轨迹的影响

$$G_c(s) = K_c \frac{s - z_c}{s - p_c}$$

$$G(s)H(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1)}{s^v \prod_{j=1}^n (T_j s + 1)} = k \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{s \prod_{j=1}^n (s - p_j)} \longrightarrow K = k \frac{\prod_{i=1}^m (-z_i)}{\prod_{j=1}^n (-p_j)}$$

其开环增益为 $K_c = \frac{-z_c}{-p_c}$ 。增加偶极子后的开环传递函数为

$$G(s)H(s)G_c(s) = k \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{s \prod_{j=1}^n (s - p_j)} \frac{s - z_c}{s - p_c}$$

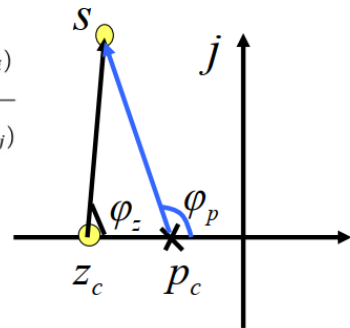
其所对应的开环增益为

$$K_* = k \frac{\prod_{i=1}^m (-z_i)}{\prod_{j=1}^n (-p_j)} \frac{-z_c}{-p_c}$$

结合式 (4.2.2) 可得

$$K_* = K \frac{z_c}{p_c}$$

该式表明，加入偶极子后，系统的开环增益发生了变化。适当选择偶极子的位置能极大地提高系统的静态性能。



迟后校正

设计方法 4.2: 基于根轨迹的迟后校正

第 1 步. 用原系统的开环传递函数 $G_0(s)$ 做出原系统的根轨迹, 确认调整开环增益可以使原系统的动态性能满足设计指标。

第 2 步. 在原系统的根轨迹上确定闭环主导极点 s_1 , 并求出点 s_1 对应的开环增益 K_0 。

第 3 步. 根据控制系统的设计要求, 求出满足稳态误差设计指标的开环增益 K , 即校正以后应有的开环增益。

第 4 步. 为了使点 s_1 的开环增益 K_0 增大到 K , 则有

$$\beta = \frac{K}{K_0} \quad (4.5.2)$$

按照串联迟后校正的条件, 极点 p_c 和零点 z_c 应充分接近并靠近原点, 按照

$$\beta = \frac{z_c}{p_c}$$

可以确定校正环节的零极点值。至此, 串联迟后校正环节的参数全部计算完成。

第 5 步. 绘制出校正后的根轨迹图, 检验系统的动态性能指标和静态稳态性能指标。♥

迟后-超前校正

- 串联超前校正的作用在于改善系统的动态性能
- 串联迟后校正的作用在于减小系统的稳态误差

设计方法 4.3: 基于根轨迹的迟后-超前校正设计

第 1 步. 根据期望性能指标的要求, 确定满足要求的闭环主导极点的候选区域。

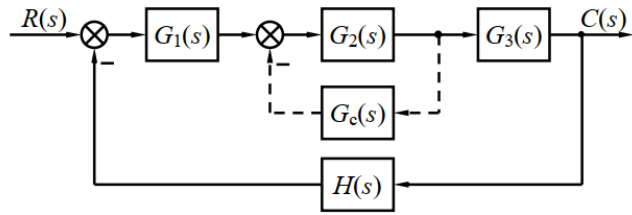
第 2 步. 确定超前部分: 作出校正前系统的根轨迹。若根轨迹未穿过候选区域, 则修改初选期望闭环主导极点的位置。合理选择超前校正零、极点, 使其穿过期望主导极点。

第 3 步. 校验系统响应动态性能是否满足要求, 不满足则可适当右移校正环节的零点和 (或) 左移其极点, 使系统根轨迹进一步左移, 绘制相应根轨迹, 并重新选择裕度更大的闭环系统主导极点。

第 4 步. 确定滞后部分: 对新选主导极点, 按幅值条件求出校正后系统的根轨迹增益 k 以及静态误差系数, 检验系统稳态精度是否满足要求。若不满足要求, 则根据稳态误差要求确定滞后校正零、极点的位置。

第 5 步. 迟后校正后, 原主导极点位置可能发生变化。此时, 应绘制迟后-超前校正后系统根轨迹, 判断系统动、静态性能是否满足要求。♥

反馈校正



设计方法 4.4: 局部反馈校正的根轨迹法

- 第 1 步. 做出未进行局部反馈的原系统的根轨迹。
- 第 2 步. 求出满足设计要求的闭环主导极点的位置 s_1 和 s_2 。
- 第 3 步. 在系统的开环极点中, 找出希望改变位置的开环极点 p_c , 当改变 p_c 的位置时, 可以使根轨迹通过 s_1 和 s_2 点。
- 第 4 步. 检验围绕 p_c 是否可以建立局部反馈。即在实际问题中, p_c 所在元件的输出变量是否可以测量; p_c 所在元件的输入变量是否可以实现相加。
- 第 5 步. 为使闭环主导极点达到 s_1 和 s_2 , 按照根轨迹的幅角条件, 求出极点 p_c 的希望位置 \bar{p}_c 。
- 第 6 步. 求出使小闭环的闭环极点成为 \bar{p}_c 的条件, 从而确定小闭环的参数。
- 第 7 步. 对于大闭环, 求出主导极点 s_1 和 s_2 所对应的开环增益 K , 调整大回路中的放大倍数, 使大闭环的主导极点为 s_1 和 s_2 。
- 第 8 步. 进行必要的验算。

双线性变换

前面所述的两种一阶差分方法可以认为是对 s 域到 z 域的精确变换关系式 $z = e^{sT}$ 的近似。对 $z = e^{sT}$ 再考虑另外一种近似。将 $e^{\frac{sT}{2}}$ 和 $e^{-\frac{sT}{2}}$ 在 $s = 0$ 处 Taylor 展开可得

$$e^{\frac{sT}{2}} = 1 + \frac{sT}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{sT}{2}\right)^2 + \dots$$

$$e^{-\frac{sT}{2}} = 1 - \frac{sT}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{sT}{2}\right)^2 + \dots$$

这两项都取前两项近似可得

$$z = e^{sT} = \frac{e^{\frac{sT}{2}}}{e^{-\frac{sT}{2}}} \approx \frac{1 + \frac{T s}{2}}{1 - \frac{T s}{2}} = \frac{\frac{2}{T} + s}{\frac{2}{T} - s}$$

进而可以得到

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (6.1.7)$$

于是, 连续校正装置的传递函数 $D(s)$ 可离散化为

$$D(z) = D(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}} \quad (6.1.8)$$

该离散化方法称为双线性变换。

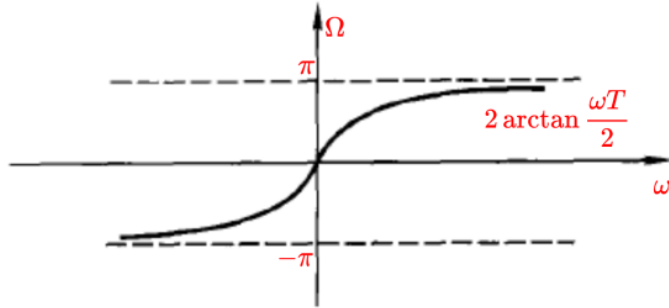
数字频率 Ω 和模拟频率 ω 的关系

- 在单位圆上有 $z = e^{j\Omega}$,

- $e^{j\Omega} = \frac{1+j\frac{\omega T}{2}}{1-j\frac{\omega T}{2}}$

- $\Omega = 2 \arctan \frac{\omega T}{2}$

- $\omega = \frac{2}{T} \tan \left(\frac{\Omega}{2} \right)$



根匹配法

在连续和离散传递函数的对应关系 (6.1.14) 和 (6.1.15) 中, 在 z 域中使用的是关于 z 的有理式。在很多场合, 也适用关于 z^{-1} 的有理式。也即是说, 连续传递函数 $D(s)$ 中的项 $(s+a)$ 与离散传递函数 $D(z)$ 中的项 $(1-e^{-aT}z^{-1})$ 对应。对于实数零极点情形, 有如下对应

$$(s+a) \rightarrow 1 - e^{-aT}z^{-1} \quad (6.1.16)$$

对于复共轭零极点情形, 有如下对应

$$(s+a)^2 + b^2 \rightarrow (1 - 2z^{-1}e^{-aT} \cos bT + z^{-2}e^{-2aT}) \quad (6.1.17)$$

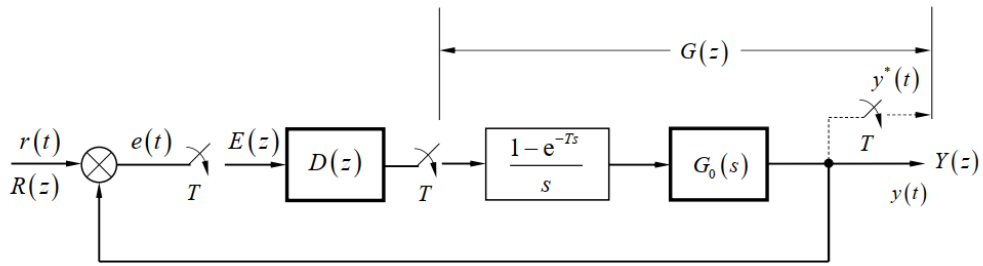
$$\begin{cases} GH(z) = \frac{1}{(z-1)^v} GH_0(z) \\ \lim_{z \rightarrow 1} GH_0(z) = K \end{cases}$$

型别	静态误差系数			稳态误差计算		
	$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} GH(z)$	$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)GH(z)$	$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 GH(z)$	$r = A \cdot 1(t)$ $e_{ss}^*(\infty) = \frac{A}{1+k_p}$	$r = A \cdot t$ $e_{ss}^*(\infty) = \frac{AT}{k_v}$	$r = A \cdot t^2/2$ $e_{ss}^*(\infty) = \frac{AT^2}{k_a}$
0	K_p	0	0	$\frac{A}{1+K_p}$	∞	∞
I	∞	K_v	0	0	$\frac{AT}{K_v}$	∞
II	∞	∞	K_a	0	0	$\frac{AT^2}{K_a}$

考虑到经采样后离散信号的频谱与原连续信号频谱在幅值上相差 $\frac{1}{T}$ 倍，所以零阶保持器对系统的影响可近似为一个惯性环节，即

$$H_0(s) \approx \frac{1}{\frac{T}{2}s + 1}$$

$$\varepsilon^*(s) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon(s - jk\omega_s)$$



$$G(z) = Z \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_0(s) \right]$$

$$\Phi(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)}$$

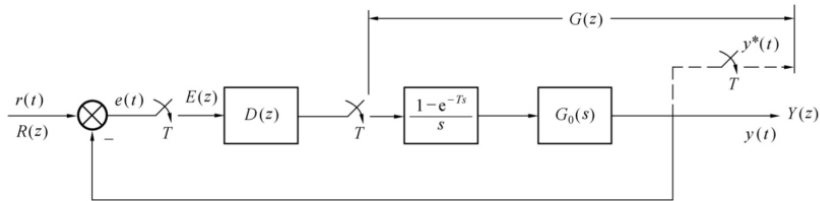
$$\Phi_e(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + D(z)G(z)}$$

$$D(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)[1 - \Phi(z)]}$$

$$D(z) = \frac{1 - \Phi_e(z)}{G(z)[1 - \Phi_e(z)]}$$

$$\Phi(z) = 1 - \Phi_e(z), \quad \Phi_e(z) = 1 - \Phi(z)$$

最少拍设计: 对典型信号能在有限拍内结束过渡过程



$$Z[1(t)] = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$Z[t] = \frac{Tz}{(z-1)^2} = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

$$Z\left[\frac{1}{2}t^2\right] = \frac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3} = \frac{T^2z^{-1}(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})^3}$$

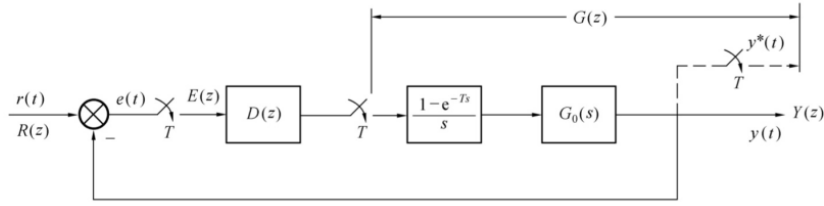
$$E(z) = \Phi_e(z) \frac{A(z)}{(1-z^{-1})^r}$$

$$e_{ss}^*(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \frac{A(z)}{(1-z^{-1})^r} \Phi_e(z)$$

$$e_{ss}^*(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \frac{A(z)}{(1-z^{-1})^r} \Phi_e(z) = 0$$

闭环误差传递函数 $\Phi_e(z) = (1-z^{-1})^r F(z)$

最少拍设计: 对典型信号能在有限拍内结束过渡过程



$$E(z) = \Phi_e(z)R(z) = (1 - z^{-1})^r F(z) \frac{A(z)}{(1 - z^{-1})^r} = F(z)A(z)$$

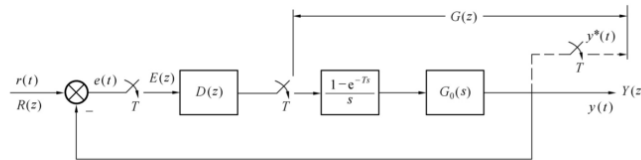
$$Y(z) = \Phi(z)R(z) = [1 - \Phi_e(z)]R(z) = R(z) - F(z)A(z)$$

为使得在最少的几拍内结束过渡过程，在采样点上无稳态误差，要求误差信号的脉冲序列 $e^*(t)$ 只含有最少的几项。若经过 N 拍过渡过程结束，在采样点上无稳态误差，则误差脉冲序列为

$$e^*(t) = e(0)\delta(t) + e(T)\delta(t - T) + \dots + e(NT)\delta(t - NT)$$

$$E(z) = e(0) + e(T)z^{-1} + \dots + e(NT)z^{-N}$$

■ 广义脉冲传递函数不含纯延迟环节和单位圆上和圆外的零极点



$$E(z) = \Phi_e(z)R(z) = (1 - z^{-1})^r F(z) \frac{A(z)}{(1 - z^{-1})^r} = F(z)A(z)$$

$$Y(z) = \Phi(z)R(z) = [1 - \Phi_e(z)]R(z) = R(z) - F(z)A(z)$$

$$F(z) = 1$$

$$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^r$$

$$\Phi(z) = 1 - (1 - z^{-1})^r$$

表 6.1: 最少拍系统的闭环脉冲传递函数及调整时间

典型输入		闭环脉冲传递函数		调整时间
$r(t)$	$R(z)$	$\Phi(z)$	$\Phi_e(z)$	t_s
$1(t)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	z^{-1}	$1 - z^{-1}$	T
t	$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$2z^{-1} - z^{-2}$	$1 - 2z^{-1} + z^{-2}$	$2T$
$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{T^2z^{-1}(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})^3}$	$3z^{-1} - 3z^{-2} + z^{-3}$	$(1 - z^{-1})^3$	$3T$

最少拍无差控制器脉冲传递函数 $D(z) = \frac{1 - (1 - z^{-1})^r}{(1 - z^{-1})^r G(z)}$

设计方法 6.1: 离散化设计的设计原则

- (1) $\Phi(z)$ 应含有与 $G(z)$ 在单位圆上、圆外零点相同的零点。
- (2) $\Phi_e(z)$ 应含有与 $G(z)$ 在单位圆上、圆外极点相同的零点。
- (3) 考虑到 $\Phi(z) = 1 - \Phi_e(z)$, $\Phi(z)$ 应与 $\Phi_e(z)$ 是阶次相同的 z^{-1} 的多项式。



基于状态空间的时域分析

由于状态的引入，人们从只关注系统输入输出的古典控制理论阶段，过渡到以状态空间模型为基础的、关注内部状态的现代控制理论阶段。

➤ 线性定常非齐次系统状态方程的解

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) & x(t_0) &= x_0, & t &\geq t_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

初始状态引起的响应, 零输入响应

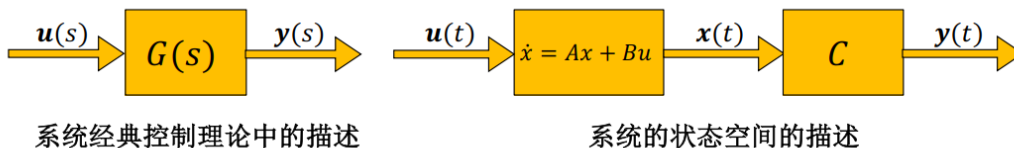
输入引起的响应, 零状态响应

能控性和能观测性

在现代控制理论中，能控性和能观测性是两个重要的概念。它是最优控制和最优估计的理论基础。能控性及能观测性概念是 R·E·Kalman 首先提出的。简单地说，

- 能控性是控制作用 $u(t)$ 支配系统的状态向量 $x(t)$ 的能力；
- 能观测性是系统的输出 $y(t)$ 反映系统状态向量 $x(t)$ 的能力。

前者回答 $u(t)$ 能否使 $x(t)$ 作任意转移的问题，后者则回答能否通过 $y(t)$ 的量测确定状态 $x(t)$ 的问题。



$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (8.1.4)$$

定义 8.7: 能控状态

对于线性定常系统 (8.1.4), 如果存在一时刻 $t_1 > 0$ 和一个无约束的容许控制 $u(t), t \in [0, t_1]$, 使得系统在这个控制的作用下, 系统由 x_0 出发经过时间 t_1 后由 x_0 转移到 $x(t_1) = 0$, 则称此 x_0 是系统的一个能控状态。

定义 8.8: 系统能控性

对于线性定常系统 (8.1.4), 如果状态空间中的所有非零状态都是能控状态, 则称系统 (8.1.4) 是能控的。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (8.1.4)$$

定义 8.9: 能达状态

对于线性定常系统 (8.1.4), 如果存在一时刻 $t_1 > 0$ 和一个无约束的容许控制 $u(t), t \in [0, t_1]$, 使得系统在这个控制的作用下, 系统由零初始状态出发经过时间 t_1 后转移到 $x(t_1) = x_f$, 则称此 x_f 是系统的一个能达状态。

定义 8.10: 系统能达

对于线性定常系统 (8.1.4), 如果状态空间中的所有非零状态都是能达状态, 则称系统 (8.1.4) 是能达的。

定理 8.1

线性定常系统 (8.2.1) 是能控的当且仅当存在时刻 $t_1 > 0$, 使 Gram 矩阵

$$W_c(t_1) = \int_0^{t_1} e^{-At} B B^T e^{-A^T t} dt \quad (8.2.2)$$

是非奇异的。

定理 8.2

线性定常系统 (8.2.1) 是能达的当且仅当存在时刻 $t_1 > 0$, 使式 (8.2.2) 中的 Gram 矩阵 $W_c(t_1)$ 是非奇异的。

定理 8.3

线性定常系统 (8.2.1) 能控的充分必要条件是

$$\text{rank} [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B] = n \quad (8.2.19)$$

其中 n 是矩阵 A 的维数。

能控性判据——PBH判据

定理 8.4

线性定常系统 (8.2.1) 是能控的当且仅当系统矩阵 A 的所有特征值 $\lambda_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$ 满足

$$\text{rank} [\lambda_i I - A \quad B] = n \quad (8.2.27)$$

或可以等价地表示为

$$\text{rank} [sI - A \quad B] = n, \quad \forall s \in C \quad (8.2.28) \heartsuit$$

状态变量的线性变换

通过一个**非奇异线性变换**关联起来的两个状态空间模型是**等价的**。

数学描述:

给定系统 $\Sigma(A, B, C, D)$, 引入线性变换

$$\bar{x} = Tx$$

其中, T 为 $n \times n$ 的**非奇异矩阵**, 则可以得到系统 $\bar{\Sigma}(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$

$$\bar{A} = TAT^{-1}, \bar{B} = TB,$$

$$\bar{C} = CT^{-1}, \bar{D} = D$$

$$\bar{x}(0) = Tx(0)$$

我们称系统 Σ 和系统 $\bar{\Sigma}$ 是**等价的**。

用途: 通过线性变换, 可将状态方程变成对角线或约当标准型 (或其他标准型)。

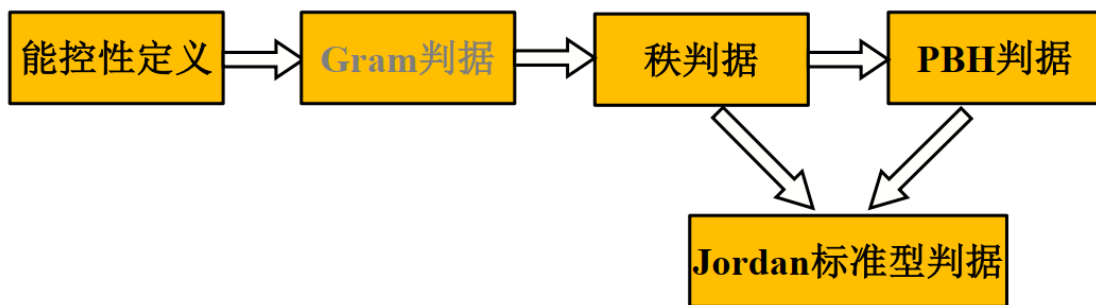
定理 8.5

给定线性定常系统 (8.2.1), 通过非奇异状态变换 $x = P\bar{x}$ 后的系统为 (8.2.39), 则有

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \dots & \bar{A}^{n-1}\bar{B} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

其中 n 为系统状态变量的维数。 \heartsuit

能控性判据	优点	缺点
Gram判据	有重要的理论意义	工程上不适用
秩判据	简单实用	只能给出一个整体的结论
PBH判据	能给出与每一个特征根相关的能控性信息	要计算 n 个矩阵的秩



$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \quad (8.4.11)$$

定义 8.14: 能观状态

对于线性定常系统 (8.4.11), 如果对于初始时刻 $t = 0$ 的一个非零的初始状态 x_0 , 存在一个有限的时刻 $t_1, t_1 > 0$, 使得由区间 $[0, t_1]$ 上的系统的输出 $y(t)$ 可以唯一地决定系统的初始状态 x_0 , 则称该状态 x_0 是能观的。

对应地, 定常系统的能观性可以如下定义

定义 8.15: 系统能观性

对于线性定常系统 (8.4.11), 如果状态空间中的所有非零状态都是能观状态, 则称系统 (8.4.11) 是能观的。

考察线性定常连续系统的状态方程

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \quad (8.5.1)$$

式中 x 是 n 维状态向量; y 是 m 维输出向量; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 是常矩阵, 分别为系统矩阵和输出矩阵。

定理 8.9

线性定常连续系统 (8.5.1) 能观的充分必要条件是, 存在有限时刻 $t_1 > 0$, 使 Gram 矩阵

$$W_o(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{A t} dt \quad (8.5.2)$$

是非奇异的。

定理 8.10

线性定常系统 (8.5.1) 能观的充分必要条件是

$$\text{rank } Q_o = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (8.5.6)$$

或

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix} = n \quad (8.5.7)$$

PBH秩判据和特征向量判据

定理 8.11

线性定常系统 (8.5.1) 完全能观的充分必要条件是, 对矩阵 A 的所有特征值 $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$, 均有

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ \lambda_i I - A \end{bmatrix} = n \quad (8.5.8)$$

或等价地表示为

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ sI - A \end{bmatrix} = n \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad (8.5.9)$$

定理 8.12

线性定常连续系统 (8.5.1) 完全能观的充分必要条件是, A 没有与 C 的所有行相正交的非零右特征向量。即对 A 的任一特征值 $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$, 同时满足

$$A\alpha = \lambda_i\alpha, \quad C\alpha = 0$$

的特征向量 $\alpha \equiv 0$ 。

定理 8.13

给定线性定常系统 (8.5.1), 通过非奇异状态变换 $x = P\bar{x}$ 后的系统为 (8.5.10), 则有

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

其中 n 为系统状态变量的维数。

定理 8.14

线性定常系统 (8.5.1) 完全能观的充分必要条件分两种情况。

(1) 当矩阵 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 两两相异时, 由系统 (8.5.1) 经线性变换导出的对角线规范型为

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \bar{x} \\ y &= \bar{C}\bar{x} \end{aligned} \quad (8.5.11)$$

则系统 (8.5.1) 完全能观当且仅当 \bar{C} 不包含元素全为零的列。

(2) 线性定常系统 (8.5.1) 系数矩阵 A 的互异的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$ 。假设矩阵 A 可以写

成 Jordan 标准型的形式, 并将输出矩阵写成相应维数的分块矩阵形式, 如

$$A = \begin{bmatrix} J_{11} & & & & & \\ & J_{12} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & J_{1q_1} & & \\ & & & & J_{21} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & J_{l1} \\ & & & & & & & J_{l2} \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & J_{lq_l} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1q_1} & c_{21} & \cdots & c_{l1} & c_{l2} & \cdots & c_{lq_l} \end{bmatrix}$$

式中 q_i 为特征值 λ_i 所对应的 Jordan 小块的个数, 也称为 λ_i 的几何重数。则系统完全能观的充要条件是分块矩阵 $c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{iq_i}$ 的第一列线性无关, 对于 $i = 1, 2, \dots, l$ 中的每一个 i 分别成立。

对偶性原理

$$W_c(t_1) = \int_0^{t_1} e^{-At} B B^T e^{-A^T t} dt$$

$$W_o(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt$$

完全能控性条件	完全能观性条件
Gram 矩阵 $W_c(t_1)$ 满秩	Gram 矩阵 $W_o(t_1)$ 满秩
能控性矩阵 Q_c 满秩	能观性矩阵 Q_o 满秩
$\text{rank} [\lambda_i I - A \quad B] = n$	$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ \lambda_i I - A \end{bmatrix} = n$
当 A 为对角阵，且特征值两两互异时， B 无全零行	当 A 为对角阵，且特征值两两互异时， C 无全零列
当 A 为 Jordan 型时，所有 q_i 组输入矩阵的最后一行构成的行向量线性无关	当 A 为 Jordan 型时，所有 q_i 组输入矩阵的第一列构成的列向量线性无关

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}$$

完全能观，则其对偶系统

$$\dot{z} = A^T z + C^T v$$

完全能控。同样地，若系统

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

完全能控，则其对偶系统

$$\begin{cases} \dot{z} = A^T z \\ w = B^T z \end{cases}$$

完全能观。这被称为线性系统地对偶性原理。利用对偶性原理，一个系统的能观性可由其对偶系统的能控性来检验，反之亦然。

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix}$$

定理 8.13: 第一能控性规范型

给定单输入单输出能控性系统 (8.6.1), 其系统的特征多项式如式 (8.6.3) 所示, 其能控性矩阵 Q_c 如式 (8.6.4) 所示。则在状态变换 $\bar{x} = Q_c^{-1}x$ 下, 系统 (8.6.1) 可转换为如下第一能控规范型

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A_c \bar{x} + b_c u \\ y = c_c \bar{x} \end{cases}$$

其中

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.6.5)$$

$$c_c = cQ_c = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}] \quad (8.6.6)$$

$$\beta_i = cA^i b \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (8.6.7) \heartsuit$$

定理 8.16: 第二能控规范型

给定单输入单输出能控性系统 (8.6.1), 其系统的特征多项式如式 (8.6.3) 所示, 其对应的 Hankel 矩阵 H_A 如式 (8.6.9) 所示, 其能控性矩阵 Q_c 如式 (8.6.4) 所示。令 $P = Q_c H_A$, 则在状态变换 $\bar{x} = P^{-1}x$ 下, 系统 (8.6.1) 可转换为如下第二能控规范型

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A_c \bar{x} + b_c u \\ y = c_c \bar{x} \end{cases} \quad (8.6.11)$$

其中

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8.6.12)$$

$$c_c = cP = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}] \quad (8.6.13)$$

而参数 $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ 由下式确定

$$\begin{cases} \beta_{n-1} = cb \\ \beta_{n-1} = cAb + \alpha_{n-1}cb \\ \vdots \\ \beta_1 = cA^{n-2}b + \alpha_{n-1}cA^{n-3}b + \cdots + \alpha_2cb \\ \beta_0 = cA^{n-1}b + \alpha_{n-1}cA^{n-2}b + \cdots + \alpha_1cb \end{cases} \quad (8.6.14) \heartsuit$$

推论 8.1

设系统 (8.6.1) 完全能控, 其系统的特征多项式如式 (8.6.3), 而系数 $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ 由式 (8.6.13) 给出, 则其传递函数为

$$W(s) = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_0} \quad (8.6.15) \heartsuit$$

定理 8.17: 第一能观规范型

给定单输入单输出能观性系统 (8.6.1), 其系统的特征多项式如式 (8.6.3) 所示, 其能观性矩阵 Q_o 如式 (8.6.16) 所示。则在状态变换 $\tilde{x} = Q_o x$ 下, 系统 (8.6.1) 可转换为如下第一能观规范型

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tilde{x} \end{aligned}$$

其中常数 $\beta_i, i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ 由下式给出

$$\beta_i = cA^i b \quad b_c = Q_o b$$



定理 8.18: 第二能观规范型

给定单输入单输出能观性系统 (8.6.1), 其系统的特征多项式如式 (8.6.3) 所示, 其对应的 Hankel 矩阵 H_A 如式 (8.6.9) 所示, 其能观性矩阵 Q_c 如式 (8.6.16) 所示。令 $Q = H_A Q_o$, 则在状态变换 $\tilde{x} = Qx$ 下, 系统 (8.6.1) 可转换为如下第二能观规范型

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{x} \end{aligned}$$

其中常数 $\beta_{n-1}, \dots, \beta_1, \beta_0$ 由下式确定

$$\begin{cases} \beta_{n-1} = cb \\ \beta_{n-2} = cAb + \alpha_{n-1}cb \\ \vdots \\ \beta_1 = cA^{n-2}b + \alpha_{n-1}cA^{n-3}b + \cdots + \alpha_2cb \\ \beta_0 = cA^{n-1}b + \alpha_{n-1}cA^{n-2}b + \cdots + \alpha_1cb \end{cases} \quad (8.6.18)$$



设计方法 8.1: 能控性结构分解

第 1 步. 列写系统 (8.7.8) 的能控性矩阵

$$Q_c = [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B]$$

并求取 $\text{rank}Q_c = k$ 。

第 2 步. 在能控性矩阵 Q_c 中选取 k 个线性无关的列向量 l_1, l_2, \dots, l_k , 再在 \mathbb{R}^n 中选取与向量组 $\{l_1, \dots, l_k\}$ 线性无关的 $(n-k)$ 个列向量 l_{k+1}, \dots, l_n 。

第 3 步. 按以下方式构成变换阵

$$P = [l_1 \quad l_2 \quad \cdots \quad l_k \quad l_{k+1} \quad \cdots \quad l_n] \quad (8.7.10)$$

第 4 步. 按以下方式计算变换后的系统矩阵

$$\bar{A} = P^{-1}AP, \quad \bar{B} = P^{-1}B, \quad \bar{C} = CP$$

变换后的系统为

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ y = \bar{C}\bar{x} \end{cases}$$



定理 8.19: 能控性结构分解

给定 n 维线性定常系统 (8.7.8), 其能控性矩阵为 Q_c , 且有 $\text{rank}Q_c < n$. l_1, l_2, \dots, l_k 是 Q_c 中 k 个线性无关的列向量, l_{k+1}, \dots, l_n 是与向量组 $\{l_1, \dots, l_k\}$ 线性无关的 $(n-k)$ 个线性独立的列向量, 并令变换矩阵 P 由式 (8.7.10) 给出. 则状态变换 $\hat{x} = P^{-1}x$ 可将系统 (8.7.8) 转化为按能控性分解的规范形式

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_c \\ \dot{\hat{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_c & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_c \\ \hat{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & \hat{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_c \\ \hat{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (8.7.11)$$

并且有如下结论:

- (1) (\hat{A}_c, \hat{B}_c) 是完全能控的;
- (2) 子系统 $\Sigma(\hat{A}_c, \hat{B}_c, \hat{C}_1)$ 的传递函数等于整个系统的传递函数, 即

$$\hat{C}_1 (sI - \hat{A}_c)^{-1} \hat{B}_c = C(sI - A)^{-1}B \quad (8.7.12)$$



说明 8.1

从式 (8.7.11) 可以看出, 在系统的能控性分解中, 系统被分解为完全能控和完全不能控的两个子系统。其中, k 维的能控子系统如下

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_c = \bar{A}_c \bar{x}_c + \bar{A}_{12} \bar{x}_{\bar{c}} + \bar{B}_c u \\ y_1 = \bar{C}_c \bar{x}_c \end{cases} \quad (8.7.19)$$

不能控部分为 $n-k$ 维的子系统

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_{\bar{c}} = \bar{A}_{\bar{c}} \bar{x}_{\bar{c}} \\ y_2 = \bar{C}_{\bar{c}} \bar{x}_{\bar{c}} \end{cases} \quad (8.7.20)$$

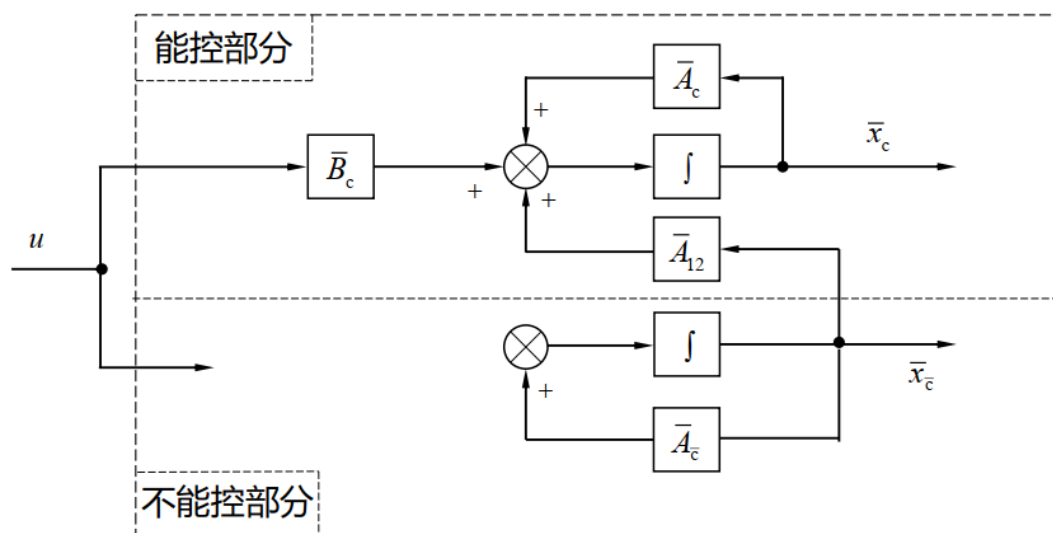
而 $y = y_1 + y_2$ 。

说明 8.2

对于原系统 (8.7.8) 和变换后的系统 (8.7.11) 有

$$\begin{aligned} \det(sI - A) &= \det(sI - \bar{A}) = \det \begin{bmatrix} sI - \bar{A}_c & -\bar{A}_{12} \\ 0 & sI - \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \\ &= \det(sI - \bar{A}_c) \det(sI - \bar{A}_{\bar{c}}) \end{aligned}$$

上式表明, 不完全能控系统 (8.7.8) 的特征值由两部分组成: 一部分为 \bar{A}_c 的特征值, 称为系统的能控振型; 另一部分 $\bar{A}_{\bar{c}}$ 的特征值, 称为系统的不能控振型。在第九章的系统综合中可以看出, 外输入 u 的引入只能改变能控振型的位置, 而不能改变不能控振型的位置。



说明 8.3

设计算法 8.7.1 给出的能控性结构分解算法, 需要先选取能控性矩阵 Q_c 中的 $\text{rank} Q_c$ 个线性无关的列。然而, 在实际计算中, 找出这些线性无关的列并不是容易的事。由定理 8.7.1 的证明过程可以看出, 只需找出能控性矩阵 Q_c 的列向量空间的一组基即可。这可以通过对能控性矩阵 Q_c 进行初等列变换得到。

设计方法 8.2: 能观性结构分解

第 1 步. 列写系统 (8.7.23) 的能观性矩阵

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

并求取 $\text{rank} Q_o = k$ 。

第 2 步. 在能观性矩阵 Q_o 中选取 k 个线性无关的行向量 $v_1^T, v_2^T, \dots, v_k^T$, 再在 \mathbb{R}^n 中选取与向量组 $\{v_1^T, v_2^T, \dots, v_k^T\}$ 线性无关的 $(n-k)$ 个行向量 $v_{k+1}^T, v_{k+2}^T, \dots, v_n^T$ 。

第 3 步. 按以下方式构成变换阵

$$P = \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_m^T \\ v_{m+1}^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix} \quad (8.7.24)$$

第 4 步. 按以下方式计算变换后的系统矩阵

$$\bar{A} = PAP^{-1}, \quad \bar{B} = PB, \quad \bar{C} = CP^{-1}$$

变换后的系统为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ y = \bar{C}\bar{x} \end{cases}$$



定理 8.20

给定 n 维线性定常系统 (8.7.23), 其能控性矩阵为 Q_c , 且有 $\text{rank} Q_c < n$. $v_1^T, v_2^T, \dots, v_k^T$ 是 Q_c 中 k 个线性无关的行向量, $v_{k+1}^T, v_{k+2}^T, \dots, v_n^T$ 是与向量组 $\{v_1^T, v_2^T, \dots, v_k^T\}$ 线性无关的 $(n-k)$ 个线性独立的行向量, 并令变换矩阵 P 由式 (8.7.24) 给出. 则线性变换 $\hat{x} = Px$ 将系统 (8.7.23) 化为按能观性分解的规范型

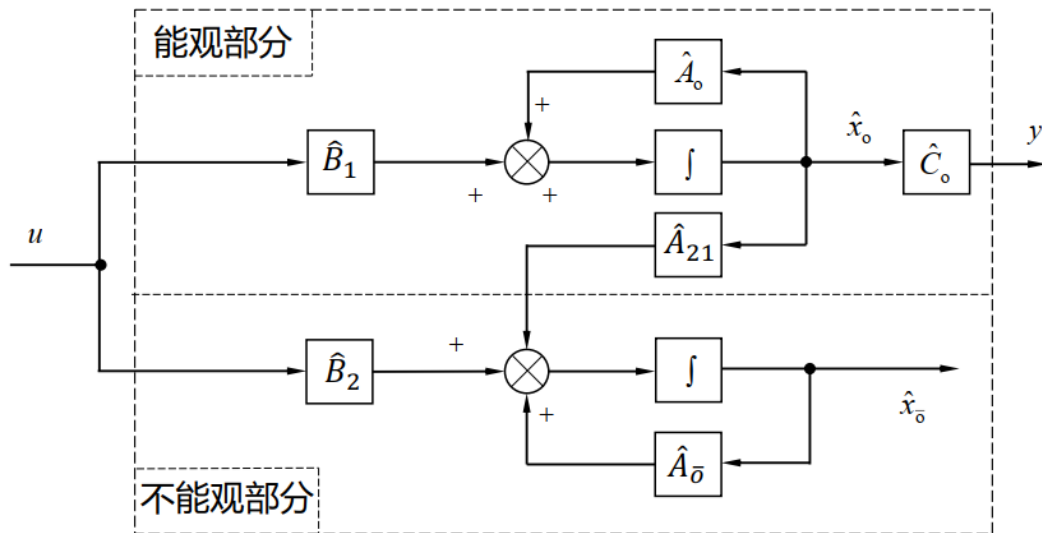
$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_o \\ \dot{\hat{x}}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_o & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_o \\ \hat{x}_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} \hat{C}_o & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_o \\ \hat{x}_o \end{bmatrix} \end{cases} \quad (8.7.25)$$

并且有如下结论:

- (1) (\hat{A}_o, \hat{C}_o) 完全能观.
- (2) 子系统 $\Sigma(\hat{A}_o, \hat{B}_1, \hat{C}_o)$ 的传递函数等于整个系统的传递函数, 即

$$\hat{C}_o(sI - \hat{A}_o)^{-1} \hat{B}_1 = C(sI - A)^{-1} B \quad (8.7.26)$$





说明 8.4

设计方法8.7.2给出的能控性结构分解算法，需要先选取能控性矩阵 Q_c 中的 $\text{rank}Q_c$ 个线性无关的列。然而，在实际计算中，找出这些线性无关的列并不是容易的事。类似于能控性结构分解，只需找出能观性矩阵 Q_o 的行向量空间的一组基即可。这可以通过对能控性矩阵 Q_o 进行初等行变换得到。

此时，可以将系统按能控性和能观性分解成如下的形式：

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_{c0} \\ \dot{\tilde{x}}_{c\bar{o}} \\ \dot{\tilde{x}}_{\bar{c}o} \\ \dot{\tilde{x}}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{c0} & 0 & \tilde{A}_{13} & 0 \\ \tilde{A}_{c21} & \tilde{A}_{c\bar{o}} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{24} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{\bar{c}o} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{\bar{c}43} & \tilde{A}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{c0} \\ \tilde{x}_{c\bar{o}} \\ \tilde{x}_{\bar{c}o} \\ \tilde{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_{c0} \\ \tilde{B}_{c\bar{o}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{c0} & 0 & \tilde{C}_{\bar{c}o} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{c0} \\ \tilde{x}_{c\bar{o}} \\ \tilde{x}_{\bar{c}o} \\ \tilde{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (8.7.31)$$

系统的传递函数与系统的既能控又能观部分的传递函数一致，即

$$G(s) = \tilde{C}_{c0}(sI - \tilde{A}_{c0})^{-1}\tilde{B}_{c0} \quad (8.7.32)$$

基于Jordan型的结构分解

例 8.22: 给定系统的 Jordan 标准型为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & & & & & & \\ 0 & -3 & & & & & & \\ & & -4 & 1 & & & & \\ & & 0 & -4 & & & & \\ & & & & -1 & 1 & & \\ & & & & 0 & -1 & & \\ & & & & & & -5 & 1 \\ & & & & & & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 4 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 6 \\ 0 & 0 \\ 9 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix} x$$

根据 Jordan 标准型的能控能观性的判别准则, 可以判定:

能控状态变量为 x_1, x_2, x_3, x_5, x_7

不能控状态变量为 x_4, x_6, x_8

能观测状态变量为 x_1, x_2, x_4, x_7, x_8

不能观测状态变量为 x_3, x_5, x_6

设单输入单输出系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1s + \alpha_0} \quad (8.8.1)$$

假设它的极点 s_1, s_2, \dots, s_n 互不相等, 则传递函数 $G(s)$ 可写为

$$G(s) = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{\alpha}_i}{s - s_i} \quad (8.8.2)$$

且有

$$\bar{\alpha}_i = G(s)(s - s_i)|_{s=s_i} \quad (8.8.3)$$

则可以写出系统的状态空间表达式

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} s_1 & & & 0 \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & s_n \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_n \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 & \cdots & \hat{\beta}_n \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 & \hat{\beta}_2 & \cdots & \hat{\beta}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s-s_1} & & & \\ & \frac{1}{s-s_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{s-s_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_n \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{\hat{\alpha}_1 \hat{\beta}_1}{s-s_1} + \frac{\hat{\alpha}_2 \hat{\beta}_2}{s-s_2} + \cdots + \frac{\hat{\alpha}_n \hat{\beta}_n}{s-s_n} = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{\alpha}_i}{s-s_i}$$

实现是能控的 $\Leftrightarrow \hat{\alpha}_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n;$
 实现是能观的 $\Leftrightarrow \hat{\beta}_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n;$
 实现既能控又能观 $\Leftrightarrow \bar{\alpha}_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n。$

定理 8.21

对于单输入单输出系统，一个传递函数的实现是能控能观的当且仅当传递函数无零极点对消。♥

按照上述方法求 Jordan 型实现时，如果 $G(s)$ 的极点是共轭复数，则系数矩阵 (A, B, C) 中就出现复数元素，这不便于分析和仿真，应予以避免。办法是对一对共轭复极点 $\sigma \mp j\omega$ ，取响应的部分分式为二阶形式，即

$$g_i(s) = \frac{as + b}{(s - \sigma)^2 + \omega^2}$$

其中， a 和 b 是待定系数，则对应的实现是

$$A_i = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_i = \begin{bmatrix} \frac{a\sigma + b}{\omega} & a \end{bmatrix}$$

或者是它的对偶形式。

定理 8.22

$G(s)$ 是一个严格真有理分式矩阵, 实现 (A, B, C) 是它最小实现的充要条件为 (A, B) 能控, (A, C) 能观。

**定理 8.23**

$G(s)$ 任意两个最小实现 (A_1, B_1, C_1) 和 (A_2, B_2, C_2) 是代数等价的。

**设计方法 8.3**

第 1 步. 根据给定的传递矩阵 $G(s)$ 首先找出一种实现为使实现具有较低的维数, 通常的做法是, 当输入维数小于输出维数时, 宜选能控标准型实现; 反之, 宜选能观测标准型实现。

第 2 步. 对实现 (A, B, C) 进行结构分解, 其中既能控又能观部分便是最小实现。

**定理 8.24**

状态空间模型

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (8.8.12)$$

作为给定传递矩阵 (8.8.10) 的一个能控标准型实现为

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} 0_r & I_r & 0_r & \cdots & 0_r \\ 0_r & 0_r & I_r & \cdots & 0_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0_r & 0_r & 0_r & \cdots & I_r \\ -\alpha_0 I_r & -\alpha_1 I_r & -\alpha_2 I_r & \cdots & -\alpha_{n-1} I_r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{rn \times rn} \\ B = \begin{bmatrix} 0_r \\ 0_r \\ \vdots \\ 0_r \\ I_r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{rn \times r} \\ C = [P_0 \quad P_1 \quad \cdots \quad P_{n-1}] \in \mathbb{R}^{m \times rn} \end{cases}$$

其中 0_r 及 I_r 分别为 $r \times r$ 零矩阵及 $r \times r$ 单位矩阵。



定理 8.25

模型 (8.8.12) 作为给定传递矩阵 (8.8.10) 的一个能观标准型实现为

$$\begin{cases}
 A = \begin{bmatrix} 0_m & 0_m & \cdots & 0_m & -\alpha_0 I_m \\ I_m & 0_m & \cdots & 0_m & -\alpha_1 I_m \\ 0_m & I_m & \cdots & 0_m & -\alpha_2 I_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0_m & 0_m & \cdots & I_m & -\alpha_{n-1} I_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mn \times mn} \\
 B = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mn \times r} \\
 C = \begin{bmatrix} 0_m & 0_m & \cdots & 0_m & I_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times mn}
 \end{cases}$$

其中 0_m 及 I_m 分别为 $m \times m$ 零矩阵及 $m \times m$ 单位矩阵。

考虑如下定常线性离散时间系统的能控性

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (8.9.2)$$

定义 8.23: 能控状态

对于线性定常系统 (8.9.2), 如果存在一时刻 $k_1 > 0$ 和一个无约束控制 $u(k)$, $k \in \mathbb{I}[0, k_1]$, 使得系统在这个控制的作用下, 系统由初始状态 $x(0) = x_0$ 出发经 k_1 步后转移到 $x(k_1) = 0$, 则称此 x_0 是系统的一个能控状态。

定义 8.24: 系统能控性

对于线性定常系统 (8.9.2), 如果状态空间中的所有非零状态都是能控状态, 则称系统 (8.9.2) 是能控的。

考虑如下定常线性离散时间系统的能控性

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (8.9.2)$$

定义 8.25: 能达状态

对于线性定常离散时间系统 (8.9.2), 如果存在一时刻 $k_1 > 0$ 和一个无约束控制 $u(k)$, 使得系统在这个控制的作用下, 系统由零初始状态 $x(0) = 0$ 出发后转移到 $x(k_1) = x_f$, 则称此 x_f 是系统的一个能达状态。

定义 8.26: 系统能达

对于线性定常离散时间系统 (8.9.2), 如果状态空间中的所有非零状态都是能达状态, 则称系统 (8.9.2) 是能达的。

考察线性离散定常系统的状态方程

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (8.10.1)$$

定理 8.26

给定输入矩阵 $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ 和非奇异系统矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，线性离散定常系统 (8.10.1) 是能控的当且仅当存在时刻 $k_1 > 0$ ，使 Gram 矩阵

$$W_c(k_1) = \sum_{i=0}^{k_1-1} A^{-1-i} B B^T (A^{-1-i})^T \quad (8.10.2)$$

是非奇异的。

定理 8.27

线性定常系统 (8.10.1) 是能达的当且仅当存在时刻 $k_1 > 0$ ，使下式中的 Gram 矩阵 $W_r(k_1)$

$$W_r(k_1) = \sum_{i=0}^{k_1-1} A^{k_1-1-i} B B^T (A^{k_1-1-i})^T \quad (8.10.4)$$

是非奇异的

定理 8.28

线性定常系统 (8.10.1) 是能达的当且仅当

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n \quad (8.10.15)$$

其中 n 是矩阵 A 的维数。

定理 8.29

线性定常系统 (8.10.1) 是能控的当且仅当

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \text{rank} [B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B \ A^n] \quad (8.10.20)$$

其中 n 是矩阵 A 的维数。

对于定常线性系统，其能控性与初始时刻无关。考虑如下定常线性系统的能观性

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) \\ y = Cx(k) \end{cases} \quad (8.11.2)$$

定义 8.30: 能观状态

对于线性离散定常系统 (8.11.2)，如果对于初始时刻 $k = 0$ 的一个非零的初始状态 x_0 ，存在一个有限的时刻 k_1 ， $k_1 > 0$ ，使得由区间 $\mathbb{I}[0, k_1]$ 上的系统的输出 $y(k)$ 可以唯一地决定系统地初始状态 x_0 ，则称该状态 x_0 是能观的。

对应地，线性离散定常系统的能观性可以简化定义。

定义 8.31: 系统能观性

对于离散线性定常系统 (8.11.2)，如果状态空间中的所有非零状态都是能观状态，则称系统 (8.11.2) 是能观的。

定理 8.31

线性定常离散系统 (8.11.2) 能观的充分必要条件是, 存在有限时刻 $k_1 > 0$, 使 Gram 矩阵

$$W_o(k_1) = \sum_{i=0}^{k_1} (A^T)^i C^T C A^i \quad (8.11.5)$$

是非奇异的。

**定理 8.32**

线性定常系统 (8.11.2) 能观的充分必要条件是

$$\text{rank } Q_o = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (8.11.8)$$

或

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix} = n \quad (8.11.9)$$

**定理 8.33**

线性离散时间定常系统 (8.11.2) 完全能观的充分必要条件是, 对矩阵 A 的所有特征值 λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, 均有

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ \lambda_i I - A \end{bmatrix} = n \quad (8.11.10)$$

或等价地表示为

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ sI - A \end{bmatrix} = n \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad (8.11.11)$$

**定理 8.34**

线性定常连续系统 (8.11.2) 完全能观的充分必要条件是, A 没有与 C 的所有行相正交的非零右特征向量。即对 A 的任一特征值 λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, 同时满足

$$A\alpha = \lambda_i \alpha, \quad C\alpha = 0$$

的特征向量 $\alpha \equiv 0$ 。



线性定常连续系统状态方程的离散化

$$\text{线性定常连续系统} \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u \end{cases}$$



$$\text{离散方程} \quad \begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}u(k) \end{cases}$$

定理 8.10.2 线性连续定常系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u & t \geq 0 \end{cases}$$

的时间离散化模型为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}u(k) & k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

其中

$$\mathbf{G} = e^{\mathbf{A}T} \quad \mathbf{H} = \left(\int_0^T e^{\mathbf{A}t} dt \right) \mathbf{B}$$

离散化系统对能控能观性的保持

命题 8.8

如果连续系统是不完全可控的(不完全可观的), 则其离散化系统也是不能控的(不能观的)。 ◆

定理 8.35

设系统 (8.12.1) 能控或能观, 令 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu$ 为 \mathbf{A} 的全部特征值, 且当 $i \neq j$ 时有 $\lambda_i \neq \lambda_j$, 则时间离散化系统 Σ_T 保持能控或能观测的一个充分条件是, 采样周期 T 的数值对一切满足

$$\operatorname{Re}|\lambda_i - \lambda_j| = 0 \quad i, j = 1, 2, \dots, \mu \quad (8.12.4)$$

的特征值, 有

$$T \neq \frac{2l\pi}{\operatorname{Im}(\lambda_i - \lambda_j)} \quad l = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (8.12.5)$$

状态反馈极点配置

被控对象 $\dot{x} = Ax + Bu$ (9.1.1)

状态反馈 $u = Kx + v$

闭环系统 $\dot{x} = (A + BK)x + Bv$ (9.1.2)

状态反馈极点配置问题 给定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$, 及一组共轭封闭的复数 $s_i, i \in \mathbb{I}[1, n]$, 求取矩阵 $K \in \mathbb{R}^{r \times n}$, 使得矩阵 $A + BK$ 的所有特征值为 $s_i, i \in \mathbb{I}[1, n]$ 。

引理 9.1

给定定常线性系统 (9.1.1), 如果对任意给定的一组共轭封闭的复数 $s_i, i \in \mathbb{I}[1, n]$ 都存在反馈增益矩阵 $K \in \mathbb{R}^{r \times n}$, 使得闭环系统矩阵 $A + BK$ 的所有特征值为 $s_i, i \in \mathbb{I}[1, n]$, 则系统 (9.1.1) 是能控的。

定理 9.1

给定单输入定常线性系统 (9.1.5), 对任意给定的一组共轭封闭的复数 $s_i, i \in \mathbb{I}[1, n]$ 都存在反馈增益矩阵 $k \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, 使得闭环系统矩阵 $A + bk$ 的所有特征值为 $s_i, i \in \mathbb{I}[1, n]$, 当且仅当系统 (9.1.5) 是能控的。

设计方法 9.1: 基于第二能控规范型的状态反馈极点配置

第 1 步. 计算系统矩阵 A 的特征多项式, 即

$$\det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0 \quad (9.1.10)$$

第 2 步. 根据期望闭环特征值 $\{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$, 确定闭环特征多项式, 即

$$a^*(s) = (s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n) = s^n + a_{n-1}^*s^{n-1} + \cdots + a_1^*s + a_0^* \quad (9.1.11)$$

第 3 步. 计算

$$\bar{k} = \begin{bmatrix} a_0 - a_0^* & a_1 - a_1^* & \cdots & a_{n-1} - a_{n-1}^* \end{bmatrix} \quad (9.1.12)$$

第 4 步. 计算变换阵

$$P = \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & 1 & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \alpha_{n-1} & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix} \quad (9.1.13)$$

第 5 步. 求出增益阵 $k = \bar{k}P^{-1}$

设计方法 9.2: 状态反馈极点配置直接法

第 1 步. 由给定的期望闭环极点 $s_i, i = 1, 2, \dots, n$ 写出期望的闭环特征多项式

$$\begin{aligned}\alpha^*(s) &= (s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n) \\ &= s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1s + \alpha_0\end{aligned}$$

第 2 步. 由等式

$$\det(sI - A + BK) = \alpha^*(s)$$

比较系数, 解联方程即可确定 k_1, \dots, k_n 。

定理 9.2: 状态反馈不改变能控性

如果系统 (9.1.1) 是能控的, 则对任意反馈增益 K , 闭环系统 (9.1.2) 也是能控的。

定义 9.1

给定系统 (9.3.1), 如果存在状态反馈增益 K 使得闭环系统 (9.3.3) 是稳定的, 则称系统 (9.3.1) 或者矩阵对 (A, B) 是可稳的。

定理 9.3

线性连续时间定常系统可稳的充要条件是其不能控振型都在复平面的左半平面。

输出反馈 (SISO 系统)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx \end{cases} \quad (9.2.1)$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^{n \times 1}, c \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ 。输出反馈具有如下形式:

$$u = fy + v \quad (9.2.2)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + bfc)x + bv \\ y = cx \end{cases} \quad (9.2.3)$$

该系统的传递函数为

$$G_f(s) = c(sI - A - bfc)^{-1}b$$

闭环特征多项式为

$$\begin{aligned}\alpha_f(s) &= \det(sI - A - bfc) \\ &= \det[(sI - A)(I - (sI - A)^{-1}bfc)] \\ &= \det(sI - A)\det(I - (sI - A)^{-1}bfc) \\ &= \det(sI - A)\det(I - fc(sI - A)^{-1}b)\end{aligned} \quad (9.2.4)$$

由于 $I - fc(sI - A)^{-1}b$ 实际上是一个标量函数，因此有

$$\det(I - fc(sI - A)^{-1}b) = 1 - fc(sI - A)^{-1}b \quad (9.2.5)$$

记开环系统的传递函数为

$$G(s) = c(sI - A)^{-1}b \triangleq \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} \quad (9.2.6)$$

其中， $\alpha(s)$ 是开环系统的特征多项式，即

$$\det(sI - A) = \alpha(s) \quad (9.2.7)$$

由式 (9.2.4) 和式 (9.2.6) 得

$$\alpha_f(s) = \alpha(s) - f\beta(s) \quad (9.2.8)$$

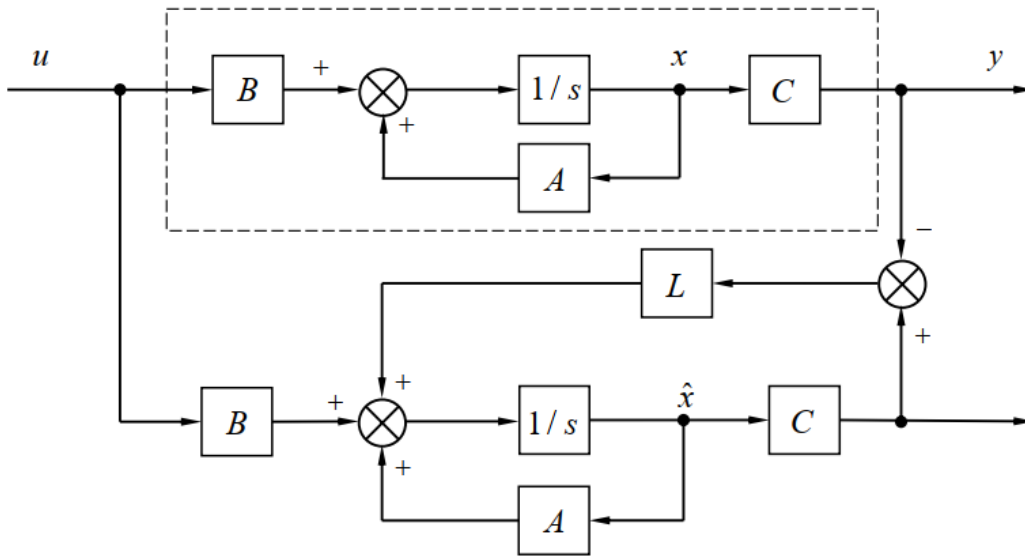
即

$$1 - \frac{f\beta(s)}{\alpha(s)} = 0 \quad (9.2.9)$$

将 $-f$ 看成根轨迹常数，则可以得出如下结论：**输出反馈只能将闭环系统的极点配置在系统根轨迹上，而不能做到任意配置。**

全维状态观测器

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x(0) = x_0, \quad t \geq 0 \\ y = Cx \end{cases}$$



$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$$

定义 9.1

已知 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 矩阵对 (A, C) 或系统 (10.1.1) 称为是可检测的, 如果存在实矩阵 L , 使得矩阵 $(A + LC)$ 稳定。

显然, 可检测性和可稳性具有下述关系。

命题 9.1

线性定常系统 (9.4.1) 可检测的充要条件是其对偶系统可稳, 也即矩阵对 (A, C) 可检测的充分必要条件是矩阵对 (A^T, C^T) 可稳。

利用上述命题我们还容易得到下述结论:

命题 9.2

线性定常系统 (9.4.1) 或矩阵对 (A, C) 可检测的充要条件是其全部不能观振型为稳定的。

基于上述可检测性的概念, 我们可以建立线性系统的全维状态观测器的下述存在条件。

定理 9.3

存在矩阵 L 使得系统 (9.4.2) 构成系统 (9.4.1) 的一个全维状态观测器的充要条件是矩阵对 (A, C) 可检测, 而此时只需选取 L 使得 $(A + LC)$ 稳定即可。

定理 9.4

线性定常系统 (9.4.1) 的全维状态观测器 (9.4.3) 存在且可以任意配置极点, 即可通过选择增益阵 L 任意配置 $(A + LC)$ 的全部特征值的充要条件是矩阵对 (A, C) 能观。

设计方法 9.3: (A, C) 可检测条件下的全维状态观测器设计

第 1 步. 导出对偶系统 (A^T, C^T, B^T) 。

第 2 步. 指定所要设计的全维观测器的一组期望极点 $\{\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*\}$, 利用极点配置问题的算法, 对矩阵 (A^T, C^T) 来确定使

$$\lambda_i (A^T + C^T K) = \lambda_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

成立的反馈增益阵 K 。

第 3 步. 取 $L = K^T$, 并计算 $(A + LC)$, 则所要设计的全维状态观测器就为

$$\dot{\hat{x}} = (A + LC)\hat{x} + Bu - Ly$$

而 \hat{x} 即为 x 的估计状态。

降维状态观测器

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (9.5.1)$$

引理 9.2

给定被估计系统 (10.2.1), 任取 $(n-m) \times n$ 阶常阵 R , 使 $n \times n$ 矩阵

$$P = \begin{bmatrix} C \\ R \end{bmatrix} \quad (9.5.2)$$

非奇异, 则有

$$\bar{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = PB = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = CP^{-1} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \end{bmatrix} \quad (9.5.3)$$

其中, \bar{A}_{11} 、 \bar{A}_{12} 、 \bar{A}_{21} 和 \bar{A}_{22} 分别为 $m \times m$ 、 $m \times (n-m)$ 、 $(n-m) \times m$ 和 $(n-m) \times (n-m)$ 阶矩阵; \bar{B}_1 和 \bar{B}_2 分别为 $m \times r$ 和 $(n-m) \times r$ 阶矩阵, 并且 $(\bar{A}_{22}, \bar{A}_{12})$ 能观的充分必要条件是 (A, C) 能观测。

$$x = P^{-1}\bar{x}$$

引理 9.3

设 $(\bar{A}_{22}, \bar{A}_{12})$ 能观测, \bar{L} 为使得矩阵 $(\bar{A}_{22} + \bar{L}\bar{A}_{12})$ 稳定的任一矩阵, 则下述系统

$$\begin{cases} \dot{z} = (\bar{A}_{22} + \bar{L}\bar{A}_{12})z + [(\bar{A}_{21} + \bar{L}\bar{A}_{11}) - (\bar{A}_{22} + \bar{L}\bar{A}_{12})\bar{L}]y + (\bar{B}_2 + \bar{L}\bar{B}_1)u \\ \hat{x}_2 = z - \bar{L}y \end{cases} \quad (9.5.6)$$

构成系统 (9.5.5) 的状态分量 \bar{x}_2 的一个观测器, 即对于任何的 $\bar{x}(0)$ 、 $z(0)$ 和 $u(t)$ 均有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\bar{x}_2(t) - \hat{x}_2(t)] = 0$$

定理 9.5

设 (A, C) 能观测, 矩阵 \bar{A}_{ij} 、 \bar{B}_i 、 Q_i , $i = 1, 2$, $j = 1, 2$, 由式 (9.5.2)~(9.5.4) 所定义, \bar{L} 为使得矩阵 $(\bar{A}_{22} + \bar{L}\bar{A}_{12})$ 稳定的任一矩阵, 则下述系统

$$\begin{cases} \dot{z} = (\bar{A}_{22} + \bar{L}\bar{A}_{12})z + [(\bar{A}_{21} + \bar{L}\bar{A}_{11}) - (\bar{A}_{22} + \bar{L}\bar{A}_{12})\bar{L}]y + (\bar{B}_2 + \bar{L}\bar{B}_1)u \\ \hat{x} = Q_1y + Q_2(z - \bar{L}y) = Q_2z + (Q_1 - Q_2\bar{L})y \end{cases} \quad (9.5.13)$$

构成系统 (9.5.1) 的一个 $n-m$ 维状态观测器, 即对于任何的 $x(0)$ 、 $z(0)$ 和 $u(t)$, 由式 (9.5.1) 和式 (9.5.13) 构成的复合系统均满足下述关系

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - \hat{x}(t)] = 0$$

设计方法 9.4: 线性系统的降维状态观测器设计

第 1 步. 选取 $(n-m) \times n$ 阶常阵 R , 使得 $n \times n$ 阶矩阵 $P = \begin{bmatrix} c \\ R \end{bmatrix}$ 非奇异。

第 2 步. 计算

$$Q = P^{-1} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix}$$

其中 Q_1 和 Q_2 分别为 $n \times m$ 和 $n \times (n-m)$ 阶矩阵。

第 3 步. 计算

$$\bar{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = PB = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}$$

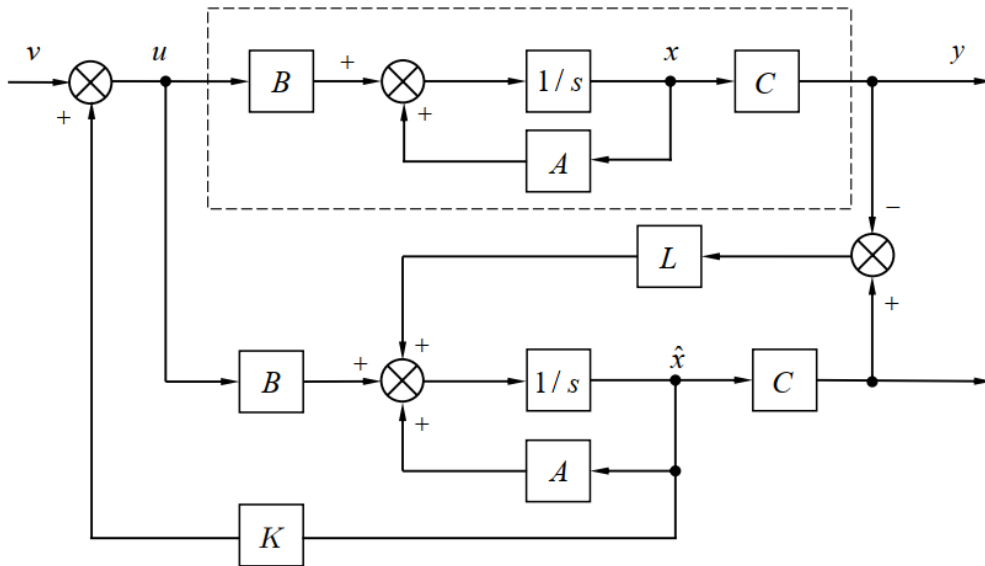
其中, \bar{A}_{11} 、 \bar{A}_{12} 、 \bar{A}_{21} 、 \bar{A}_{22} 和分别为 $m \times m$ 、 $m \times (n-m)$ 、 $(n-m) \times m$ 和 $(n-m) \times (n-m)$ 阶矩阵; \bar{B}_1 和 \bar{B}_2 分别为 $m \times r$ 和 $(n-m) \times r$ 阶矩阵。

第 4 步. 选取 \bar{L} 使得矩阵 $(\bar{A}_{22} + \bar{L}\bar{A}_{12})$ 稳定或具有希望的稳定特征值。

第 5 步. 按照式 (9.5.13) 构成系统的降维状态观测器。



基于观测器的状态反馈



$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BK\hat{x} + Bv \\ \dot{\hat{x}} = -LCx + (A + LC + BK)\hat{x} + Bv \\ y = Cx \end{cases}$$

$$z = \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{bmatrix} A & BK \\ -LC & A + LC + BK \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} v \\ y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} z \end{cases}$$

分离原理

$$\tilde{x} = x - \hat{x}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A + LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v \\ y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} \end{cases}$$

复合系统与状态反馈子系统具有相同的传递函数阵，与观测器部分无关

$$[C \ 0] \left(sI - \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A + LC \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = C(sI - A - BK)^{-1}B$$

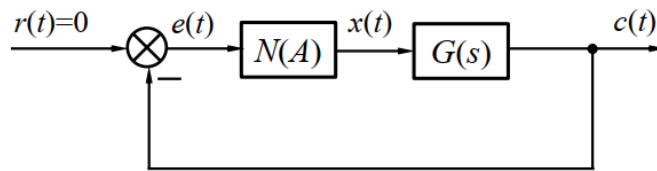
复合系统特征值

$$\begin{vmatrix} sI - A - BK & BK \\ 0 & sI - A - LC \end{vmatrix} = |sI - A - BK| \cdot |sI - A - LC|$$

即复合系统特征值由状态反馈子系统和全维状态观测器的特征值组合而成，两部分特征值相互独立，彼此不受影响。因此状态反馈矩阵 K 和输出反馈矩阵 L 可根据各自的要求来独立进行设计。

分离定理

若被控系统 (A, B, C) 可控可观，基于状态观测器设计状态反馈时，其系统的极点配置和观测器设计可以分别独立进行，即 K 和 L 的设计可分别独立进行。



$$e(t) = A \sin \omega t$$

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t) \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \end{aligned}$$

假设 1: 奇对称性. 即非线性环节的输入输出特性 $f(e)$ 应是 e 的奇函数, $f(e) = -f(-e)$, 或正弦输入下的输出 $x(t)$ 为 t 的奇对称函数, $x\left(t + \frac{\pi}{\omega}\right) = -x(t)$, 以保证非线性环节的正弦响应不含有常值分量, 即 $A_0 = 0$ 。

假设 2: 线性环节低通滤波特性良好. 在整个系统中, 线性环节低通滤波特性良好, 意味着在正弦输入情况下, 实际输出中高次谐波分量将被大大削弱。只有在这种条件下, 实际输出中基波分量才能较精确地近似代替正弦输入信号下的实际输出。当然, 描述函数法分析的精度也直接取决于线性环节的低通滤波特性, 低通滤波特性越好, 相应的分析精度也越高。

$$\begin{aligned}
 x(t) \approx x_1(t) &= A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t \\
 &= X_1 \sin(\omega t + \varphi_1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N(A) &= \frac{X_1}{A} e^{j\varphi_1} \\
 &= \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{A} e^{j \arctan \frac{A_1}{B_1}} \\
 &= \frac{B_1}{A} + j \frac{A_1}{A}
 \end{aligned}$$

$x(t)$ 奇对称

$$x(t) = -x\left(t + \frac{\pi}{\omega}\right)$$

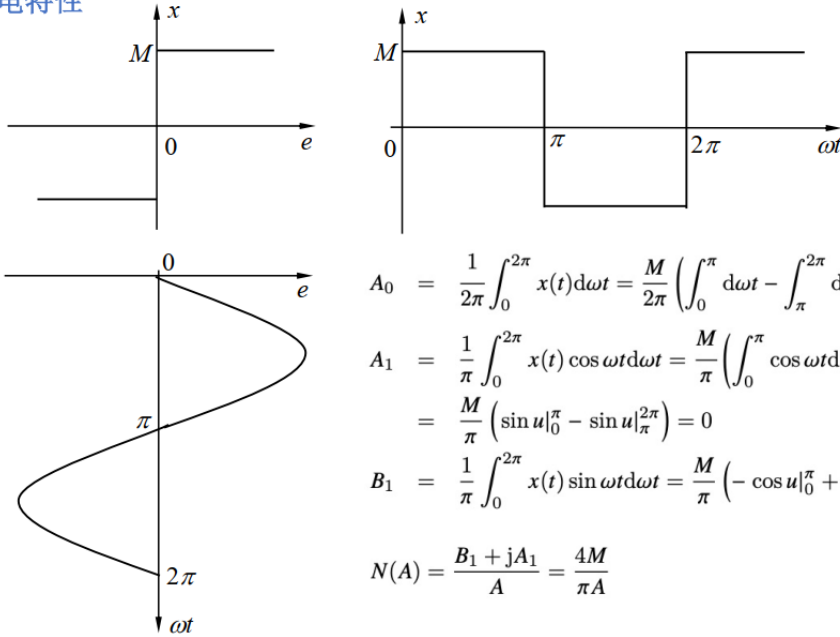
$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t) d\omega t = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} x(t) d\omega t + \int_{\pi}^{2\pi} x(t) d\omega t \right]$$

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} x(t) d\omega t + \int_0^{\pi} x\left(u + \frac{\pi}{\omega}\right) d\omega u \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} x(t) d\omega t + \int_0^{\pi} -x(u) d\omega u \right] = 0
 \end{aligned}$$

$$A_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(t) \cos \omega t d\omega t, \quad B_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(t) \sin \omega t d\omega t$$

典型非线性特性的描述函数

继电器特性



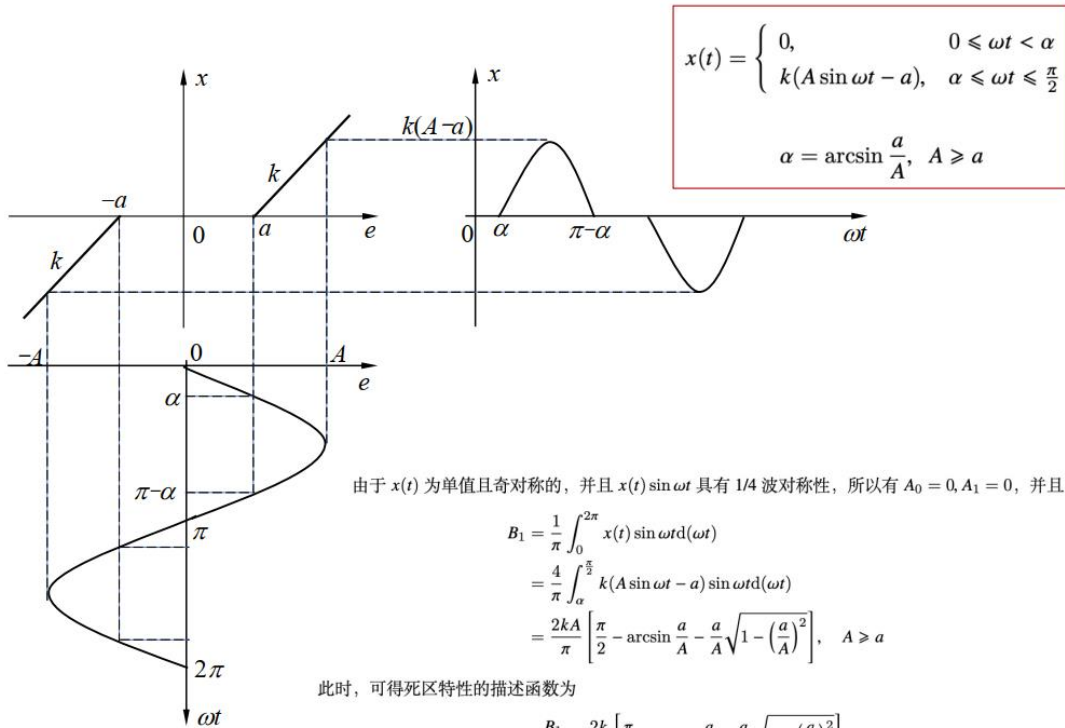
$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t) d\omega t = \frac{M}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} d\omega t - \int_{\pi}^{2\pi} d\omega t \right) = 0$$

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos \omega t d\omega t = \frac{M}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \cos \omega t d\omega t - \int_{\pi}^{2\pi} \cos \omega t d\omega t \right)$$

$$= \frac{M}{\pi} \left(\sin \omega t \Big|_0^{\pi} - \sin \omega t \Big|_{\pi}^{2\pi} \right) = 0$$

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin \omega t d\omega t = \frac{M}{\pi} \left(-\cos \omega t \Big|_0^{\pi} + \cos \omega t \Big|_{\pi}^{2\pi} \right) = \frac{4M}{\pi}$$

$$N(A) = \frac{B_1 + jA_1}{A} = \frac{4M}{\pi A}$$



由于 $x(t)$ 为单值且奇对称的，并且 $x(t) \sin \omega t$ 具有 1/4 波对称性，所以有 $A_0 = 0, A_1 = 0$ ，并且

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin \omega t d(\omega t)$$

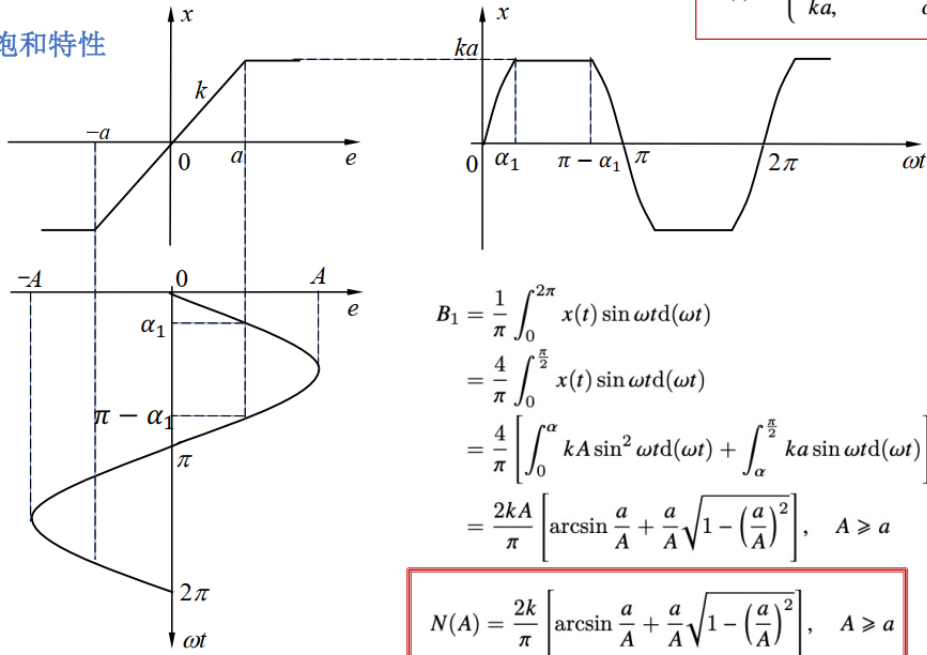
$$= \frac{4}{\pi} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} k(A \sin \omega t - a) \sin \omega t d(\omega t)$$

$$= \frac{2kA}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{a}{A} - \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} \right], \quad A \geq a$$

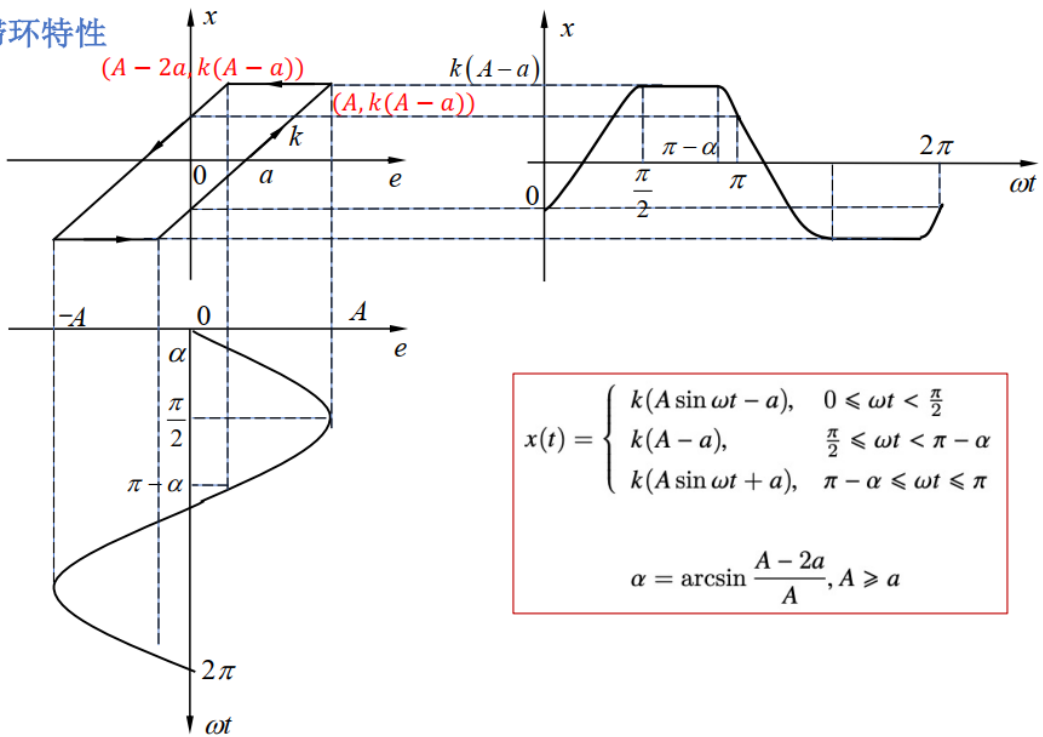
此时，可得死区特性的描述函数为

$$N(A) = \frac{B_1}{A} = \frac{2k}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{a}{A} - \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} \right], \quad A \geq a \quad (10.4.1)$$

饱和特性



滞环特性



$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos \omega t d(\omega t) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} k(A \sin \omega t - a) \cos \omega t d(\omega t) + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\alpha} k(A - a) \cos \omega t d(\omega t) \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\pi-\alpha}^{\pi} k(A \sin \omega t + a) \cos \omega t d(\omega t) \right]
 \end{aligned}$$

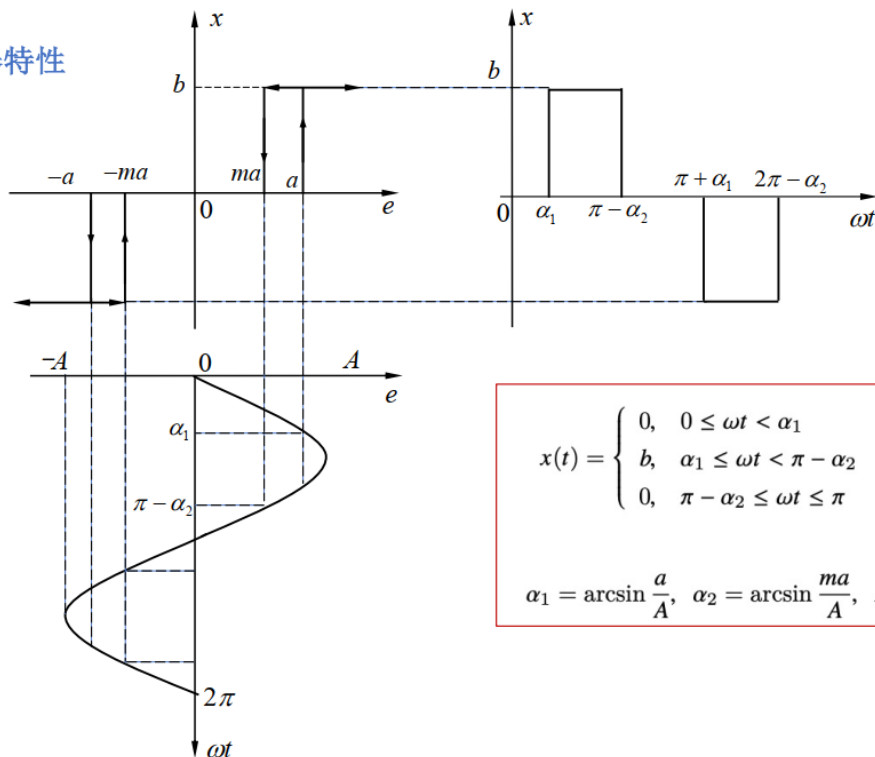
$$x(t) = \begin{cases} k(A \sin \omega t - a), & 0 \leq \omega t < \frac{\pi}{2} \\ k(A - a), & \frac{\pi}{2} \leq \omega t < \pi - \alpha \\ k(A \sin \omega t + a), & \pi - \alpha \leq \omega t \leq \pi \end{cases}$$

$$\alpha = \arcsin \frac{A - 2a}{A}, A \geq a$$

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin \omega t d(\omega t) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} k(A \sin \omega t - a) \sin \omega t d(\omega t) + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\alpha} k(A - a) \sin \omega t d(\omega t) \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\pi-\alpha}^{\pi} k(A \sin \omega t + a) \sin \omega t d(\omega t) \right] \\
 &= \frac{kA}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(1 - \frac{2a}{A} \right) + 2 \left(1 - \frac{2a}{A} \right) \sqrt{\frac{a}{A} \left(1 - \frac{a}{A} \right)} \right], A \geq a
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N(A) &= \frac{B_1}{A} + j \frac{A_1}{A} \\
 &= \frac{k}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(1 - \frac{2a}{A} \right) + 2 \left(1 - \frac{2a}{A} \right) \sqrt{\frac{a}{A} \left(1 - \frac{a}{A} \right)} \right] + j \frac{4ka}{\pi A} \left(\frac{a}{A} - 1 \right), A \geq a
 \end{aligned}$$

继电器特性



$$x(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \omega t < \alpha_1 \\ b, & \alpha_1 \leq \omega t < \pi - \alpha_2 \\ 0, & \pi - \alpha_2 \leq \omega t \leq \pi \end{cases}$$

$$\alpha_1 = \arcsin \frac{a}{A}, \alpha_2 = \arcsin \frac{ma}{A}, A \geq a$$

由 $x(t)$ 正、负半波对称性知, $A_0 = 0$ 。计算 A_1, B_1 得

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos \omega t d(\omega t) \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\pi-\alpha_2} b \cos \omega t d(\omega t) \\
 &= \frac{2ab}{\pi A} (m-1), \quad A \geq a \\
 B_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin \omega t d(\omega t) \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\pi-\alpha_2} b \sin \omega t d(\omega t) \\
 &= \frac{2b}{\pi} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{ma}{A}\right)^2} \right], \quad A \geq a
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N(A) &= \frac{B_1}{A} + j \frac{A_1}{A} \\
 &= \frac{2b}{\pi A} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{ma}{A}\right)^2} \right] + j \frac{2ab}{\pi A^2} (m-1), \quad A \geq a
 \end{aligned}$$

(1) $a = 0$ 时, 即理想继电器特性, 式 (10.4.5) 退化为

$$N(A) = \frac{4b}{\pi A}$$

(2) $m = 1$ 时, 即带死区继电器特性, 式 (10.4.5) 退化为

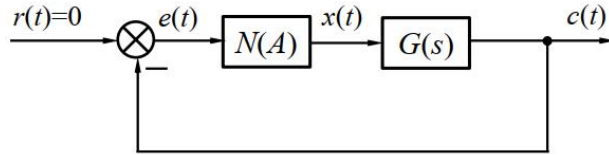
$$N(A) = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}, \quad A \geq a$$

(3) $m = -1$ 时, 即带滞环继电器特性, 式 (10.4.5) 退化为

$$N(A) = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} - j \frac{4ab}{\pi A^2}, \quad A \geq a$$

$$\begin{aligned}
 N(A) &= \frac{B_1}{A} + j \frac{A_1}{A} \\
 &= \frac{2b}{\pi A} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{ma}{A}\right)^2} \right] + j \frac{2ab}{\pi A^2} (m-1), \quad A \geq a
 \end{aligned}$$

非线性系统的稳定性



假设： $G(s)$ 具有低通特性，故极点位于左半平面

闭环特征方程：

$$1 + N(A)G(j\omega) = 0 \text{ 或 } G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)}$$

即

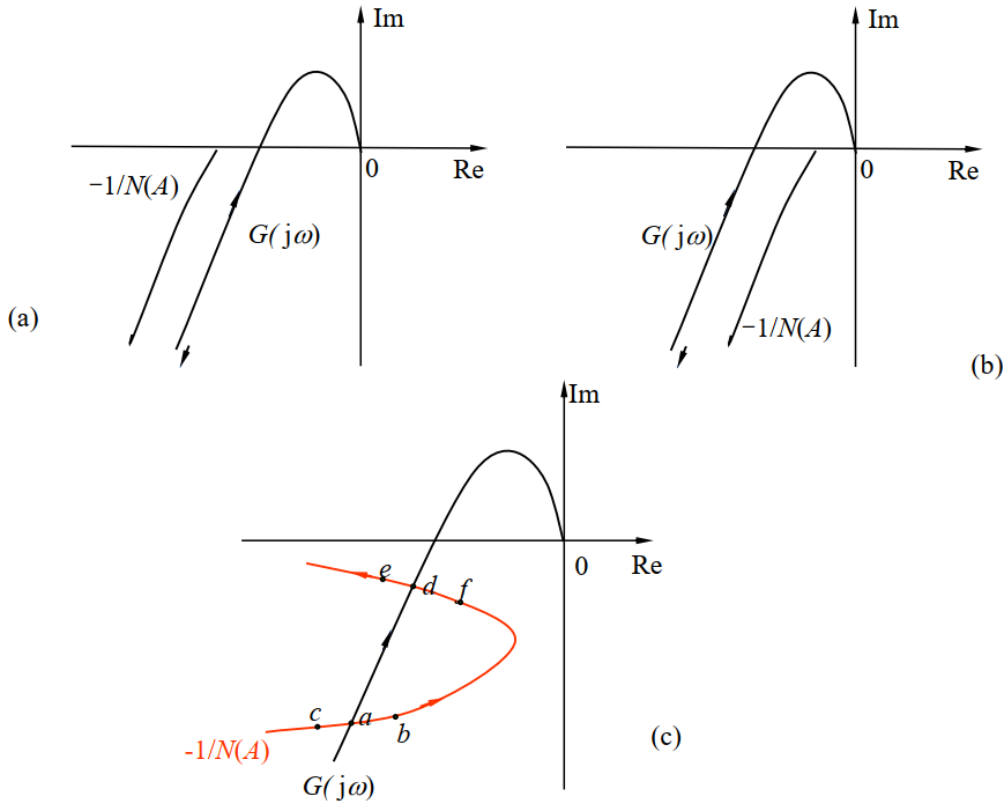
$$\begin{cases} |G(j\omega)N(A)| = 1 \\ \angle N(A) + \angle G(j\omega) = -180^\circ \end{cases}$$

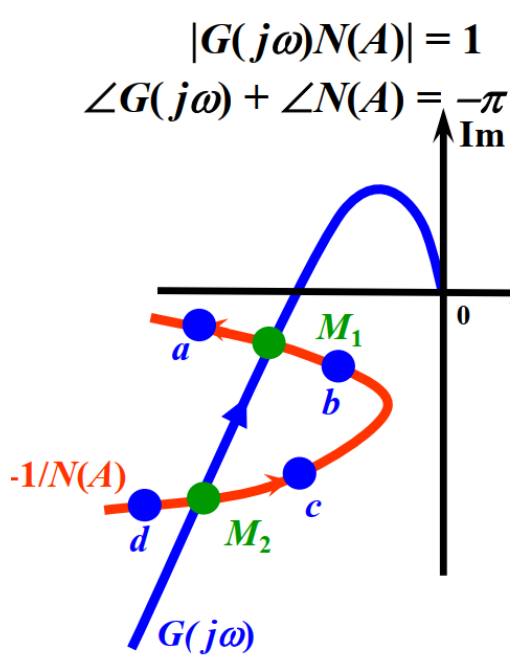
推广的Nyquist稳定判据：

(1) 若线性环节的频率特性 $G(j\omega)$ 的轨迹不包围 $-\frac{1}{N(A)}$ 轨迹，如图10.24(a)所示，则非线性系统是稳定的，并且 $G(j\omega)$ 离 $-\frac{1}{N(A)}$ 越远，系统稳定程度越高。

(2) 若 $G(j\omega)$ 轨迹包围 $-\frac{1}{N(A)}$ 轨迹如图10.24(b)，则系统是不稳定的，系统将做发散运动。

(3) 若 $G(j\omega)$ 轨迹与 $-\frac{1}{N(A)}$ 轨迹有交点，如图10.25所示，则系统中存在着等幅振荡，其振幅和频率对应交点的振幅和频率。该等幅振荡可能是具有一定稳定性的等幅振荡，即自激振荡；也可能是不稳定的等幅振荡，即在一定条件下等幅振荡发散或收敛。





$\Rightarrow G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)}$

M_1 点是稳定的自振荡。
 M_2 是不稳定的振荡点。

对于稳定的自振荡，其振幅和频率是确定的，并可以测量得到。计算时：
 振幅可由 $-1/N(A)$ 曲线的自变量 A 的大小来确定，
 振荡频率由 $G(j\omega)$ 曲线的自变量 ω 来确定。

相平面、相轨迹和相轨迹图

相平面：
 由系统某变量及其导数构成的用以描述系统状态的平面。

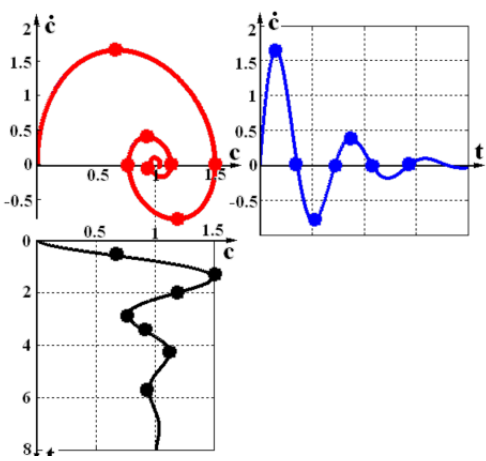
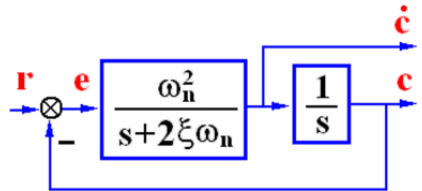
相轨迹：
 系统变量及其导数随时间变化在相平面上描绘出来的轨迹。

例1 单位反馈系统

$$G(s) = \frac{5}{s(s+1)} \begin{cases} \omega_n = 2.236 \\ \xi = 0.2236 \end{cases}$$

$$r(t) = 1(t)$$

相轨迹图： 相平面 + 相轨迹簇



(1) 相轨迹的斜率

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \frac{dx}{dt} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = -f(x, \dot{x})$$

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0$$

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{-f(x, \dot{x})}{\dot{x}}$$

(2) 相轨迹的奇点 (平衡点)

相轨迹上斜率不确定的点, 在x轴上

$$\alpha = \frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{-f(x, \dot{x})}{\dot{x}} = \frac{0}{0} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \dot{x} = 0 \end{cases}$$

对于线性定常系统, 原点是唯一的平衡点

(3) 相轨迹的运动方向

$\begin{cases} \text{上半平面 } \dot{x} > 0 & \text{— 向右移动} \\ \text{下半平面 } \dot{x} < 0 & \text{— 向左移动} \end{cases}$ 顺时针运动

(4) 相轨迹通过横轴的方向

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{-f(x, \dot{x})}{\dot{x}} \quad \begin{cases} f(x, \dot{x}) \neq 0 \\ \dot{x} = 0 \end{cases} \quad \text{相轨迹以 } 90^\circ \text{ 穿越 } x \text{ 轴}$$

相轨迹的绘制——解析法

直接积分法

设系统方程为 $\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$, 试绘制系统的相轨迹。

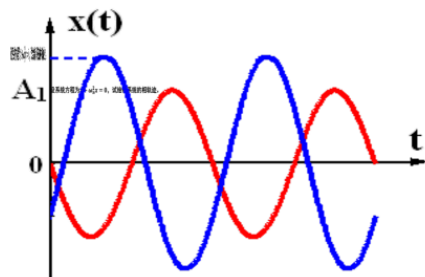
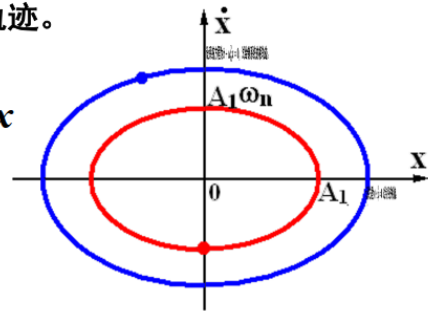
$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = -\omega_n^2 x$$

$$\dot{x} \cdot d\dot{x} = -\omega_n^2 x \cdot dx$$

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 = \frac{-\omega_n^2}{2} \cdot x^2 + C$$

$$x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega_n^2} = \frac{2C}{\omega_n^2} = A^2$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{A^2 \omega_n^2} = 1 \quad \text{— 椭圆方程}$$



相轨迹的绘制——解析法

消去变量 t

求相轨迹方程的第二种方法是，根据给定的微分方程分别求出 \dot{x} 和 x 对时间 t 的函数关系，然后再从这两个关系式中消去变量 t ，便得相轨迹方程。再次考虑系统 (10.8.3)，对微分方程 $\dot{x} = -M$ 积分一次，求得

$$\dot{x} = -M$$

$$\dot{x} = -Mt$$

对上式再进行一次积分，得到

$$x = -\frac{1}{2}Mt^2 + x_0$$

对上两式关于 \dot{x} 和 x 的表达消去变量 t ，最终求得相轨迹方程为

$$\dot{x}^2 = -2M(x - x_0)$$

相轨迹绘制——等倾线法

$$\dot{x} + f(x, \dot{x}) = 0$$

对于二阶系统 (10.8.1)，其斜率方程为

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{f(x, \dot{x})}{\dot{x}} \quad (10.8.5)$$

该方程给出了相轨迹在相平面上任一点 (x, \dot{x}) 处切线的斜率。取相轨迹切线的斜率为某一常数 α ，得

$$\alpha = \frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{f(x, \dot{x})}{\dot{x}} \quad (10.8.6)$$

也就是说，相平面上满足该方程的点 (x, \dot{x}) ，其所对应的相轨迹在该点处切线的斜率为 α 。如果 $\dot{x} \neq 0$ ，则方程 (10.8.6) 可等价地写为

$$\alpha\dot{x} + f(x, \dot{x}) = 0 \quad (10.8.7)$$

该方程称为二阶系统 (10.8.1) 的等倾线方程。对比式 (10.8.7) 和 (10.8.1) 可以发现，二阶系统的等倾线方程可将系统方程 (10.8.1) 中系统状态对时间的二阶导数 \ddot{x} 替换为 $\alpha\dot{x}$ 得到。根据等倾线方程 (10.8.7)，可在相平面的各条相轨迹上求出具有同一斜率的点 (x, \dot{x}) ，将这些点连接起来，由此得到的等斜率轨迹便称为等倾线。

等倾斜线 —— 相轨迹斜率为常数的曲线

系统方程 $\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0$ $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dx} \frac{dx}{dt} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = -f(x, \dot{x})$

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{-f(x, \dot{x})}{\dot{x}} \quad \alpha = \frac{-f(x, \dot{x})}{\dot{x}}$$

例3 系统方程 $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$ ，用等倾斜线法绘制系统相轨迹图。

解 $\ddot{x} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = -(x + \dot{x}) \quad \alpha = \frac{-(x + \dot{x})}{\dot{x}}$

等倾斜线方程 $\dot{x} = \frac{-x}{1 + \alpha}$

特殊等倾线

对于二阶线性系统

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$$

其等倾线为直线，其方程为

$$\dot{x} = -\frac{b}{a + \alpha}x$$

其中 α 为相轨迹切线的斜率，而该等倾线的斜率为

$$k = -\frac{b}{a + \alpha}$$

现在考虑这样一类等倾线：等倾线的斜率与相轨迹切线斜率相等。容易知道，这类等倾线也是相轨迹。很显然，对此类等倾线，其斜率 k 满足

$$k = -\frac{b}{a + k}$$

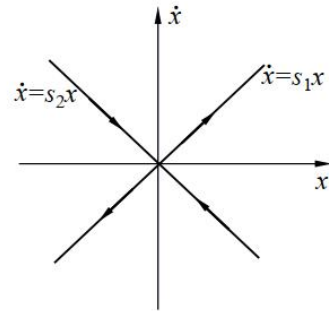
其可等价地写为

$$k^2 + ak + b = 0$$

由此可以看出，这类特殊等倾线的斜率是系统的极点。由于斜率是实数，具有复数极点的二阶线性系统不存在这样的特殊等倾线。

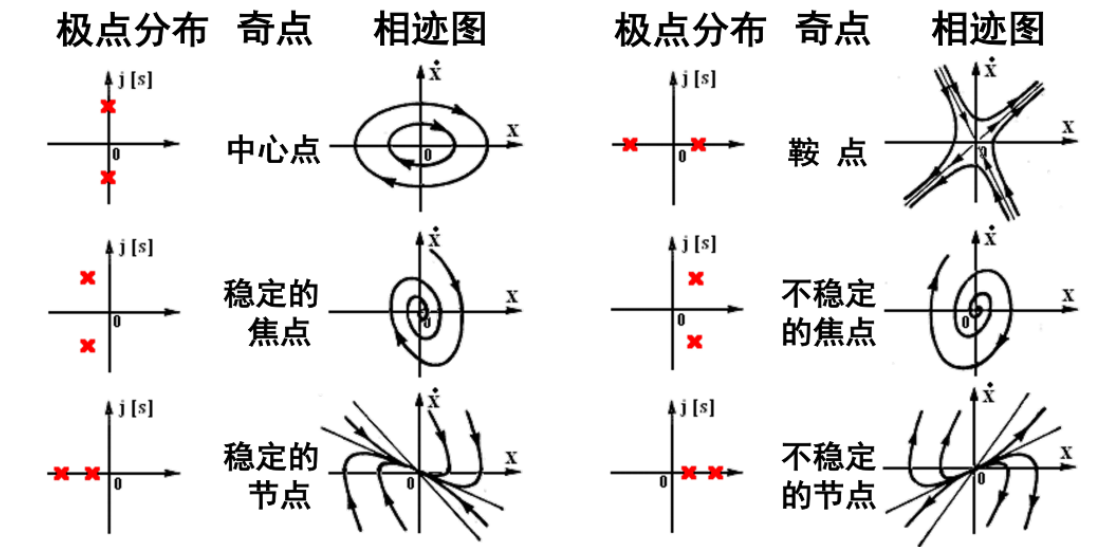
当 $b < 0$ 时，系统 (10.8.10) 的两个极点为

$$s_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} > 0, \quad s_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} > 0$$



线性二阶系统的相轨迹

奇点分稳定奇点和不稳定奇点。 据二阶系统特征根分布情况，奇点分：**中心点，节点（稳定的、不稳定的），焦点（稳定的、不稳定的），鞍点。**，相应的相轨迹图如下：



奇点

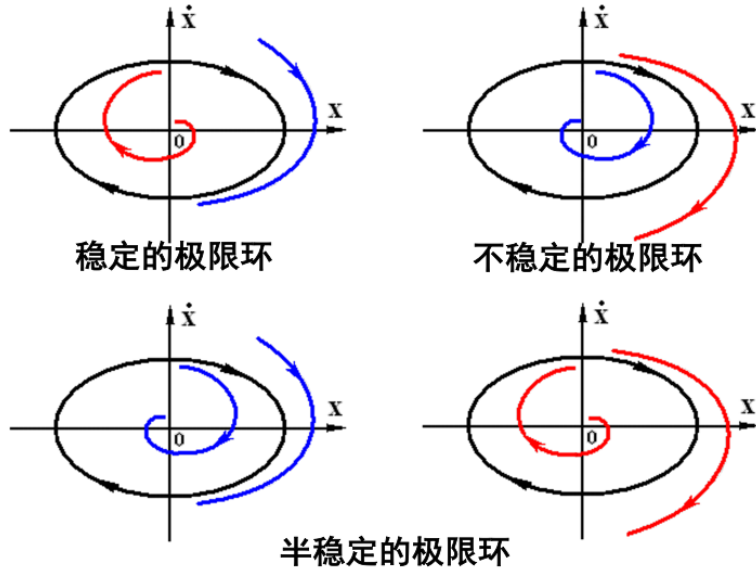
对于非线性系统，平衡状态和平衡状态附近系统的运动形式以及极限环的存在制约着整个系统的运动特性。对于非线性系统的各个平衡点，若描述非线性过程的非线性函数解析时，可以通过平衡点处的线性化方程，基于线性系统特征根的分布，确定**奇点**的类型，进而确定平衡点附近相轨迹的运动形式。

奇线

当非线性系统存在多个奇点时，奇点类型只决定奇点附近相轨迹的运动形式，而整个系统的相轨迹，特别是离奇点较远的部分，还取决于多个奇点的共同作用，有时会产生特殊的相轨迹，将相平面划分为具有不同运动特点的多个区域。这种特殊的相轨迹成为奇线。最常见的奇线是极限环。极限环把相平面的某个区域划分为内部平面和外部平面部分。

孤立的封闭曲线，把相平面划分为具有不同运动特点的各个区域，极限环是非线性系统的特有现象。收敛于该极限环，则极限环称**稳定极限环**。系统呈现**稳定的自振**。

各类极限环



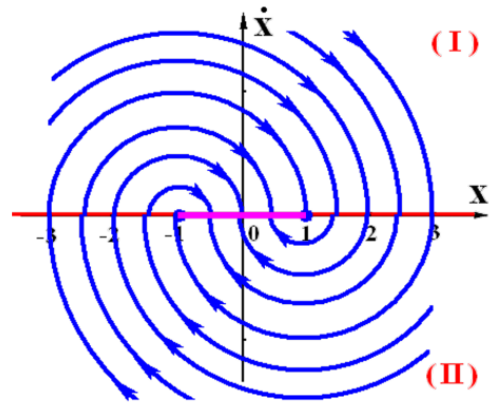
例1 系统方程为 $\ddot{x} + x + \text{sign}\dot{x} = 0$ ，分析系统的自由响应。

解
$$\begin{cases} \ddot{x} + x + 1 = 0 & \dot{x} \geq 0 & \text{I} \\ \ddot{x} + x - 1 = 0 & \dot{x} < 0 & \text{II} \end{cases}$$

奇点
$$\begin{cases} \text{I} & x_{e1} = -1 \\ \text{II} & x_{e2} = 1 \end{cases}$$

特征方程
$$\begin{cases} \text{I} & s^2 + 1 = 0 \\ \text{II} & s^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

极点
$$\begin{cases} s_{1,2} = \pm j1 & \text{中心点} \\ s_{1,2} = \pm j1 & \text{中心点} \end{cases}$$



开关线 —— 划分不同线性区域的边界线

平衡线 (奇线) —— 不同区域的相轨迹相互影响而产生