

自动控制理论复习

第一章 绪论

一 控制系统设计与综合

当一个系统不能满足希望的性能或不能完成所规定的任务时，就需要对系统进行干预、调节或控制来改变原有系统，使改变后的系统满足所规定的任务或性能要求。这一完整的过程称为控制系统设计或控制系统综合。

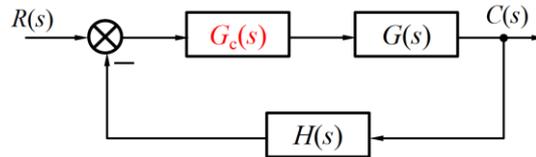
二 校正方式



为使系统达到某种动态及静态指标的要求，加入一些参数可根据需要而改变的装置，该装置能改善系统性能使系统得到校正，称之为校正装置。

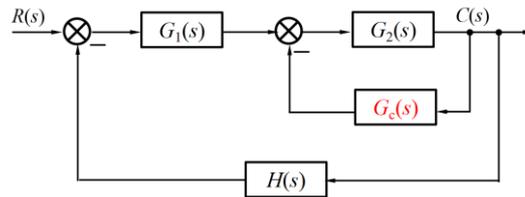
校正装置的选择及其参数整定的过程，称为自动控制系统的校正。就是通常所说的控制系统设计或者控制系统综合。

1. 串联校正



特点：对参数变化的敏感性较强；从设计到具体实现比较简单在设计中最常用。

2. 并联校正（反馈校正）



特点：

- (1) 反馈校正的信号是从高功率点传向低功率点，一般不需要附加放大器。
- (2) 适当地选择反馈回路的增益，可以使校正后的性能主要决定于校正装置，而与反馈校正装置所包围的系统固有特性部分无关。
- (3) 反馈校正的一个显著的优点是，是可以抑制系统参数的波动和非线性因素对系统性能的影响。
- (4) 反馈校正的设计比较复杂。

3. 前馈校正

4. 复合校正

三 控制方式

- 1.状态反馈 2.输出反馈至参考输入 3.输出反馈至状态微分 4.动态补偿器

四 自动控制理论 B 课程特点

1. 结果不唯一 2.近似处理 3.经验公式 4.设计过程有主观性

第二章

一 稳定裕度（相位裕度和幅值裕度）

- 1.稳定是控制系统的基本要求。
- 2.系统可能由稳定变为不稳定。对一个控制系统，还应该要求其参数发生一定的变化时，系统仍然是稳定的。在控制系统稳定的基础上，进一步用以表征其稳定程度高低的概念，即为控制系统的相对稳定性。相对稳定性通过稳定裕度定量描述，包括：**相位裕度和幅值裕度**。

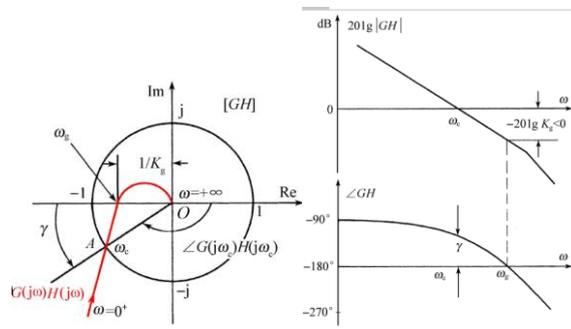
3.相位（角）裕度

剪切频率 ω_c : Nyquist 曲线穿越单位圆的频率

相位裕度定义为: $\gamma = \angle G(j\omega_c)H(j\omega_c) - (-180^\circ) = 180^\circ + \angle G(j\omega_c)H(j\omega_c)$ 负实轴与 OA 的角度，逆时针为正。

物理意义:

- (1) 相位裕度表示开环极坐标图与单位圆的交点沿单位圆与(-1,j0)的远近程度。
- (2) 若系统剪切频率 ω_c 处的相位再减小 γ ，则 $\phi(\omega_c)=-180^\circ$ ，Nyquist 曲线过(-1, 0),系统将处于临界稳定状态。



4.幅值裕度

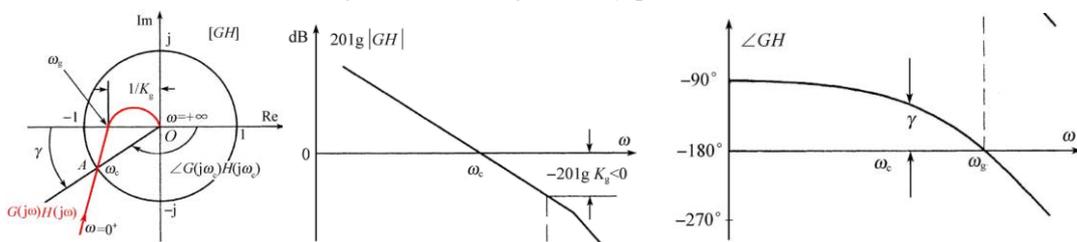
相位穿越频率 ω_g : 开环频率特性相角为-180 的频率。幅值裕度定义为:

$$K_g = \frac{1}{|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|} \quad \text{Nyquist图}$$

$$20\lg K_g = -20\lg |G(j\omega)H(j\omega)| \quad \text{dB} \quad \text{Bode图}$$

物理意义:

- (1) 幅值裕度表示开环极坐标图与负实轴的交点离(-1,j0)的远近程度。
- (2) 若系统的开环增益增大到原来的 K_g 倍，则 $A(\omega_g)=1$ ，Nyquist 曲线过(-1, 0),系统将处于临界稳定状态。



5. Nyquist 稳定判据

目的：利用幅角原理，根据开环传递函数研究闭环传递函数的稳定性。

开环传递函数在全频段的频率特性逆时针包围(-1, j0)的圈数等于开环不稳定极点的个数，则闭环系统稳定。

$$Z = P - 2N$$

P: 开环不稳定极点的个数 Z: 闭环不稳定极点的个数 N: $G(j\omega)H(j\omega)$, $0 < \omega < \infty$ 逆时针包围(-1, j0)的圈数

6. 稳定裕度和稳定性

(见例题)

说明：

(1) 只用幅值裕度或者只用相位裕度，都不足以说明系统的相对稳定性。

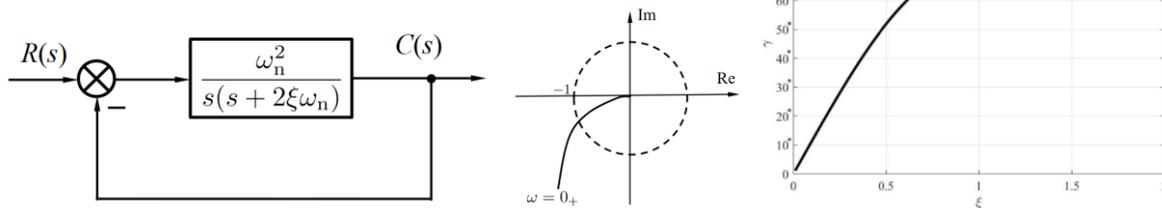
(2) 分析非最小相位系统的相对稳定性时，必须同时应用相位裕度和幅值裕度。对于包含不稳定惯性环节的非最小相位系统只有当相位裕度为正，幅值裕度为负时，闭环系统才是稳定的。

(3) 对于最小相位系统，从控制工程的实践得出，为使系统具有满意的稳定性及对高频干扰的抑制，相位裕度应选在 30° 至 60° ；幅值裕度应大于 6dB。另外，在幅值 Bode 图上，穿越剪切频率的斜率必须大于 -40dB/dec，通常取 -20dB/dec。

7. 二阶系统的稳定裕度

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{j\omega(j\omega + 2\xi\omega_n)} = \frac{\omega_n^2}{\omega\sqrt{\omega^2 + 4\xi^2\omega_n^2}} \angle \left(-90^\circ - \arctan \frac{\omega}{2\xi\omega_n} \right)$$

$$K_g = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{|G(j\omega)|} = \frac{\omega\sqrt{\omega^2 + 4\xi^2\omega_n^2}}{\omega_n^2} = \infty \quad \omega_g = \infty$$



二 闭环频域性能指标

$$\Phi(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)}$$

$$A(\omega) = \left| \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)} \right|$$

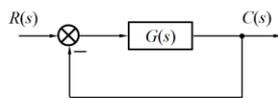
前向通道 $G(s) = \frac{KG_1(s)}{s^v}$

K : 前向通道增益, $G_1(s)|_{s=0} = 1$

$$A(0) = \begin{cases} \frac{1}{K_h}, v \geq 1 \\ \frac{K}{1 + K_h}, v = 0 \end{cases}$$

单位反馈系统 $A(0) = \begin{cases} 1, v \geq 1 \\ \frac{K}{1 + K}, v = 0 \end{cases}$

$1 - A(0)$ 即为单位阶跃响应的稳态误差



- 零频幅值 $A(0)$ $\omega = 0$ 时的闭环幅频特性值
- 相对谐振峰值 M_r 闭环幅频特性最大值与零频特性值之比，即

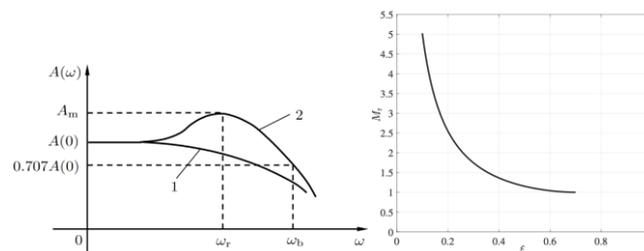
$$M_r = \frac{\max_{\omega} A(\omega)}{A(0)}$$

- 谐振频率 ω_r 出现谐振峰值时的频率，其满足

$$A(\omega_r) = \max_{\omega} A(\omega)$$

- 截止频率 ω_b 闭环幅频特性下降到频率为零时的 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 对应的频率，其满足

$$A(\omega_b) = \frac{\sqrt{2}}{2} A(0)$$



三 性能指标之间的关系

1 闭环频域指标与开环频域指标之间的关系

开环频域指标方便设计，闭环频域指标在设计中很难使用；开环频域指标与闭环频域指标之间联系的纽带是阻尼比。

$$M_r = \frac{A_{\max}}{A(0)} \approx \frac{1}{\sin \gamma} \quad \omega_c = \omega_n \sqrt{\sqrt{4\xi^4 + 1} - 2\xi^2} \quad M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\gamma = \arcsin \frac{1}{M_r} \quad \gamma = \arctan \frac{2\xi}{\sqrt{\sqrt{4\xi^4 + 1} - 2\xi^2}} \quad \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

$$\omega_b = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2 + \sqrt{2 - 4\xi^2 + 4\xi^4}}$$

2 闭环频域指标和时域指标之间的关系

闭环时域指标方便设计；闭环频域指标在设计中很难使用；闭环频域指标与闭环时域指标之间联系的纽带是阻尼比。

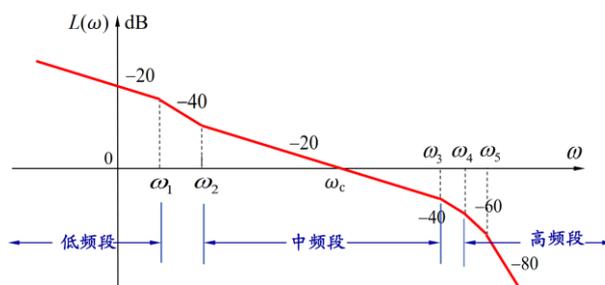
$\sigma_p = \exp\left(\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$ $t_s = \frac{4}{\xi\omega_n}, \Delta = 0.05$ $t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$	$\sigma_p = 0.16 + 0.4(M_r - 1), 1 \leq M_r \leq 1.8$ $\sigma_p = \begin{cases} M_r - 1, & 1 \leq M_r \leq 1.25 \\ 0.5\sqrt{M_r - 1}, & 1.25 < M_r \leq 2 \end{cases}$ $t_s = \frac{\pi}{\omega_c} \left[2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2 \right]$	经验公式
--	--	------

3 开环频域指标和时域指标之间的关系

$\sigma_p = 0.16 + 0.4\left(\frac{1}{\sin \gamma} - 1\right), 34^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$ $t_s = \frac{\pi}{\omega_c} \left[2 + 1.5\left(\frac{1}{\sin \gamma} - 1\right) + 2.5\left(\frac{1}{\sin \gamma} - 1\right)^2 \right]$	经验公式
---	------

四 三频段理论

1. 三频段的划分



2.设计合理的三频段

- (1) 中频段的斜率以 -20dB 为宜;
- (2) 低频段和高频段可以有更大的斜率。低频段斜率大, 提高稳态性能; 高频段斜率大, 排除干扰。
- (3) 中频段必须有足够的带宽, 以保证系的相位裕量, 带宽越大, 相位裕量越大。
- (4) ω_c 的大小取决于系统的快速性要求。 ω_c 大快速性好, 但抗扰能力下降。

3. 开环增益的变化对相位裕量的影响

- (1) 当 h 不变时, 选择 K 使 ω_c 位于几何中点上时, 相位裕量有最大值。
- (2) 最大相位裕度与中频段线段长度有关, h 越大, 中频段线段越长, 最大相位裕量越大。具有 $-20/-1/-20$ 特性, 按上式确定剪切频率的系统, 常称为对称最佳系统。

$$M_r = \frac{h+1}{h-1}$$

$$\begin{cases} \omega_2 \leq \omega_c \frac{M_r - 1}{M_r} \\ \omega_3 \geq \omega_c \frac{M_r + 1}{M_r} \end{cases}$$

五 习题

例2.1 最小相位系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s^2(Ts + 1)}, K > 0, T \neq \tau$$

分析稳定裕度与稳定性的关系。

例2.2 非最小相位系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s(Ts - 1)}, K > 0$$

分析稳定裕度与稳定性的关系。

(课件 P18)

例 2.3: 已知某最小相位系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{40}{s(s^2 + 2s + 25)}$$

求出该系统的幅值裕度和相角裕度。

例 2.3: 某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{6(\frac{s}{2.5} + 1)}{s(\frac{s}{2} + 1)(\frac{s}{12.5} + 1)}$$

求该系统的相位裕度 γ 和幅值裕度 $20 \lg K_g$ 。

P31

例 2.6: 某单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$$

若已知单位速度信号输入下系统的稳态误差 $e_{ss} = 1/9$, 相角裕度 $\gamma = 60^\circ$, 试确定系统的超调 $\sigma\%$ 和调节时间 t_s 。

p119

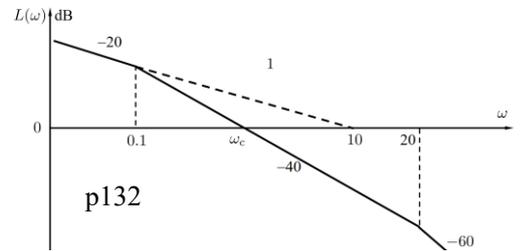
例 2.8: 已知某单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{48(0.1s + 1)}{s(0.05s + 1)(0.01s + 1)}$$

求该系统的剪切频率 ω_c 和相角裕度 γ , 并根据这两个指标确定系统的超调 σ_p 和调整时间 t_s 。

p129

例 2.9: 某最小相位负反馈系统的开环渐近对数幅频特性 $L(\omega)$ 如图所示, 试确定
 (1) 开环传递函数 $G(s)$;
 (2) 根据系统的 γ 确定系统的稳定性;
 (3) 将 $L(\omega)$ 右移 10 倍频, 讨论对系统的影响。



p132

作业题:

1、思考题

- 1.1 相角裕度和幅值裕度的几何意义和物理意义。
 - 1.2 具有正相角裕度的负反馈系统一定是稳定的吗?
 - 1.3 如果一个最小相位负反馈系统是稳定的, 则它一定有正相角裕度吗?
 - 1.4 如果一个最小相位反馈系统具有大的相角裕度, 则它的稳定程度一定很高吗?
 - 1.5 欠阻尼二阶反馈系统一定存在谐振峰值吗? 试给出欠阻尼二阶系统闭环幅频特性的最大值。
- 2、某非最小相位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K(-\tau s + 1)}{s(Ts + 1)}$$

其中, $K > 0, \tau > 0, T > 0$ 。分析该系统稳定裕度与稳定性的关系。

3、设某负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{Ke^{-0.1s}}{s(0.1s + 1)(s + 1)}$$

试通过该系统的频率响应确定剪切频率 $\omega_c = 5 \text{rad/s}$ 时的开环增益 K 。

3、设某负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{Ke^{-0.1s}}{s(0.1s + 1)(s + 1)}$$

试通过该系统的频率响应确定剪切频率 $\omega_c = 5 \text{rad/s}$ 时的开环增益 K 。

4、已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(1 + s)(1 + 3s)}$$

试用 Bode 图方法确定系统稳定的临界增益 K 值。

例 20 设某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(0.01s + 1)(0.1s + 1)} \quad (4.88)$$

- (1) 计算满足闭环系统的 $M_r \leq 1.5$ 时的正环增益 K ;
- (2) 根据相角裕度及幅值裕度分析闭环系统的稳定性;
- (3) 应用经验公式计算该系统的时域性能指标: 超调量 $\sigma\%$ 、调整时间 t_s 。

480

第三章 基于频率特性的校正

一 串联超前校正

相角裕度增加, 剪切频率增加, 中频段和高频段幅值增加。
 单级超前校正难以满足要求时, 可采用多级超前校正。

设计方法 3.1: 相角裕度优先超前校正设计

第 1 步. 根据所要求的稳态性能指标确定系统的开环增益。

第 2 步. 利用已知的开环增益, 绘制原系统的 Bode 图, 并计算未校正系统的剪切频率 ω_{c0} , 相角裕度 γ_0 和幅值裕度 L_{g0} 。

第 3 步. 根据相角裕度的要求确定超前校正环节的 α 。为使相角裕度达到要求值, 计算所需增加的超前相角 φ_m , 即

$$\varphi_m = \gamma - \gamma_0 + \Delta$$

式中 γ 为要求的相角裕度, Δ 是因为考虑到校正装置影响剪切频率的位置而附加的相角, 一般取 $\Delta = 5^\circ \sim 10^\circ$ 。按下式计算 α

$$\alpha = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} \quad (3.2.8)$$

第 4 步. 确定校正后系统的剪切频率 ω_c 。在校正后的剪切频率处, 未校正系统的负幅值由超前校正环节补偿, 因此校正后系统的剪切频率 ω_c 由下式确定

$$20 \lg |G_0(\omega_c)| = -10 \lg \alpha \quad (3.2.9)$$

如果求得的剪切频率满足要求, 则进行下一步; 否则返回第 3 步调整 Δ 。

第 5 步. 确定超前校正环节。让超前校正环节取得最大值的频率对准校正后系统的剪切频率, 即 $\omega_m = \omega_c$ 。根据

$$T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{\alpha}}$$

确定校正装置的时间常数, 进而确定校正环节的传递函数。

第 6 步. 检验系统的性能指标, 若不满足要求, 可增大 Δ 的值, 从第 3 步起重新计算。 

设计方法 3.2: 剪切频率优先超前校正设计

第 1 步. 根据所要求的稳态性能指标确定系统的开环增益;

第 2 步. 利用已知的开环增益, 绘制原系统的 Bode 图, 并计算未校正系统的剪切频率 ω_{c0} , 相角裕度 γ_0 和幅值裕度 L_{g0} ;

第 3 步. 根据设计要求确定校正后系统的剪切频率 ω_c , 并让超前校正环节取最大相角的频率对准该剪切频率, 即 $\omega_m = \omega_c$ 。

第 4 步. 根据幅值补偿确定超前校正环节的 α 。在校正后的剪切频率处, 未校正系统的负幅值由超前校正环节补偿, 因此校正环节的 α 由 ω_c 由下式确定

$$20 \lg |G_0(\omega_c)| = -10 \lg \alpha \quad (3.2.10)$$

根据该式确定的 α , 按下式计算 φ_m

$$\varphi_m = \arcsin \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$

如果 $\varphi_m > \gamma - \gamma_0 + \Delta$, 其中 γ 为所要求的相角裕度, Δ 取 $5^\circ \sim 10^\circ$, 则进行下一步; 否则, 返回第 3 步重新选择剪切频率。

第 5 步. 确定超前校正环节。由第 3 步和第 4 步确定的 ω_m 和 α , 根据

$$T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{\alpha}}$$

确定校正装置的时间常数, 进而确定校正环节的传递函数。

第 6 步. 检验系统的性能指标, 若不满足要求, 可修改剪切频率 ω_c , 从第 3 步起重新计算。 

设计方法 3.3: 相角裕度优先超前校正设计

第 1 步. 根据所要求的稳态性能指标确定系统的开环增益。

第 2 步. 利用已知的开环增益, 绘制原系统的 Bode 图, 并计算未校正系统的剪切频率 ω_{c0} , 相角裕度 γ_0 和幅值裕度 L_{g0} 。

第 3 步. 根据相角裕度的要求确定超前校正环节的 α 。为使相角裕度达到要求值, 计算所需增加的超前相角 φ_m , 即

$$\varphi_m = \gamma - \gamma_0(\omega_{cL}) + \Delta$$

式中 γ 为要求的相角裕度, $\gamma_0(\omega)$ 是未校正系统的在 ω 处的相位储备, ω_{cL} 是所要求的剪切频率的下界, Δ 是因为考虑到校正装置影响剪切频率的位置而附加的相角。按式 (3.2.8) 计算 α 。

第 4 步. 确定校正后系统的剪切频率 ω_c 。在校正后的剪切频率处, 未校正系统的负幅值由超前校正环节补偿, 因此校正后系统的剪切频率 ω_c 由式 (3.2.9) 确定。如果求得的剪切频率满足要求, 则进行下一步; 否则返回第 3 步调整 Δ 。

第 5 步. 确定超前校正环节。让超前校正环节取得最大值的频率对准校正后系统的剪切频率, 即 $\omega_m = \omega_c$ 。根据

$$T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{\alpha}}$$

确定校正装置的转折频率, 进而确定校正环节的传递函数。

第 6 步. 检验系统的性能指标, 若不满足要求, 可增大 Δ 的值, 从第 3 步起重新计算。

二 串联迟后校正

校正原理: 1. 利用校正装置高频段的幅值衰减特性, 降低剪切频率; 利用自身的相位储备提高相位裕度。
2. 维持动态特性基本不变, 提高稳态精度。

$$G_c(s) = \frac{\tau s + 1}{\beta \tau s + 1}, \quad \beta > 1$$

$$G_c(s) = \beta \frac{\tau s + 1}{\beta \tau s + 1}$$

设计方法 3.4: 相位裕度优先迟后校正设计

第 1 步. 按稳态性能的要求确定系统的型别与开环增益。

第 2 步. 利用已知的开环增益, 绘制未校正系统 $G_0(s)$ 的 Bode 图, 并计算未校正系统的剪切频率 ω_{c0} , 相角裕度 γ_0 和幅值裕度 L_{g0} 。

第 3 步. 确定校正后系统的剪切频率 ω_c 。该剪切频率应该满足下式

$$180^\circ + \angle G_0(j\omega_c) = \gamma + \Delta$$

式中 γ 为要求的相角裕度, Δ 是由于校正装置产生的相位迟后效应而附加的相角。

第 4 步. 确定校正装置的 β 值。为了使校正后的系统在剪切频率 ω_c 处的幅频特性为 0dB, 应有

$$20 \lg |G_0(j\omega_c)| - 20 \lg \beta = 0$$

即

$$\beta = |G_0(j\omega_c)|$$

第 5 步. 确定迟后校正环节的参数 τ 。为了减小串联迟后校正对系统相位裕度的影响, 要求校正环节在剪切频率 ω_c 处的迟后相移在 $6^\circ \sim 12^\circ$ 以下, 应选择

$$\frac{1}{\tau} = \left(\frac{1}{5} \sim \frac{1}{10} \right) \omega_c$$

第 6 步. 校验校正后系统的相位裕度和其余性能指标。如不满足要求, 可增大 Δ 从第 3 步重新计算, 直到满足要求。

设计方法 3.5: 剪切频率优先迟后校正设计

第 1 步. 按稳态性能的要求确定系统的型别与开环增益。

第 2 步. 利用已知的开环增益, 绘制未校正系统 $G_0(s)$ 的 Bode 图, 并计算未校正系统的剪切频率 ω_{c0} , 相角裕度 γ_0 和幅值裕度 L_{g0} 。

第 3 步. 根据剪切频率设计要求确定校正后系统的剪切频率 ω_c , 该剪切频率应该满足下式

$$180^\circ + \angle G_0(j\omega_c) > \gamma + \Delta$$

式中 γ 为要求的相角裕度, Δ 是考虑到迟后校正装置的相位延迟而附加的相角。

第 4 步. 根据下式确定校正装置的 β 值

$$20 \lg |G_0(j\omega_c)| - 20 \lg \beta = 0$$

第 5 步. 按下式确定迟后校正环节的参数 τ

$$\frac{1}{\tau} = \left(\frac{1}{5} \sim \frac{1}{10} \right) \omega_c$$

第 6 步. 校验校正后系统的相位裕度和其余性能指标。如不满足要求, 可增大 Δ 从第 3 步重新计算, 直到满足要求。

三 串联 迟后-超前校正

1 迟后环节优先的迟后-超前校正

在此设计方法中, 迟后校正的主要作用是降低系统的剪切频率, 不关注它对系统相角裕度的影响; 相角裕度提高的任务交给超前校正环节。

尽管如此, 由于迟后校正环节降低了剪切频率, 通过利用原系统的相位储备, 迟后校正后系统的相角裕度事实上得到了部分提升。

具体步骤见例题

2 超前环节优先的迟后-超前校正

设计方法 3.9: 迟后环节降低剪切频率的超前环节优先迟后-超前校正设计

第 1 步. 按稳态性能的要求确定系统的型别与开环增益。利用已知的开环增益, 绘制未校正系统 $G_0(s)$ 的 Bode 图, 并计算未校正系统的剪切频率 ω_{c0} , 相角裕度 γ_0 和幅值裕度 L_{g0} 。

第 2 步. 选取满足要求的剪切频率 ω_c , 确定超前校正环节 $G_{c1}(s)$ 的传递函数

$$G_{c1}(s) = \frac{\alpha Ts + 1}{Ts + 1}$$

为使最终校正系统的相角裕度达到设计要求, 超前环节提供的超前相角 φ_m 为

$$\varphi_m = \gamma - \gamma_0(\omega_c) + \Delta_1 + \Delta_2$$

式中 γ 为所要求的相角裕度, $\gamma_0(\omega_c)$ 是未校正系统在 $\omega = \omega_c$ 处的相位储备, Δ_1 是为保证足够的相角裕度而附加的相角, Δ_2 是为了抵消迟后校正环节所产生的相位延迟而附加的相角。参数 α 由下式确定

$$\alpha = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m}$$

使超前校正环节的最优频率 ω_m 位于 ω_c 处, 即 $\omega_m = \omega_c$ 则超前校正环节的时间常数 T 为

$$T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{\alpha}}$$

第3步. 根据超前校正后的系统 $G_1(s) = G_0(s)G_{c1}(s)$ 确定迟后校正环节

$$G_{c2}(s) = \frac{\tau s + 1}{\beta \tau s + 1}$$

为使校正后系统的剪切频率在 $\omega = \omega_c$ 处, 需要利用迟后校正的幅值衰减特性将 $G_1(s)$ 在 $\omega = \omega_c$ 的正幅值下拉到 0dB 线, 即

$$20 \lg \beta = 20 \lg |G_1(j\omega_c)|$$

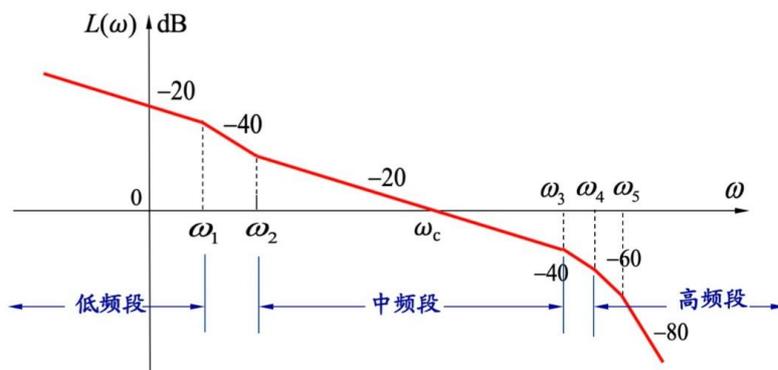
为了减小串联迟后校正对系统相位裕度的影响, 要求校正环节在剪切频率 ω_c 处的迟后相移在 $5^\circ \sim 10^\circ$ 以下, 应选择

$$\frac{1}{\tau} = \left(\frac{1}{5} \sim \frac{1}{10} \right) \omega_c$$

第4步. 检验校正后系统 $G(s) = G_1(s)G_{c2}(s)$ 的性能指标。如果不满足, 返回第2步。

超前校正的作用主要是增大相角裕量, 并保证较大的剪切频率迟后校正的作用则是使超前校正后 ω_c 处的幅值衰减到 0 dB。

四 期望频率特性法



设计方法 3.17: 期望频率特性校正设计

第1步. 根据稳态误差确定型别 ν 和开环增益 K , 并绘制未校正系统 $G_0(s)$ 的幅频特性。期望频率特性的低频段与未校正系统低频段相同, 即为

$$G_L(s) = \frac{K}{s^\nu}$$

第2步. 根据对系统的动态特性要求, 确定期望特性的中频段特性, 包括剪切频率、上限角频率和下限角频率, 并使其斜率为 -20dB/dec

第3步. 确定期望特性低频段和中频段的过渡特性, 其斜率一般取 -40dB/dec 。

第4步. 确定期望特性的高频段特性。高频段应尽量等于或平行于校正前的高频段。

第5步. 确定期望特性中频段和高频段的过渡特性, 其斜率一般取 -40dB/dec 。

第6步. 基于以上步骤确定期望频率特性 $G(s)$, 并检验性能指标。如不满足, 返回第2步重新设计。

第7步. 根据期望频率特性 $G(s)$ 和校正前的频率特性 $G_0(s)$ 确定校正装置的传递函数 $G_c = \frac{G(s)}{G_0(s)}$ 。

根据系统的三频段理论，对稳态误差的要求主要由系统的低频段决定。根据稳态误差确定了型别 ν 和开环增益 K ，则期望频率特性的低频段特性即为

$$G_L(s) = \frac{K}{s^\nu}$$

设计方法 3.16: 最小峰值法确定中频段

$$\begin{aligned}\sigma_p &= 0.16 + 0.4(M_r - 1) \\ t_s &= \frac{\pi}{\omega_c} [2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2] \\ \omega_2 &\leq \omega_c \frac{M_r - 1}{M_r}, \quad \omega_3 \geq \omega_c \frac{M_r + 1}{M_r}\end{aligned}$$



五 反馈校正

1 反馈校正的功能

- (1) 改变局部结构和参数
- (2) 降低参数敏感性
- (3) 等效串联反馈
- (4) 消除不希望的折点

六 习题

例 3.2: 某反馈控制系统不可变部分的传递函数为

$$G_0(s) = \frac{K}{s(0.1s + 1)} \quad (3.2.7)$$

设计串联控制器 $G_c(s)$ 和 K ，使得系统在 $r(t) = t$ 的作用下稳态误差小于 0.01，相位裕度大于 45° ，剪切频率 $\omega_c > 40\text{rad/s}$ 。

例 3.3: 设某控制系统不可变部分的开环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{K}{s(0.001s + 1)(0.1s + 1)}$$

要求该系统具有如下性能指标

- (1) 响应匀速信号 $r(t) = R_1 t$ 的稳态误差不大于 $0.001R_1$ ，其中 R_1 为常量；
- (2) 剪切频率 $\omega_c > 165\text{rad/s}$ ；
- (3) 相角裕度 $\gamma > 45^\circ$ ；
- (4) 幅值裕度 $20 \lg K_g \geq 15 \text{ dB}$ 。

试应用频率响应法确定串联超前校正参数。

例 3.4: 某反馈控制系统的开环传递函数为

5.13

$$G_0(s) = \frac{10}{s(0.05s + 1)(0.25s + 1)}$$

要求校正后系统的相对谐振峰值 $M_r < 1.4$ ，谐振频率 $\omega_r > 10\text{rad/s}$ 。试设计一个串联超前校正环节。

例 3.7: 设原系统的开环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{K}{s(0.1s + 1)(0.2s + 1)}$$

要求满足性能指标:

- (1) 系统型别 $\nu = 1$;
- (2) 开环速度增益 $K_v = 25\text{s}^{-1}$;
- (3) 剪切频率 $\omega_c \geq 2.5\text{rad/s}$;
- (4) 相位裕度 $\gamma \geq 40^\circ$ 。

试设计串联校正装置。

例 3.8: 某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{100(0.05s + 1)}{s(0.1s + 1)(0.01s + 1)}$$

该系统近似对数幅频特性为

，提高稳态精度到 0.002

例 3.9: 某反馈控制系统的开环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{K}{s(\frac{1}{6}s + 1)(\frac{1}{2}s + 1)}$$

要求满足下列性能指标:

- (1) 系统为 I 型，开环增益为 $K_v = 180\text{s}^{-1}$;
- (2) 剪切频率 $\omega_c \geq 3.5\text{rad/s}$;
- (3) 相角裕度 $\gamma \geq 40^\circ$ 。

一定的剪切频率，

例 3.10: 某单位反馈系统中未校正对象的传递函数为

$$G_0(s) = \frac{K}{s(0.1s + 1)(0.01s + 1)}$$

要求校正后系统的静态速度误差系数 $K_v \geq 100$ ，相角裕度 $\gamma \geq 40^\circ$ ，剪切频率 $\omega_c = 20\text{rad/s}$ ，试设计串联校正环节。

例 3.10: 某单位反馈系统的不可变部分为传递函数为

$$G_0(s) = \frac{K}{s(0.1s + 1)(0.2s + 1)}$$

若要求校正后系统满足

- (1) 速度误差系数 $K_v = 30$;
- (2) 相角裕度 $\gamma \geq 40^\circ$;
- (3) 增益裕度 $20\lg K_g \geq 10\text{dB}$;
- (4) 剪切频率 $\omega_c \geq 5\text{rad/s}$

试设计串联校正装置。

例 3.17: 设一位置随动系统不可变部分的传递函数为

$$G_0(s) = \frac{K_c}{s(0.1s + 1)(0.02s + 1)(0.01s + 1)(0.005s + 1)}$$

要求满足性能指标:

- (1) 误差系统 $c_0 = 0$ 及 $c_1 = 1/200s$;
- (2) 单位阶跃响应超调量 $\sigma_p \leq 30\%$;
- (3) 单位阶跃响应调整时间 $t_s \leq 0.7s$;
- (4) 幅值裕度 $20\lg K_g \geq 6\text{dB}$ 。

例 3.18: 设单位反馈系统的开环传递函数为

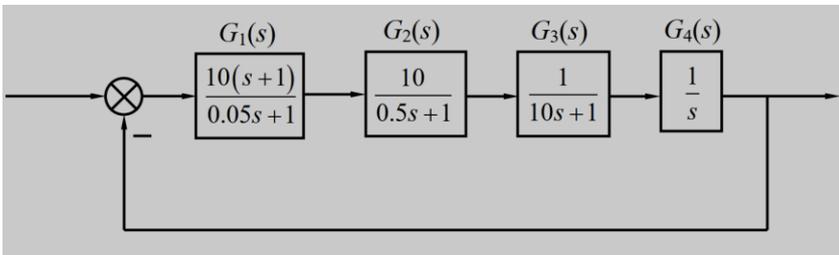
$$G_0(s) = \frac{K}{s(1 + 0.12s)(1 + 0.02s)}$$

采用期望特性校正方法设计串联校正装置, 使系统满足:

- (1) 速度误差系数 $K_v \geq 70s^{-1}$;
- (2) 调整时间 $t_s \leq 1s$;
- (3) 超调 $\sigma_p \leq 40\%$ 。

例 3.16: 控制系统的方框图如图3.25所示。要求满足下列性能指标:

- (1) 在输入信号 $r(t) = t$ 作用下, 稳态误差 $e_{ss} \leq \frac{1}{150}$;
 - (2) 单位阶跃响应的超调量 $\sigma_p \leq 30\%$;
 - (3) 单位阶跃响应调整时间 $t_s \leq 1s$;
- 设计反馈校正。



1. 设某控制系统不可变部分的开环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{K}{s(0.001s + 1)(0.1s + 1)}$$

要求该系统具有如下性能指标

- (1) 响应匀速信号 $r(t) = R_1 t$ 的稳态误差不大于 $0.001R_1$, 其中 R_1 为常量;
- (2) 剪切频率 $\omega_c > 185\text{rad/s}$;
- (3) 相角裕度 $\gamma > 45^\circ$;

试应用频率响应法确定串联超前校正参数。

2. 设某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{10}{s(0.1s + 1)(0.5s + 1)}$$

试绘出系统开环频率响应的 Bode 图, 并求出其相角裕度与幅值裕度。当采用传递函数为

$$G_c(s) = \frac{0.23s + 1}{0.023s + 1}$$

的串联校正环节时, 试计算校正系统的相角裕度和幅值裕度, 并简述校正系统的性能有何改进。

1. 设一单位反馈系统，其开环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{126}{s(0.1s+1)(0.00166s+1)}$$

要求校正后系统的相位裕度 $r(\omega_c) = 40^\circ \pm 2^\circ$ ，幅值裕度不小于 10dB，剪切频率 $\omega_c \geq 1 \text{ rad/s}$ ，

且开环增益保持不变，试确定串联迟后校正装置。

2. 设一单位反馈系统，其开环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{10}{s(0.2s+1)(0.5s+1)}$$

要求校正后的具有相位裕度不小于 45° ，幅值裕度不小于 6dB 的性能指标，试分别采用串联超前校正和串联滞后校正两种方法确定校正装置。

3. 设某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_v}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$$

要求:

- (1) 系统开环增益 $K_v = 30 \text{ s}^{-1}$;
- (2) 系统相角裕度 $\gamma \geq 45^\circ$;
- (3) 系统截止频率 $\omega_b \geq 12 \text{ rad/s}$ 。

试确定串联迟后-超前校正环节的传递函数。【所讲两种方法都要做】

第四章 基于根轨迹的校正

一 基本思想

性能指标以时域量形式给出时，适合于采用根轨迹法设计串联校正装置。给出的时域指标如阻尼比 ξ ，自然振荡频率 ω_n ，最大超调量 σ_p ，调整时间 t_s 。

设计时一般根据性能指标要求确定闭环主导极点，设计校正装置，使校正后的根轨迹通过期望的闭环主导极点。

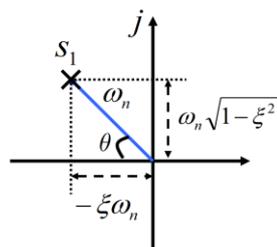
如果给定的期望指标是阻尼比和自然振荡频率，则闭环主导极点为

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

对于闭环主导极点 s_1 ，有

$$\theta = \arccos \xi$$

$$|s_1| = \omega_n$$

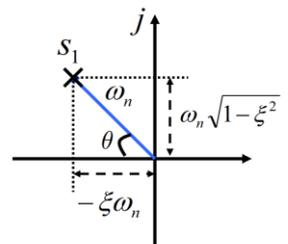


如果给定超调量和调节时间，则有

$$\begin{cases} \sigma\% = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \times 100\% & \longrightarrow \xi \\ t_s = \frac{3.5}{\xi\omega_n} & \longrightarrow \omega_n \end{cases}$$

闭环主导极点为

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

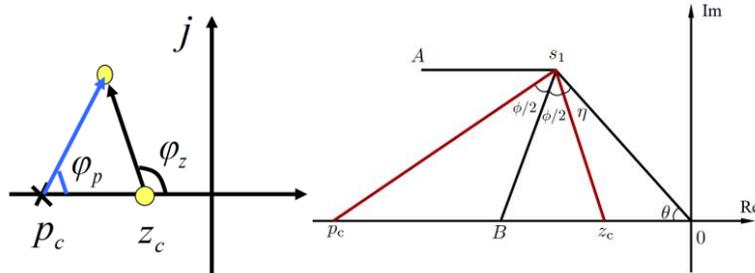


二 超前校正

超前网络传函为:

$$G_c(s) = K_c \frac{\alpha T s + 1}{T s + 1} = K_c \alpha \frac{s - z_c}{s - p_c}$$

给开环系统补充了一个零点和一个极点，极点总在零点左侧，超前网络会使系统根轨迹向左移动。



超前网络产生的幅角 $\varphi_c = \varphi_z - \varphi_p > 0$, φ_c 不宜太大，否则难以实现。

校正后，期望主导极点应该在系统根轨迹上满足幅角条件。

$$\angle G(s_1) = \angle G_0(s_1) + \angle G_c(s_1) = (2l + 1)180^\circ$$

$$|G_0(s_1)| |G_c(s_1)| = |G_0(s_1)| K_c \alpha \frac{|s_1 - z_c|}{|s_1 - p_c|} = 1$$

设计方法 4.1: 基于根轨迹的超前校正设计

第 1 步. 根据性能指标要求，确定闭环主导极点 s_1 的期望位置。

第 2 步. 画出未校正系统的根轨迹。如果根轨迹通过闭环主导极点的期望位置，则简单调整开环增益即可产生期望的闭环极点。如果闭环主导极点的期望位置在根轨迹的左侧，则采用超前校正。

第 3 步. 对于期望的闭环主导极点 s_1 ，按下式确定超前校正环节应产生的幅角 ϕ

$$\phi = (2l + 1)180^\circ - \angle G_0(s_1)$$

第 4 步. 按下式确定超前校正环节的零点 z_c 和极点 p_c

$$\angle(s_1 - z_c) - \angle(s_1 - p_c) = \phi$$

第 5 步. 根据根轨迹幅值条件，按照下式确定超前校正环节的增益 K_c

$$K_c = \frac{|z_c| |s_1 - p_c|}{|G_0(s_1)| |p_c| |s_1 - z_c|}$$

进而确定超前校正环节的传递函数为

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{s - z_c}{s - p_c}$$

第 6 步. 对于设计好的串联校正环节，检查校正后系统的动态性能指标是否满足设计要求。如果不满足，则需要调整主导极点的位置，重复上述设计过程。

最小零极比法:

定理 4.1

给定具有阻尼角为 θ 的主导极点 s_1 ，若超前环节 (4.3.1) 在 s_1 处提供的超前角为 ϕ ，则超前环节 (4.3.1) 的一组零极点由下式确定

$$\begin{cases} p_c = -|s_1| \frac{\cos \frac{1}{2}(\phi - \theta)}{\cos \frac{1}{2}(\theta + \phi)} \\ z_c = -|s_1| \frac{\cos \frac{1}{2}(\phi + \theta)}{\cos \frac{1}{2}(\phi - \theta)} \end{cases} \quad (4.4.1)$$

定理 4.2

给定复平面第二象限的点 s_1 和角度 φ ，而 $p_c < z_c$ 是负实轴上使 $\angle z_c s_1 p_c = \varphi$ 为两个动点。令 $\angle z_c 0 s_1 = \theta$ ，则当 $\angle 0 s_1 z_c = \frac{1}{2}(180^\circ - \theta - \varphi)$ 时，比值 $\alpha = \frac{|p_c|}{|z_c|}$ 最小，且最小值 α_{\min} 为

$$\alpha_{\min} = 1 + \frac{2 \sin \theta \sin \varphi}{\cos(\theta + \varphi) + 1}$$

幅值确定法:

$$G_c(s) = \frac{\alpha T s + 1}{T s + 1} = \alpha \frac{s - z_c}{s - p_c} \quad \frac{1}{\tan \eta} = \frac{M}{k} \frac{1}{\sin \phi} - \frac{1}{\tan \phi} \quad M/k = 1/|G_0(s_1)|$$

三 迟后校正

设计方法 4.2: 基于根轨迹的迟后校正

第 1 步. 用原系统的开环传递函数 $G_0(s)$ 做出原系统的根轨迹，确认调整开环增益可以使原系统的动态性能满足设计指标。

第 2 步. 在原系统的根轨迹上确定闭环主导极点 s_1 ，并求出点 s_1 对应的开环增益 K_0 。

第 3 步. 根据控制系统的设计要求，求出满足稳态误差设计指标的开环增益 K ，即校正以后应有的开环增益。

第 4 步. 为了使点 s_1 的开环增益 K_0 增大到 K ，则有

$$\beta = \frac{K}{K_0} \quad (4.5.2)$$

按照串联迟后校正的条件，极点 p_c 和零点 z_c 应充分接近并靠近原点，按照

$$\beta = \frac{z_c}{p_c}$$

可以确定校正环节的零极点值。至此，串联迟后校正环节的参数全部计算完成。

第 5 步. 绘制出校正后的根轨迹图，检验系统的动态性能指标和静态稳态性能指标。

四 迟后-超前校正

串联超前校正的作用在于改善系统的动态性能

串联迟后校正的作用在于减小系统的稳态误差

五 反馈校正

六 例题

例 4.4: 设系统不可变部分的传递函数为

$$G_0(s) = \frac{800K_v}{s(s+4)(s+10)(s+20)}$$

例4.1 某典型二阶系统的开环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$

要求满足性能指标:

- (1) 开环增益 $K_v = 12s^{-1}$;
- (2) 超调量 $\sigma_p < 20\%$;
- (3) 调整时间 $t_s \leq 2.6s (\Delta = 0.05)$;
- (4) 系统带宽不大于 $0 \sim 5rad/s$ 。

要求性能指标: $\sigma\% \leq 20\%$ $t_s \leq 2s$

试用根轨迹法确定串联超前校正装置

试确定近似 PI 控制器实现的串联迟后校正参数。

例 4.3: 设单位反馈系统的不可变部分的传递函数为

$$G_0(s) = \frac{k}{s(s+5)(s+20)}$$

要求单位阶跃响应的超调量 $\sigma_p \leq 25\%$, 调整时间 $t_s \leq 0.7s (\Delta = 0.02)$, 开环增益 $K_v \geq 12s^{-1}$ 。试确定通过带惯性的 PD 控制器实现的串联超前校正的参数 T 及 α 。

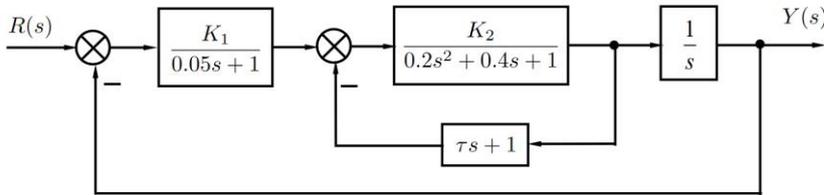
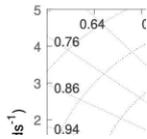
例 4.5: 已知单位反馈系统原有前向传递函数为

$$G_0(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)}$$

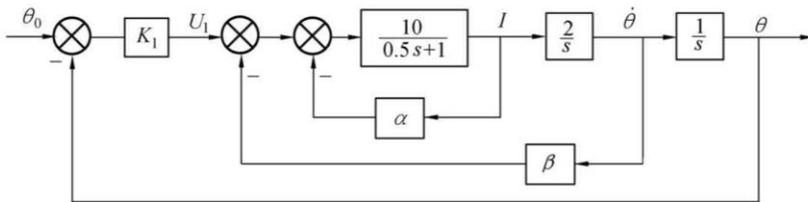
要求闭环系统满足下列性能指标:

- (1) 开环增益 $K_v = 5$;
- (2) 超调量 $\sigma_p \leq 20\%$;
- (3) 调整时间 $t_s \leq 10s (\Delta = 0.05)$ 。

试求串联校正环节及其参数。



例 4.7: 控制系统的结构图如图4.16所示, 欲采用局部反馈来改善系统的性能, 要求大闭环系统的闭环主导极点为 $s_{1,2} = -3 \pm j\sqrt{3}$, 需要确定 K_1 , K_2 和 τ 的值。



例 4.8: 图4.20是一个力矩电机驱动的低速转台伺服系统, 拟采用电流反馈和速度反馈来改进系统的性能, 使大回路的闭环主导极点为 $s_{1,2} = -2 \pm j2$, 求电流反馈系数 α 、速度反馈系数 β 和放大器的增益 K_1 。

1. 一个磁带驱动的速度控制系统，其传递函数如图 1 所示。其中，速度传感器的响应速度足够快，可以忽略其动态过程，图中显示的是等效的单位反馈系统。
 - (a) 假设 $\Omega_r = 0$ ，求系统对阶跃干扰转矩 $1 \text{ N}\cdot\text{m}$ 的稳态误差。为使稳态误差 $e_{ss} \leq 0.01 \text{ rad/s}$ ，放大器的增益 K 必须是多少？
 - (b) 若复平面上画出闭环系统的根，并用(a)中得到的 K 值，精确地画出系统对阶跃输入的时间响应。
 - (c) 若要求 2% 的调节时间 $t_s \leq 0.1 \text{ s}$ ，超调量 $M_p \leq 5\%$ ，在复平面画出系统闭环极点应在的区域。
 - (d) 采用 PD 控制器 $K_p + K_D s$ 替代放大器，确定参数 K_p 和 K_D ，以满足上述系统要求。
 - (e) 应用(d)的控制器后，系统对干扰的稳态误差如何变化？怎样能够将干扰转矩引起的稳态误差完全抑制？

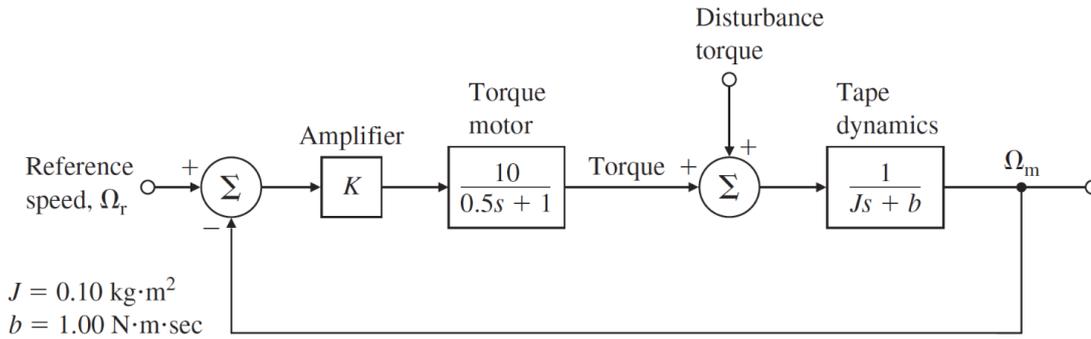


图 1 磁带驱动的速度控制系统

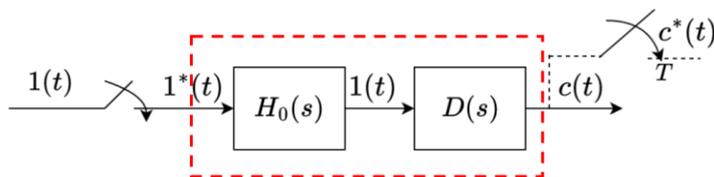
第五章 离散控制系统的校正

一 模拟化设计

离散系统模拟化校正的思路

- 1) 根据指标，考虑零阶保持器影响，用连续系统理论设计校正装置 $D(s)$ ；
- 2) 对 $D(s)$ 进行离散化，确定数字校正装置的脉冲传递函数 $D(z)$ ；
- 3) 检查离散控制系统的性能是否满足要求；
- 4) 写出 $D(z)$ 的差分方程（递推形式），编制程序实现相应的控制规律；
- 5) 检验设计的正确性。

1. 阶跃响应不变法



具有零阶保持器的连续对象在单位阶跃序列 $1^*(t)$ 作用下的输出，等于连续对象在单位阶跃信号 $1(t)$ 作用下的输出

$$D(z) = Z \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} D(s) \right]$$

2. 替换法

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T}$$

$$D(z) = D(s) \Big|_{s = \frac{1 - z^{-1}}{T}}$$

3. 双线性变换

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

说明 6.1

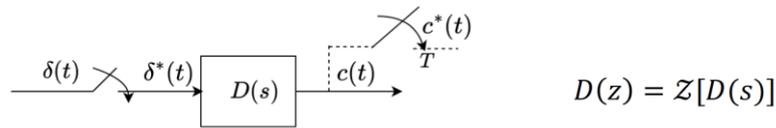
一般来说，连续控制器 $D(s)$ 的零点数少于极点数，但经双线性变换后的离散控制器 $D(z)$ 的零极点数相等。这可做如下解释：由于双线性变换将整个 s 平面一一对应变换到 z 平面，因此 $D(s)$ 在无穷远处的零点，经双线性变换后被变换到 $z = -1$ 处。

4. 根匹配法

$$(s + a) \rightarrow 1 - e^{-aT} z^{-1}$$

在采用根匹配法进行离散化时，除了确定零极点外，还应确定增益 K_z 。该增益的确定可以从这几个方面考虑：数字控制器与模拟控制器的增益、某种输入信号的稳态误差等。

5. 脉冲响应不变法



例： $D(s) = \frac{a}{s+a}$ ，利用脉冲响应不变法进行离散化。

解： $D(z) = Z[D(s)] = \frac{a}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$

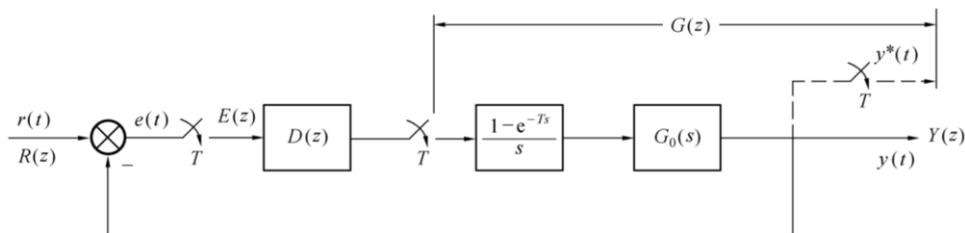
对 $D(s) = \frac{a}{s+a}$ 离散化

方法	阶跃响应不变	一阶后向差分	双线性变换	根匹配法	脉冲响应不变
$D(z)$	$\frac{z^{-1} - e^{-aT} z^{-1}}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$	$\frac{aT}{1 + aT - z^{-1}}$	$\frac{aT(1 + z^{-1})}{2 + aT - (2 - aT)z^{-1}}$	$\frac{(1 - e^{-aT})/a}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$	$\frac{a}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$
零点	无	$z = 0$	$z = -1$	$z = 0$	$z = 0$
极点	$z = e^{-aT}$	$z = \frac{1}{1 + aT}$	$z = \frac{2 - aT}{2 + aT}$	$z = e^{-aT}$	$z = e^{-aT}$

二 离散化设计

数字校正设计思路

- 期望特性校正法



- 期望 $\Phi(z), \Phi_e(z)$
- $\Phi(z) = \frac{G(z)D(z)}{1 + G(z)D(z)}, \Phi_e(z) = \frac{1}{1 + G(z)D(z)} = 1 - \Phi(z)$
- $G(z)D(z) = \frac{\Phi(z)}{\Phi_e(z)}$
- $D(z) = \frac{\Phi(z)}{\Phi_e(z) \cdot G(z)}$

最少拍设计：对典型信号能在有限拍内结束过渡过程。

$$Z[1(t)] = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$Z[t] = \frac{Tz}{(z-1)^2} = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

$$Z\left[\frac{1}{2}t^2\right] = \frac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3} = \frac{T^2z^{-1}(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})^3}$$

$$E(z) = \Phi_e(z) \frac{A(z)}{(1-z^{-1})^r}$$

$$e_{ss}^*(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \frac{A(z)}{(1-z^{-1})^r} \Phi_e(z)$$

$$e_{ss}^*(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \frac{A(z)}{(1-z^{-1})^r} \Phi_e(z) = 0$$

闭环误差传递函数 $\Phi_e(z) = (1-z^{-1})^r F(z)$

$$E(z) = \Phi_e(z)R(z) = (1-z^{-1})^r F(z) \frac{A(z)}{(1-z^{-1})^r} = F(z)A(z)$$

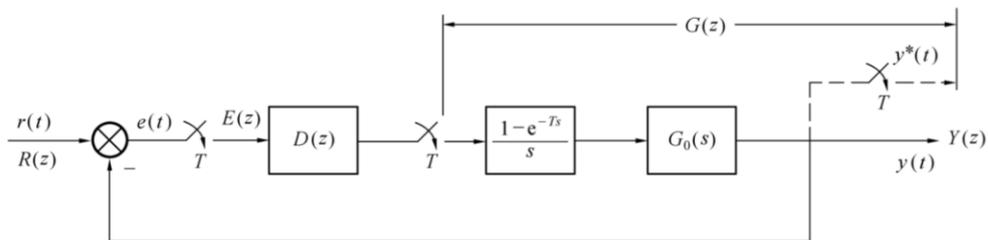
$$Y(z) = \Phi(z)R(z) = [1-\Phi_e(z)]R(z) = R(z) - F(z)A(z)$$

为使得在最少的几拍内结束过渡过程，在采样点上无稳态误差，要求误差信号的脉冲序列 $e^*(t)$ 只含有最少的几项。若经过 N 拍过渡过程结束，在采样点上无稳态误差，则误差脉冲序列为

$$e^*(t) = e(0)\delta(t) + e(T)\delta(t-T) + \dots + e(NT)\delta(t-NT)$$

$$E(z) = e(0) + e(T)z^{-1} + \dots + e(NT)z^{-N}$$

■ 广义脉冲传递函数不含纯延迟环节和单位圆外的零极点



$$E(z) = \Phi_e(z)R(z) = (1-z^{-1})^r F(z) \frac{A(z)}{(1-z^{-1})^r} = F(z)A(z) \quad \xrightarrow{F(z)=1} \quad \Phi_e(z) = (1-z^{-1})^r$$

$$Y(z) = \Phi(z)R(z) = [1-\Phi_e(z)]R(z) = R(z) - F(z)A(z) \quad \xrightarrow{F(z)=1} \quad \Phi(z) = 1 - (1-z^{-1})^r$$

表 6.1: 最少拍系统的闭环脉冲传递函数及调整时间

最少拍无差控制器脉冲传递函数 $D(z) = \frac{1 - (1-z^{-1})^r}{(1-z^{-1})^r G(z)}$

典型输入		闭环脉冲传递函数		调整时间
$r(t)$	$R(z)$	$\Phi(z)$	$\Phi_e(z)$	t_s
$1(t)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	z^{-1}	$1-z^{-1}$	T
t	$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$2z^{-1} - z^{-2}$	$1 - 2z^{-1} + z^{-2}$	$2T$
$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{T^2z^{-1}(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})^3}$	$3z^{-1} - 3z^{-2} + z^{-3}$	$(1-z^{-1})^3$	$3T$

如果广义对象 $G(z)$ 含有纯延迟因子 z^{-L} ，即

$$G(z) = G_1(z)z^{-L} \quad (6.3.9)$$

其中， L 是大于 1 的正整数， $G_1(z)$ 中不含纯延迟因子。闭环脉冲传递函数可写成

$$\Phi(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)} = \frac{D(z)G_1(z)z^{-L}}{1 + D(z)G_1(z)z^{-L}} \quad (6.3.10)$$

对于 $G(z)$ 中的纯延迟因子 z^{-L} ，不要试图用 $D(z)$ 来对消，因为这样就会要求 $D(z)$ 中有超前因子 z^L ，就是要求数字控制器在输入之前就有响应，这是物理上不能实现的。所以如果广义对象 $G(z)$ 含有纯延迟因子 z^{-L} ，那么 $\Phi(z)$ 中至少也应含有相同的延迟因子 z^{-L} 。

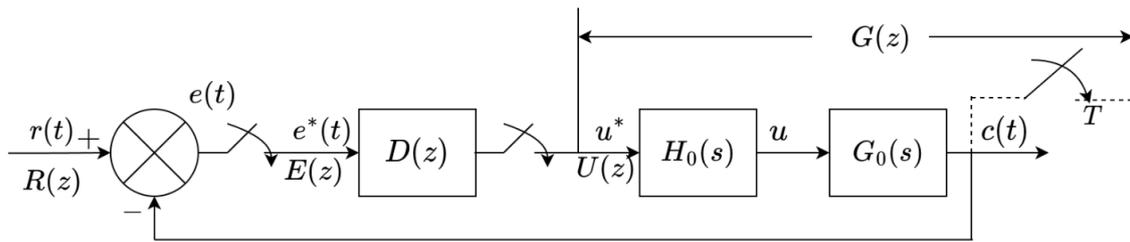
假设 $G(z)$ 有单位圆外及单位圆上的零点 b_1, b_2, \dots, b_u 单位圆外及单位圆上的极点 a_1, a_2, \dots, a_v

设计方法 6.1: 离散化设计的设计原则

- (1) $\Phi(z)$ 应含有与 $G(z)$ 在单位圆上、圆外零点相同的零点。
- (2) $\Phi_e(z)$ 应含有与 $G(z)$ 在单位圆上、圆外极点相同的零点。
- (3) 考虑到 $\Phi(z) = 1 - \Phi_e(z)$ ， $\Phi(z)$ 应与 $\Phi_e(z)$ 是阶次相同的 z^{-1} 的多项式。

- **快速性**：按单位斜坡输入设计的最少拍系统，在各种典型输入作用下，其动态过程均为二拍；
- **准确性**：系统对单位阶跃输入和单位斜坡输入，在采样时刻均无稳态误差，但对单位加速度输入，采样时刻上的稳态误差为常量 T^2 ；
- **动态性能**：系统对单位斜坡输入下的响应性能较好，因为系统本身就是针对此而设计的，但系统对单位阶跃输入响应性能较差，有 100% 的超调量，故按某种典型输入设计的最少拍系统，适应性较差；
- **平稳性**：在各种典型输入作用下系统进入稳态以后，在非采样时刻一般均存在纹波，从而增加系统的机械磨损，故上述最少拍系统的设计方法，只有理论意义，并不实用。

最少拍系统产生纹波的原因



零阶保持器的输入序列（以例6.9为例）

$$E(z) = \Phi_e(z)R(z) = Tz^{-1}$$

$$U(z) = D(z)E(z) = \frac{0.543z^{-1} - 0.471z^{-2} + 0.1z^{-3}}{1 - 0.283z^{-1} - 0.717z^{-2}}$$

$$= 0.543z^{-1} - 0.317z^{-2} + 0.4z^{-3} - 0.114z^{-4} + 0.255z^{-5}$$

$$- 0.01z^{-6} + 0.18z^{-7} - \dots$$

经过二拍以后，零阶保持器的输入序列 $u(nT)$ 并不是常值脉冲，而是围绕平均值上下波动，从而保持器的输出电压 $u(t)$ 在二拍以后也围绕平均值波动。这样的电压加在电机上，必然使电机转速不平稳，产生输出纹波。

因此，无纹波输出要求序列 $u(nT)$ 在有限个采样周期后，达到相对稳定（不波动）。

三 例题

例 6.1: 给定模拟控制器的传递函数为

$$D(s) = \frac{a}{s+a}, \text{ 求 } D(z)$$

例 6.3: 已知

$$D(s) = \frac{20(s+4)}{s+10}$$

采样周期为 $T = 0.015$ ，利用后向差分求 $D(s)$ 的离散化表达式。

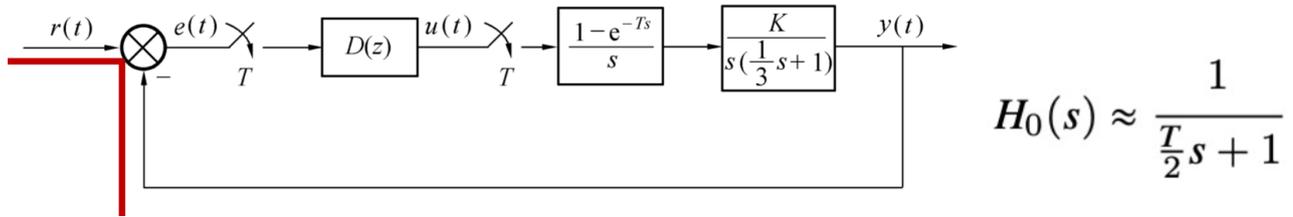
例 6.4: 将如下连续校正装置

$$D(s) = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 1}$$

在采样周期为 $T = 1\text{sec}$ 的情形下，通过双线性变换获得其离散化形式。

例 6.6: 给定连续控制器 $D(s) = \frac{20(s+4)}{s+10}$ ，在采样周期为 $T = 0.015\text{sec}$ 时用根匹配法设计离散控制器及控制差分方程。

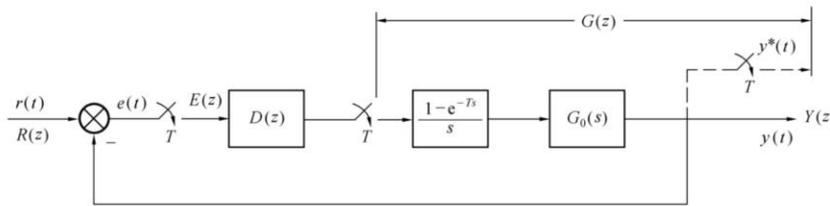
例 6.8: 一个计算机控制系统的框图如图6.5所示。要求系统的开环放大倍数瓦 $K_v > 30s^{-1}$ ，剪切频率 $\omega_c \geq 15\text{rad/s}$ ，相位裕度 $\gamma \geq 45^\circ$ 。试用模拟化方法设计数字控制器 $D(z)$ 。



例 6.9: 设结构如图 6.10.1 所示单位反馈线性离散系统被控对象及零阶保持的传递函数分别为

$$G_0(s) = \frac{10}{s(s+1)}, \quad H_0(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}$$

采样周期 $T = 1s$, 试设计在控制输入为 $r(t) = t$ 时的最少拍无差系统。



例 6.10: 设单位反馈线性离散系统的结构如图 6.10.1 所示, 其被控制对象和零阶保持器的传递函数分别为

$$G_0(s) = \frac{10}{s(s+1)(0.1s+1)}, \quad H_0(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \quad (6.3.19)$$

采样周期 $T = 0.5s$ 。试设计单位阶跃输入时最少拍无差系统的数字控制器 $D(z)$ 。

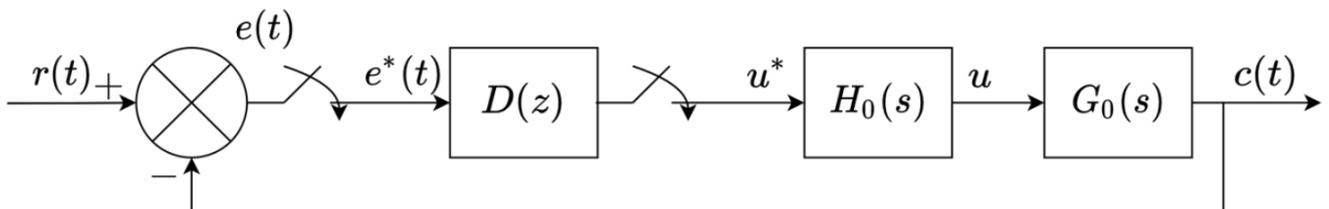
hw 1:

1. 设模拟控制器为 $D(s) = \frac{5(s+2)}{s+8}$, 采样周期为 $T = 0.1sec$, 试用双线性变换法和根匹配法对该模拟控制器进行离散化, 并给出其数字控制算法。

2. 设离散系统如下图所示, 其中 $H_0(s)$ 为零阶保持器, 采样周期为 $T = 1s$,

$$G_0(s) = \frac{K}{s}$$

试求当 $r(t) = R_1 1(t) + R_1 t$ 时, 系统无稳态误差, 过渡过程在最少拍内结束的 $D(z)$ 。



3. 设离散系统如上图所示, 采样周期为 $T = 1s$, 其中

$$G_d(z) = \mathcal{Z}[H_0(s)G_0(s)] = \frac{z^{-1}(1+0.92z^{-1})(1+3z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+0.5z^{-1})}$$

针对单位阶跃输入信号, 设计一个最少拍数字控制器 $D(z)$, 并判断所设计系统采样点之间是否有振荡。

第六章 PID 控制器

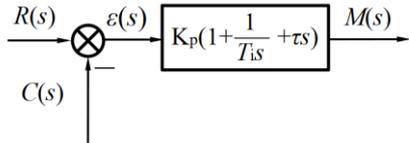
一 各类控制器的基本作用

P 比例控制器：提高稳态精度；提高系统的快速性；降低稳定裕度。

PD 比例微分控制器：改变系统的自然频率和阻尼比；提高系统的动态性能。

PI 比例积分控制器：提高系统的型别；提高系统的动态性能。

PID 控制律：提高系统的型别；通过合适选择参数，还将为系统增加两个开环零点，在提高系统动态性能方面具有更大的优越性。

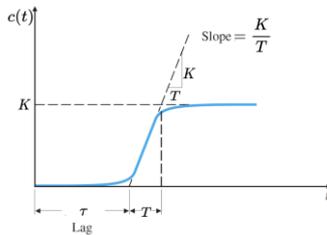


二 PID 参数整定

动态响应法

第一步：求取动态阶跃响应曲线。

第二步：估计被控对象的传递函数。



上述的S形曲线的传函为 $G(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{Ts + 1}$

将其拐点切线和时间轴和 $c(t)=K$ 的交点可得到 τ 和 T 的值，如上图所示

第三步：由齐格勒 - 尼柯尔斯 (Ziegler-Nichols) 给出的调整法则表，确定PID参数。

控制器类型	K_p	T_i	T_d
P	T / τ	∞	0
PI	$0.9T / \tau$	3.3τ	0
PID	$1.2T / \tau$	2τ	0.5τ

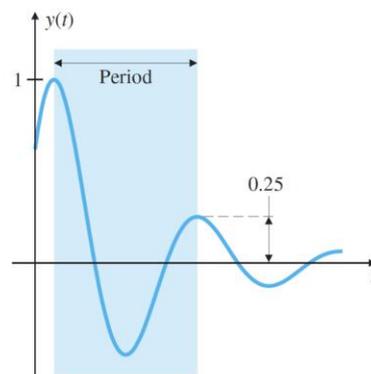
因此可得

$$G_{PID} = K_p \left[1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right] = 1.2 \frac{T}{\tau} \left(1 + \frac{1}{2\tau s} + 0.5\tau s \right) = 0.6T \frac{(s + \frac{1}{\tau})^2}{s}$$

PID控制器有一个位于原点的极点和两个左半平面的零点

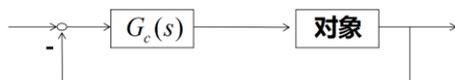
※ 注意

- ※ 系统开环下测出阶跃响应
- ※ 闭环单位阶跃响应曲线为S形。
- ※ 能保证阶跃响应的暂态分量最大峰值和第二峰值之比为4:1, $\zeta \approx 0.21$
- ※ 可进行系统微调。
- ※ **被控对象有积分环节和复数极点时不适用。**



临界增益法

※ 临界增益法在系统闭环情况下进行



※ 步骤

第一步：令 $T_i = \infty, T_d = 0$ 将控制器设置为比例控制。将 K_p 从 0 增大，首次出现等幅振荡时，记下此时的增益为 K_{ps} 和振荡周期 T_s 。

第二步：由齐格勒 - 尼柯尔斯给出的调整法则表，确定 PID 参数。

控制器类型	K_p	T_i	T_d
P	$0.5 K_{ps}$	∞	0
PI	$0.45 K_{ps}$	$0.83 T_s$	0
PID	$0.6 K_{ps}$	$0.5 T_s$	$0.125 T_s$

因此可得

$$G_{PID} = K_p \left[1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right]$$

$$= 0.6 K_{ps} \left(1 + \frac{1}{0.5 T_s s} + 0.125 T_s s \right) = 0.075 K_{ps} T_s \frac{(s + \frac{4}{T_s})^2}{s}$$

PID 控制器有一个位于原点的极点和两个左半平面的零点 $\frac{2}{T_i} (\frac{1}{2T_d})$

三 离散 PID

由位置式 PID 可得

$$u(k) = K_p e(k) + K_i \sum_{i=0}^k e(i) + K_d [e(k) - e(k-1)]$$

记 $\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$, $\Delta e(k) = e(k) - e(k-1)$ 。由前两式可得

$$\Delta u(k) = K_p \Delta e(k) + K_i e(k) + K_d [\Delta e(k) - \Delta e(k-1)]$$

增量式

四 习题

例：控制对象方程为 $\frac{1}{s(s+1)(s+5)}$ 试用临界增益法确定 PID 控制器参数 K_p, T_i, T_d 使得超调量不超过 25%。如超调量过大则微调。

第七章 能控性与能观性

一 连续系统能观性

➤ 线性定常非齐次系统状态方程的解

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) & x(t_0) &= x_0, & t &\geq t_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

初始状态引起的响应, 零输入响应

输入引起的响应, 零状态响应

能控性是控制作用 $u(t)$ 支配系统的状态向量 $x(t)$ 的能力;

能观测性是系统的输出 $y(t)$ 反映系统状态向量 $x(t)$ 的能力。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{8.1.4}$$

定义 8.7: 能控状态

对于线性定常系统 (8.1.4), 以及时间区间 $[0, t_1]$, 存在一个无约束的容许控制 $u(t)$, $t \in [0, t_1]$, 使得系统在这个控制的作用下, 系统由 x_0 出发经过时间 t_1 后由 x_0 转移到 $x(t_1) = 0$, 则称此 x_0 是系统的一个能控状态。

定义 8.8: 系统能控性

对于线性定常系统 (8.1.4), 如果状态空间中的所有非零状态都是能控状态, 则称系统 (8.1.4) 是能控的。

- ◆ 能控性是一种定性性质, 不涉及实现所需控制的具体方式;
- ◆ 对定常系统, 能控与否与 t_0 无关, 与时间区间 $[t_0, t_1]$ 无关, 而对于时变系统, 能控性与 t_0 及时间区间有关;
- ◆ 能控性只由系统的参数决定, 因此是系统的固有属性;
- ◆ 状态转移的轨迹没加以限制和规定, 能控性是表征系统状态运动的一个定性特征;
- ◆ 对线性定常系统能控性和能达性是等价的, 但对时变和离散系统, 则是不等价的;
- ◆ 不特殊说明, 系统可控性均指状态能控性 (与输出能控性相区别)。

1 能控性判据

定理 8.1

线性定常系统 (8.2.1) 是能控的当且仅当存在时刻 $t_1 > 0$ ，使 Gram 矩阵

$$W_c(t_1) = \int_0^{t_1} e^{-At} B B^T e^{-A^T t} dt \quad (8.2.2)$$

是非奇异的。



定理 8.3

线性定常系统 (8.2.1) 能控的充分必要条件是

$$\text{rank} [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B] = n \quad (8.2.19)$$

其中 n 是矩阵 A 的维数。



定理 8.4

线性定常系统 (8.2.1) 是能控的当且仅当系统矩阵 A 的所有特征值 $\lambda_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$ 满足

$$\text{rank} [\lambda_i I - A \quad B] = n \quad (8.2.27)$$

或可以等价地表示为

$$\text{rank} [sI - A \quad B] = n, \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad (8.2.28)$$



能控性判据	优点	缺点
Gram判据	有重要的理论意义	工程上不适用
秩判据	简单实用	只能给出一个整体的结论
PBH判据	能给出与每一个特征根相关的能控性信息	要计算 n 个矩阵的秩

二 连续系统的能观性

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}$$

定义 8.14: 能观状态

对于线性定常系统 (8.4.11), 如果对于初始时刻 $t = 0$ 的一个非零的初始状态 x_0 , 以及时间区间 $[0, t_1]$, 使得由区间 $[0, t_1]$ 上的系统的输出 $y(t)$ 可以唯一地决定系统的初始状态 x_0 , 则称该状态 x_0 是能观的。

对应地, 定常系统的能观性可以如下定义

定义 8.15: 系统能观性

对于线性定常系统 (8.4.11), 如果状态空间中的所有非零状态都是能观状态, 则称系统 (8.4.11) 是能观的。

注意到能观性不但和初始时刻无关, 也和时间区间无关! 定常系统若在某一个时间区间上完全可观, 则在任何一个时间区间上都完全可观。所以不必刻意强调“在 $[t_0, t_1]$ ”上。

1 能观性判据

考察线性定常连续系统的状态方程

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \quad (8.5.1)$$

式中 x 是 n 维状态向量; y 是 m 维输出向量; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 是常矩阵, 分别为系统矩阵和输出矩阵。

定理 8.9

线性定常连续系统 (8.5.1) 能观的充分必要条件是, 存在有限时刻 $t_1 > 0$, 使 Gram 矩阵

$$W_o(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{A t} dt \quad (8.5.2)$$

是非奇异的。

定理 8.10

线性定常系统 (8.5.1) 能观的充分必要条件是

$$\text{rank } Q_o = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (8.5.6)$$

定理 8.11

线性定常系统 (8.5.1) 完全能观的充分必要条件是, 对矩阵 A 的所有特征值 $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$, 均有

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ \lambda_i I - A \end{bmatrix} = n \quad (8.5.8)$$

或等价地表示为

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ sI - A \end{bmatrix} = n \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad (8.5.9)$$



三 连续系统结构分解

定理 8.13: 第一能控性规范型

给定单输入单输出能控性系统 (8.6.1), 其系统的特征多项式如式 (8.6.3) 所示, 其能控性矩阵 Q_c 如式 (8.6.4) 所示。则在状态变换 $x = Q_c \bar{x}$ 下, 系统 (8.6.1) 可转换为如下第一能控规范型

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A_c \bar{x} + b_c u \\ y = c_c \bar{x} \end{cases}$$

其中

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.6.5)$$

$$c_c = c Q_c = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}] \quad (8.6.6)$$

$$\beta_i = c A^i b \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (8.6.7) \heartsuit$$

定理 8.16: 第二能控规范型

给定单输入单输出能控性系统 (8.6.1), 其系统的特征多项式如式 (8.6.3) 所示, 其对应的 Hankel 矩阵 H_A 如式 (8.6.9) 所示, 其能控性矩阵 Q_c 如式 (8.6.4) 所示。令 $P = Q_c H_A$, 则在状态变换 $x = P \bar{x}$ 下, 系统 (8.6.1) 可转换为如下第二能控规范型

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A_c \bar{x} + b_c u \\ y = c_c \bar{x} \end{cases} \quad (8.6.11)$$

其中

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8.6.12)$$

$$c_c = c P = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}] \quad (8.6.13)$$

推论 8.1

设系统 (8.6.1) 完全能控, 其系统的特征多项式如式 (8.6.3), 而系数 $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ 由式 (8.6.13) 给出, 则其传递函数为

$$W(s) = \frac{\beta_{n-1} s^{n-1} + \beta_{n-2} s^{n-2} + \cdots + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \alpha_0} \quad (8.6.15) \heartsuit$$

定理 8.17: 第一能观规范型

给定单输入单输出能观性系统 (8.6.1), 其系统的特征多项式如式 (8.6.3) 所示, 其能观性矩阵 Q_o 如式 (8.6.16) 所示。则在状态变换 $x = Q_o^{-1}\tilde{x}$ 下, 系统 (8.6.1) 可转换为如下第一能观规范型

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tilde{x} \end{aligned}$$

其中常数 $\beta_i, i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ 由下式给出

$$\beta_i = cA^i b \quad b_o = Q_o b$$



定理 8.18: 第二能观规范型

给定单输入单输出能观性系统 (8.6.1), 其系统的特征多项式如式 (8.6.3) 所示, 其对应的 Hankel 矩阵 H_A 如式 (8.6.9) 所示, 其能观性矩阵 Q_c 如式 (8.6.16) 所示。令 $Q = H_A Q_o$, 则在状态变换 $x = Q^{-1}\tilde{x}$ 下, 系统 (8.6.1) 可转换为如下第二能观规范型

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{x} \end{aligned}$$

其中常数 $\beta_{n-1}, \dots, \beta_1, \beta_0$ 由下式确定

$$\begin{cases} \beta_{n-1} = cb \\ \beta_{n-2} = cAb + \alpha_{n-1}cb \\ \vdots \\ \beta_1 = cA^{n-2}b + \alpha_{n-1}cA^{n-3}b + \cdots + \alpha_2cb \\ \beta_0 = cA^{n-1}b + \alpha_{n-1}cA^{n-2}b + \cdots + \alpha_1cb \end{cases} \quad (8.6.18)$$



1 能控性结构分解

设计方法 8.1: 能控性结构分解

第 1 步. 列写系统 (8.7.8) 的能控性矩阵

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

并求取 $\text{rank}Q_c = k$ 。

第 2 步. 在能控性矩阵 Q_c 中选取 k 个线性无关的列向量 l_1, l_2, \dots, l_k , 再在 \mathbb{R}^n 中选取与向量组 $\{l_1, \dots, l_k\}$ 线性无关的 $(n-k)$ 个列向量 l_{k+1}, \dots, l_n 。

第 3 步. 按以下方式构成变换阵, 并令 $x = P\hat{x}$

$$P = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_k & l_{k+1} & \cdots & l_n \end{bmatrix} \quad (8.7.10)$$

第 4 步. 按以下方式计算变换后的系统矩阵

$$\hat{A} = P^{-1}AP, \quad \hat{B} = P^{-1}B, \quad \hat{C} = CP$$

变换后的系统为

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y = \hat{C}\hat{x} \end{cases}$$



定理 8.19: 能控性结构分解

给定 n 维线性定常系统 (8.7.8), 其能控性矩阵为 Q_c , 且有 $\text{rank}Q_c = k < n$. l_1, l_2, \dots, l_k 是 Q_c 中 k 个线性无关的列向量, l_{k+1}, \dots, l_n 是与向量组 $\{l_1, \dots, l_k\}$ 线性无关的 $(n-k)$ 个线性独立的列向量, 并令变换矩阵 P 由式 (8.7.10) 给出。则状态变换 $x = P\hat{x}$ 可将系统 (8.7.8) 转化为按能控性分解的规范形式

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_c \\ \dot{\hat{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_c & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_c \\ \hat{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & \hat{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_c \\ \hat{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (8.7.11)$$

并且有如下结论:

- (1) (\hat{A}_c, \hat{B}_c) 是完全能控的;
- (2) 子系统 $\Sigma(\hat{A}_c, \hat{B}_c, \hat{C}_1)$ 的传递函数等于整个系统的传递函数, 即

$$\hat{C}_1 (sI - \hat{A}_c)^{-1} \hat{B}_c = C(sI - A)^{-1} B \quad (8.7.12)$$



说明 8.1

从式 (8.7.11) 可以看出, 在系统的能控性分解中, 系统被分解为完全能控和完全不能控的两个子系统。其中, k 维的能控子系统如下

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_c = \hat{A}_c \hat{x}_c + \hat{A}_{12} \hat{x}_{\bar{c}} + \hat{B}_c u \\ y_1 = \hat{C}_1 \hat{x}_c \end{cases} \quad (8.7.19)$$

不能控部分为 $n - k$ 维的子系统

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_{\bar{c}} = \hat{A}_{\bar{c}} \hat{x}_{\bar{c}} \\ y_2 = \hat{C}_2 \hat{x}_{\bar{c}} \end{cases} \quad (8.7.20)$$

而 $y = y_1 + y_2$ 。

说明 8.2

对于原系统 (8.7.8) 和变换后的系统 (8.7.11) 有

$$\begin{aligned} & \det(sI - A) \\ &= \det(sI - \hat{A}) = \det \begin{bmatrix} sI - \hat{A}_c & -\hat{A}_{12} \\ 0 & sI - \hat{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \\ &= \det(sI - \hat{A}_c) \det(sI - \hat{A}_{\bar{c}}) \end{aligned}$$

上式表明, 不完全能控系统 (8.7.8) 的特征值由两部分组成: 一部分为 \hat{A}_c 的特征值, 称为系统的能控振型; 另一部分 $\hat{A}_{\bar{c}}$ 的特征值, 称为系统的不能控振型。在第九章的系统综合中可以看出, 外输入 u 的引入只能改变能控振型的位置, 而不能改变不能控振型的位置。

2 能观性结构分解

设计方法 8.2: 能观性结构分解

第 1 步. 列写系统 (8.7.23) 的能观性矩阵

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

并求取 $\text{rank} Q_o = k$.

第 2 步. 在能观性矩阵 Q_o 中选取 k 个线性无关的行向量 $v_1^T, v_2^T, \dots, v_k^T$, 再在 \mathbb{R}^n 中选取与向量组 $\{v_1^T, v_2^T, \dots, v_k^T\}$ 线性无关的 $(n-k)$ 个行向量 $v_{k+1}^T, v_{k+2}^T, \dots, v_n^T$.

第 3 步. 按以下方式构成变换阵, 并令 $x = P^{-1}\bar{x}$

$$P = \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_k^T \\ v_{k+1}^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix} \quad (8.7.24)$$

第 4 步. 按以下方式计算变换后的系统矩阵

$$\bar{A} = PAP^{-1}, \quad \bar{B} = PB, \quad \bar{C} = CP^{-1}$$

变换后的系统为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ y = \bar{C}\bar{x} \end{cases}$$



定理 8.20

给定 n 维线性定常系统 (8.7.23), 其能控性矩阵为 Q_c , 且有 $\text{rank} Q_c = k$. $v_1^T, v_2^T, \dots, v_k^T$ 是 Q_c 中 k 个线性无关的行向量, $v_{k+1}^T, v_{k+2}^T, \dots, v_n^T$ 是与向量组 $\{v_1^T, v_2^T, \dots, v_k^T\}$ 线性无关的 $(n-k)$ 个线性独立的行向量, 并令变换矩阵 P 由式 (8.7.24) 给出. 则线性变换 $x = P^{-1}\bar{x}$ 将系统 (8.7.23) 化为按能观性分解的规范型

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_o \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_o & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_o \\ \bar{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} \bar{C}_o & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_o \\ \bar{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (8.7.25)$$

并且有如下结论:

- (1) (\bar{A}_o, \bar{C}_o) 完全能观.
- (2) 子系统 $\Sigma(\bar{A}_o, \bar{B}_1, \bar{C}_o)$ 的传递函数等于整个系统的传递函数, 即

$$\bar{C}_o(sI - \bar{A}_o)^{-1}\bar{B}_1 = C(sI - A)^{-1}B \quad (8.7.26) \heartsuit$$

3 状态空间实现

定理 8.21

对于单输入单输出系统，一个传递函数的实现是能控能观的当且仅当传递函数无零极点对消。♡

8.8.3 最小实现

对于给定的传递矩阵 $G(s)$ 的实现并不惟一，其中维数最小的实现称为最小实现。因此，最小实现是一种结构最简单的不可约实现。关于线性定常系统的最小实现有如下定理。

定理 8.22

$G(s)$ 是一个严格真有理分式矩阵，实现 (A, B, C) 是它最小实现的充要条件为 (A, B) 能控， (A, C) 能观。♡

定理 8.23

$G(s)$ 任意两个最小实现 (A_1, B_1, C_1) 和 (A_2, B_2, C_2) 是代数等价的。♡

四 离散系统的能控能观性

考虑如下定常线性离散时间系统的能控性

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (8.9.2)$$

定义 8.23: 能控状态

对于线性定常系统 (8.9.2)，如果存在一时刻 $k_1 > 0$ 和一个无约束控制 $u(k)$ ， $k \in \mathbb{I}[0, k_1]$ ，使得系统在这个控制的作用下，系统由初始状态 $x(0) = x_0$ 出发经 k_1 步后转移到 $x(k_1) = 0$ ，则称此 x_0 是系统的一个能控状态。♣

定义 8.24: 系统能控性

对于线性定常系统 (8.9.2)，如果状态空间中的所有非零状态都是能控状态，则称系统 (8.9.2) 是能控的。♣

定理 8.26

给定输入矩阵 $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ 和非奇异系统矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，线性离散定常定常系统 (8.10.1) 是能控的当且仅当存在时刻 $k_1 > 0$ ，使 Gram 矩阵

$$W_c(k_1) = \sum_{i=0}^{k_1-1} A^{-1-i} B B^T (A^{-1-i})^T \quad (8.10.2)$$

是非奇异的。♡

定理 8.28

线性定常系统 (8.10.1) 是能达的当且仅当

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n \quad (8.10.15)$$

其中 n 是矩阵 A 的维数。



定理 8.29

线性定常系统 (8.10.1) 是能控的当且仅当

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \text{rank} [B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B \ A^n] \quad (8.10.20)$$

其中 n 是矩阵 A 的维数。



若 A 可逆，线性离散定常系统能控当且仅当

$$\text{rank} [B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B] = n$$

若线性离散定常系统为连续线性时间不变系统离散化得到，则系统的能控性和能达性等价。

对于定常线性系统，其能控性与初始时刻无关。考虑如下定常线性系统的能观性

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) \\ y = Cx(k) \end{cases} \quad (8.11.2)$$

定义 8.30: 能观状态

对于线性离散定常系统 (8.11.2)，如果对于初始时刻 $k=0$ 的一个非零的初始状态 x_0 ，存在一个有限的时刻 k_1 ， $k_1 > 0$ ，使得由区间 $\mathbb{I}[0, k_1]$ 上的系统的输出 $y(k)$ 可以唯一地决定系统地初始状态 x_0 ，则称该状态 x_0 是能观的。



对应地，线性离散定常系统的能观性可以简化定义。

定义 8.31: 系统能观性

对于离散线性定常系统 (8.11.2)，如果状态空间中的所有非零状态都是能观状态，则称系统 (8.11.2) 是能观的。



定理 8.31

线性定常离散系统 (8.11.2) 能观的充分必要条件是，存在有限时刻 $k_1 > 0$ ，使 Gram 矩阵

$$W_o(k_1) = \sum_{i=0}^{k_1} (A^T)^i C^T C A^i \quad (8.11.5)$$

是非奇异的。



定理 8.32

线性定常系统 (8.11.2) 能观的充分必要条件是

$$\text{rank } Q_o = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (8.11.8)$$

或

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix} = n \quad (8.11.9)$$

命题 8.8

如果连续系统是不完全可控的(不完全可观的), 则其离散化系统也是不能控的(不能观的)。 ◆

定理 8.35

设系统 (8.12.1) 能控或能观, 令 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu$ 为 A 的全部特征值, 且当 $i \neq j$ 时有 $\lambda_i \neq \lambda_j$, 则时间离散化系统 Σ_T 保持能控或能观测的一个充分条件是, 采样周期 T 的数值对一切满足

$$\text{Re}|\lambda_i - \lambda_j| = 0 \quad i, j = 1, 2, \dots, \mu \quad (8.12.4)$$

的特征值, 有

$$T \neq \frac{2l\pi}{\text{Im}(\lambda_i - \lambda_j)} \quad l = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (8.12.5)$$

例. 将下列状态空间表达式

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = [0 \ 0 \ 1] x$$

变换为能控标准I型。

例. 将下列状态空间表达式

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = [0 \ 0 \ 1] x$$

变换为能控标准II型。

例 8.17: 试将例8.16中的状态空间表达式变换为能观标准型。

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \ 0 \ 1] x \end{cases}$$

例 8.19: 给定线性定常系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \quad y = [1 \ 0 \ 1] x$$

对该系统进行能控性分解。

例 8.21: 将例8.20中的系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 4 & -4 \\ -4 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 1 \ -1 \ 2] x \end{cases}$$

按能观性分解。

例 8.23: 给出下列传递函数的 Jordan 型实现

$$G(s) = \frac{4s^2 + 17s + 16}{s^3 + 7s^2 + 16s + 12}$$

例 设单输入线性定常离散系统状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

试判断其可控性;若初始状态 $\mathbf{x}(0) = [2 \ 1 \ 0]^T$, 确定使 $\mathbf{x}(3) = \mathbf{0}$ 的控制序列 $u(0), u(1), u(2)$; 研究使 $\mathbf{x}(2) = \mathbf{0}$ 的可能性。

1. 设 SISO 线性定常系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} u \quad \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0 \\ y &= [c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4] \mathbf{x} \end{aligned}$$

(1) 给出使系统状态完全能控的 b_1, b_2, b_3, b_4 满足的条件; (8分)

(2) 给出使系统状态完全能观的 c_1, c_2, c_3, c_4 满足的条件; (7分)

2. 设线性定常系统为

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + b\mathbf{u}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

而且 $\lambda \neq 0$ 。试问能否取合适的 $b \in \mathbb{R}^3$, 使系统是状态完全能控的。若能控, 给出 b 的选取方法; 若不能控, 说明理由。

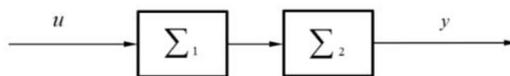


图 8.7

3. 两个子系统 Σ_1 和 Σ_2 串联, 如图 8.7 所示。 Σ_1 和 Σ_2 的系统矩阵、输入矩阵和输出矩阵分别为:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 : A_1 &= -2, B_1 = 1, C_1 = 1 \\ \Sigma_2 : A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_2 = [2 \ 1] \end{aligned}$$

(1) 求串联后的状态空间描述; (5分)

(2) 判断 Σ_1 和 Σ_2 串联后的状态能控性和能观性; (5分)

(3) 求串联后的传递函数。(5分)

4. n 阶线性定常系统的状态方程和输出方程为:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

若用 $x = Pz$ 对系统进行线性变换, 试对下面两个问题进行分析 (要求给出分析过程)。

- (1) 线性变换是否改变 u 到 y 的传递函数矩阵? (7 分)
- (2) 线性变换是否改变系统的可控性? (8 分)

5. 单输入-输出线性定常系统的状态空间表达式为:

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$Y(t) = \begin{bmatrix} -5 & 3 \end{bmatrix} X(t) + u(t)$$

- (1) 试将上述模型变换为对角线标准型;
 - (2) 求系统的传递函数。
6. 建立图8.10线性系统的状态空间描述模型, 根据此模型判定系统的能控性和能观性。

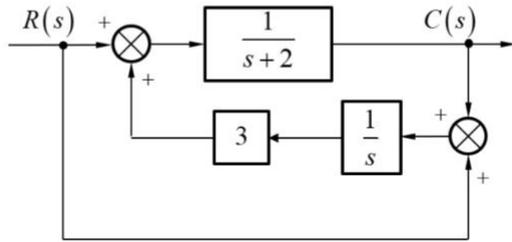


图 8.10

第八章 状态空间综合

一 状态反馈

1 状态反馈极点配置

被控对象 $\dot{x} = Ax + Bu$ (9.1.1)

状态反馈 $u = Kx + v$

闭环系统 $\dot{x} = (A + BK)x + Bv$ (9.1.2)

状态反馈极点配置问题 给定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$, 及一组共轭封闭的复数 $s_i, i \in \mathbb{I}[1, n]$, 求取矩阵 $K \in \mathbb{R}^{r \times n}$, 使得矩阵 $A + BK$ 的所有特征值为 $s_i, i \in \mathbb{I}[1, n]$ 。

定理 9.1

给定单输入定常线性系统 (9.1.5), 对任意给定的一组共轭封闭的复数 $s_i, i \in \mathbb{I}[1, n]$ 都存在反馈增益矩阵 $k \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, 使得闭环系统矩阵 $A + bk$ 的所有特征值为 $s_i, i \in \mathbb{I}[1, n]$, 当且仅当系统 (9.1.5) 是能控的。

直接法

例 9.2: 设某伺服系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s(s+6)(s+12)}$$

试设计状态反馈, 使闭环系统满足如下性能指标:

- (1) 输出超调量 $\sigma_p \leq 5\%$;
- (2) 峰值时间 $t_p \leq 0.5s$;
- (3) 稳态位置误差 $e_p = 0$ 。

第 1 步. 确定期望极点的位置。

这是一个三阶系统。如果让系统的一个极点远离虚轴, 而另外一对复极点相对靠近虚轴, 则这一对共轭复极点就成为系统的主导极点。系统的瞬态性能主要由主导极点决定, 设主导极点为

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\sqrt{1-\xi^2}\omega_n$$

由典型二阶振荡环节的瞬态性能指标公式可知:

$$\begin{aligned} \sigma_p &= e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \times 100\% \leq 5\% \\ t_p &= \pi/(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}) \leq 0.5 \end{aligned}$$

于是, 只要 $\xi \geq 0.707$, $\omega_n \geq 9$ 则动态性能得到满足。取 $\xi = 0.707$, $\omega_n = 10$, 则主导极点为

$$s_{1,2} = -7.07 \pm j7.07$$

取第三个极点为 $s_3 = -100$, 远离虚轴。于是闭环系统的期望特征多项式为

$$\begin{aligned} \alpha^* &= (s+100)(s+7.07-j7.07)(s+7.07+j7.07) \\ &= s^3 + 114.1s^2 + 1510s + 10000 \end{aligned} \quad (9.1.15)$$

第2步. 确定反馈增益 K 。

先将原系统写成状态空间形式。为此，可取

$$\begin{aligned} X_3(s) &= \frac{1}{s+6}U(s) \\ X_2(s) &= \frac{1}{s+12}X_3(s) \\ X_1(s) &= Y(s) = \frac{1}{s}X_2(s) \end{aligned}$$

于是得到系统的状态空间模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -12x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -6x_3 + u \\ y = x_1 \end{cases}$$

对于该系统，其系统矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = [1 \ 0 \ 0]$$

设状态反馈增益为

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$$

直接求解

系统在状态反馈下的结构图如图9.1所示。

系统在状态反馈下的闭环形式为

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - bK)x + bRv \\ y = cx \end{cases}$$

因此，闭环特征方程为

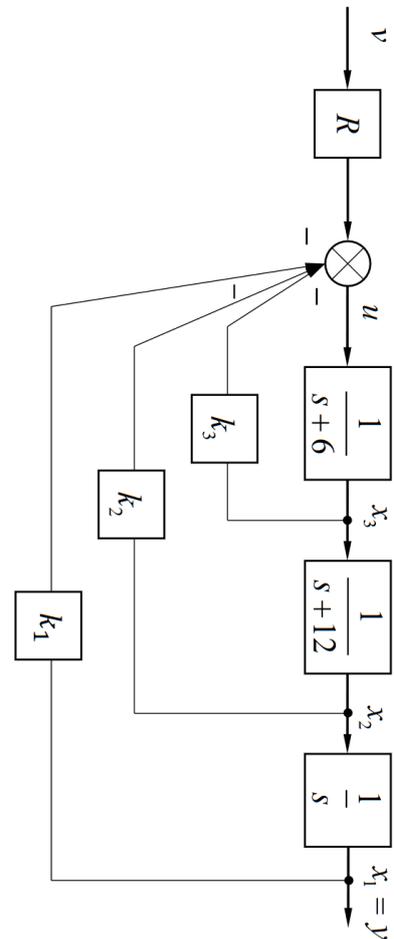
$$\begin{aligned} &\det(sI - A + bK) \\ &= \det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s+12 & -1 \\ k_1 & k_2 & s+6+k_3 \end{bmatrix} \\ &= s^3 + (18+k_3)s^2 + [12(6+k_3) + k_2]s + k_1 \end{aligned}$$

与式 (9.1.15) 比较系数可得

$$\begin{cases} 18 + k_3 = 114.1 \\ 12(6 + k_3) + k_2 = 1510 \\ k_1 = 10000 \end{cases}$$

于是解得 $k_1 = 10000$, $k_2 = 284.8$, $k_3 = 96.1$ 。因此状态反馈增益为

$$K = [10000 \quad 284.8 \quad 96.1]$$



定理 9.2: 状态反馈不改变能控性

如果系统 (9.1.1) 是能控的，则对任意反馈增益 K ，闭环系统 (9.1.2) 也是能控的。



2 状态反馈镇定

镇定：设计反馈控制律使得闭环系统是稳定的。

定义 9.1

给定系统 (9.3.1)，如果存在状态反馈增益 K 使得闭环系统 (9.3.3) 是稳定的，则称系统 (9.3.1) 或者矩阵对 (A, B) 是可稳的。

原系统中能控部分的极点可以由状态反馈任意配置，但不能控部分的极点，即 \bar{A}_c 的特征值，不能被状态反馈所改变。

定理 9.3

线性连续时间定常系统可稳的充要条件是其不能控振型都在复平面的左半平面。

二 输出反馈

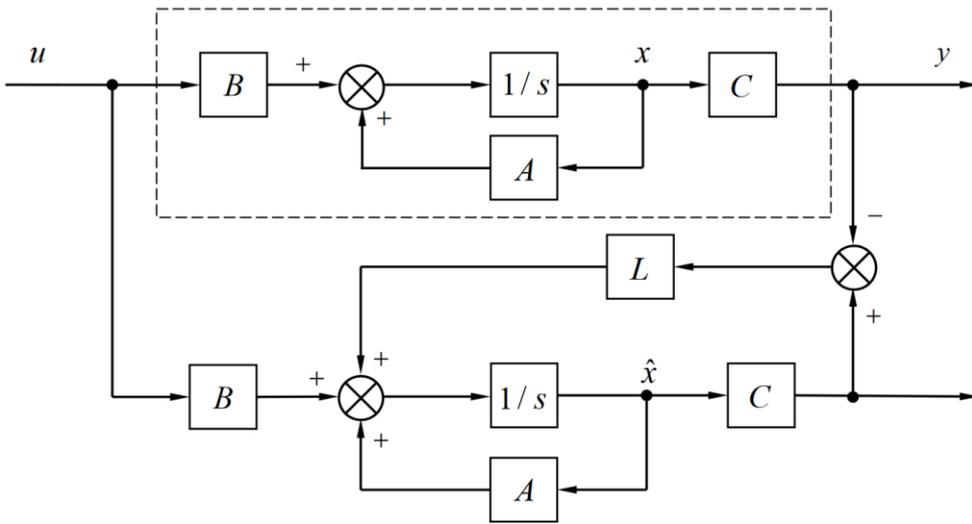
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx \end{cases} \quad u = fy + v \quad \begin{cases} \dot{x} = (A + bfc)x + bv \\ y = cx \end{cases}$$

输出反馈只能将闭环系统的极点配置在根轨迹上，而不能做到任意配置。

三 状态观测器

全维状态观测器

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x(0) = x_0, \quad t \geq 0 \\ y = Cx \end{cases}$$



$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$$

定义 9.1

已知 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 矩阵对 (A, C) 或系统 (10.1.1) 称为是可检测的, 如果存在实矩阵 L , 使得矩阵 $(A + LC)$ 稳定。

显然, 可检测性和可稳性具有下述关系。

命题 9.1

线性定常系统 (9.4.1) 可检测的充要条件是其对偶系统可稳, 也即矩阵对 (A, C) 可检测的充分必要条件是矩阵对 (A^T, C^T) 可稳。

利用上述命题我们还容易得到下述结论:

命题 9.2

线性定常系统 (9.4.1) 或矩阵对 (A, C) 可检测的充要条件是其全部不能观振型为稳定的。

基于上述可检测性的概念, 我们可以建立线性系统的全维状态观测器的下述存在条件。

定理 9.3

存在矩阵 L 使得系统 (9.4.2) 构成系统 (9.4.1) 的一个全维状态观测器的充要条件是矩阵对 (A, C) 可检测, 而此时只需选取 L 使得 $(A + LC)$ 稳定即可。

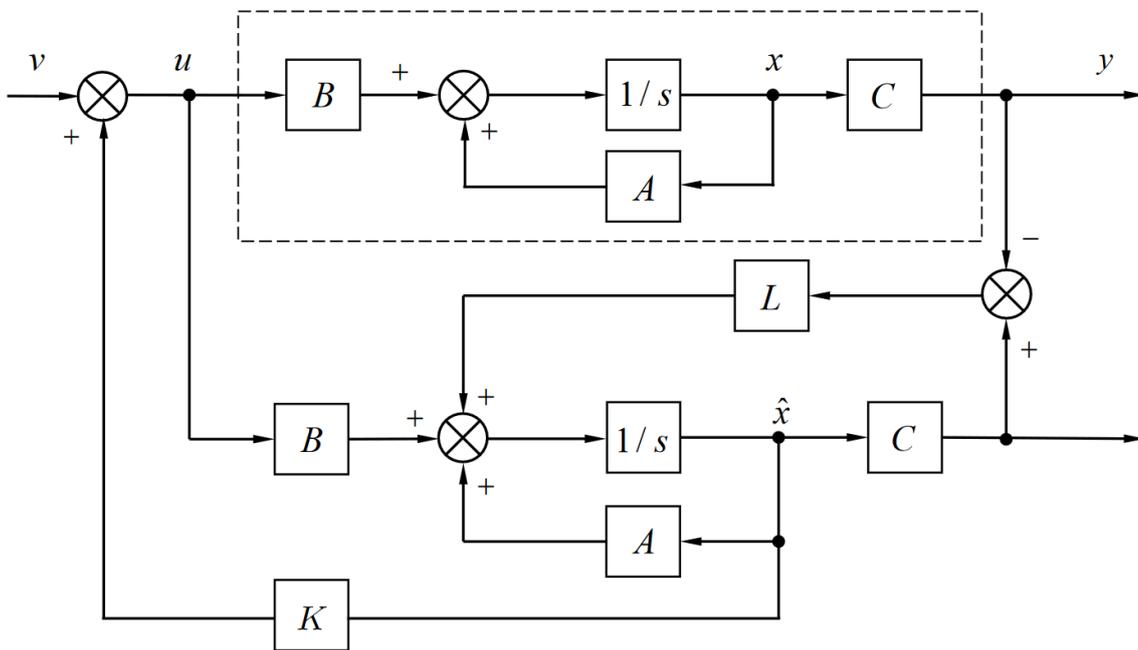
$$\dot{\hat{x}} = (A + LC)\hat{x} - LCx + Bu, \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \quad (9.4.3)$$

定理 9.4

线性定常系统 (9.4.1) 的全维状态观测器 (9.4.3) 存在且可以任意配置极点, 即可通过选择增益阵 L 任意配置 $(A + LC)$ 的全部特征值的充要条件是矩阵对 (A, C) 能观。

(降维状态观测器不考)

四 基于状态观测器的状态反馈



$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BK\hat{x} + Bv \\ \dot{\hat{x}} = -LCx + (A + LC + BK)\hat{x} + Bv \\ y = Cx \end{cases}$$

$$z = \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{bmatrix} A & BK \\ -LC & A + LC + BK \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} v \\ y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} z \end{cases}$$

分离原理

$$\tilde{x} = x - \hat{x}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A + LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v \\ y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} \end{cases}$$

分离定理

若被控系统 (A, B, C) 可控可观测，基于状态观测器设计状态反馈时，其系统的极点配置和观测器设计可以分别独立进行，即 K 和 L 的设计可分别独立进行。

五 习题

例 9.3: 检验系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

是否可用状态反馈镇定。若可以，设计状态反馈阵镇定该系统。

例 9.3: 已知线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

设计其全维状态观测器，使得观测器的极点位于 $-\alpha \pm j\beta$, $\alpha, \beta > 0$ 。

例：设系统的状态空间表达式为：

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 0 \ 0]x \end{cases}$$

- 1) 该系统能通过状态反馈 $u = kx$ 任意配置闭环系统的极点吗？若能，设计状态反馈矩阵 K ，使得闭环系统的极点为 $-1 \pm j, -1$ 。
- 2) 设计一个基于三维观测器的状态反馈控制律，使得闭环系统的极点为 $-1 \pm j, -1, -10, -10, -20$ ，并画出闭环系统的结构图。

1. 某系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

试设计一个带全维状态观测器的状态反馈控制系统，使观测器的极点均为 -3 ，闭环系统的极点为 $-5 \pm j5$ ，要求写出观测器方程、状态反馈控制律之表达式，并画出带观测器闭环系统的系统结构图。

2. 设系统的状态空间表达式为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

试设计一个全维状态观测器，使其极点为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -3$ ，要求写出观测器动态方程。

3. 设系统的状态空间表达式为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

其中，

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

若该系统的状态 x_2 不可测量，试设计一个降维状态观测器，使降维观测器的极点为 -10 ，要求写出降维观测器动态方程，并写出状态 x_2 的估计方程。

4. 已知某线性定常系统的传递函数为

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

试设计一个带有全维状态观测器的反馈系统，使系统的闭环极点为：

$$s_1 = -2, s_2 = -1 + j, s_3 = -1 - j$$

状态观测器的特征值均为 -5 。要求：给出状态反馈增益矩阵及状态观测器的方程。

5. 设控制系统的状态空间表达式为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} w$$

$$y = \begin{bmatrix} 6 & 3 \end{bmatrix} x$$

其中 w 为外部扰动。若取状态反馈 $u = -Kx$ ，

(1) 能否选取合适的 K ，使输出 y 不受外部扰动 w 的影响？若能，求 K 的表达式；若不能，试求使输出 y 受外部扰动 w 影响最小的 K 的表达式。(5分)

(2) 根据(1)选取的 K ，求闭环系统的极点。(5分)

(3) 画出闭环系统的状态变量图。(5分)

7. 控制系统如图9.6所示，其中 α_1 、 α_2 、 α_3 为状态反馈系数。

(1) 写出对象的状态方程；(8分)

(2) 若要求闭环系统的极点为 $-1, -2, -3$ ，求 α_1 、 α_2 、 α_3 。(7分)

8. 系统的传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

(1) 试确定状态反馈矩阵 F ，要求将系统的极点配置在 $s_1 = -2, s_{2,3} = -1 \pm j1$ 位置上。(10分)

(2) 画出具有状态反馈的系统的状态变量图。(5分)

6. 设控制系统的状态空间表达式为:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 4 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 5 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 0 & 7 \end{bmatrix} x$$

- (1) 判别系统的能控性。若系统不是状态完全能控的, 指出不能控的状态。(3分)
- (2) 判别系统的能观性。若系统不是状态完全能观的, 指出不能观的状态。(3分)
- (3) 若 $u = 0$, 判别自治系统的稳定性。(5分)
- (4) 若取 $u = -Kx$, 能否找到一个 K 使闭环系统稳定。若能, 求一个使闭环系统稳定的 K ; 若不能, 说明理由。(4分)

9. 两个线性定常系统的状态方程为:

$$\text{I. } \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

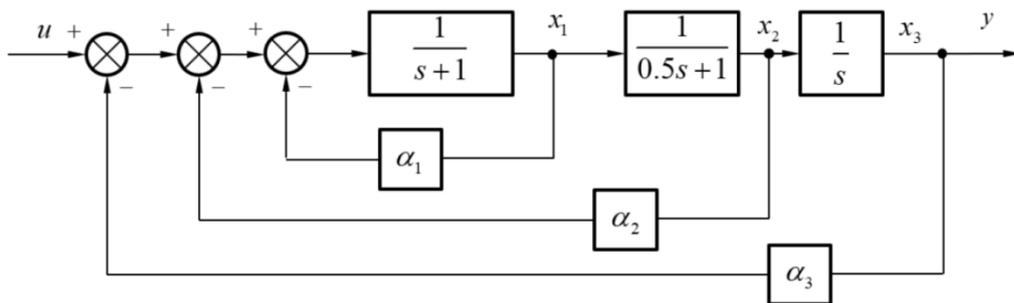


图 9.6

$$\text{II. } \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

(1) 选出一个可以实施状态反馈的系统, 设计状态反馈矩阵 F , 要求反馈系统的特征值为:

$$\lambda_1 = 5, \lambda_{2,3} = -1 \pm j;$$

(2) 画出具有状态反馈的闭环系统状态变量图。

10. 已知连续系统动态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \quad 0]x$$

- (1) 设采样周期为 $T = 1s$, 试求离散化动态方程;
- (2) 采样周期满足什么样的条件时, 离散化动态系统能控能观?

第九章 非线性系统控制分析

一 非线性特性

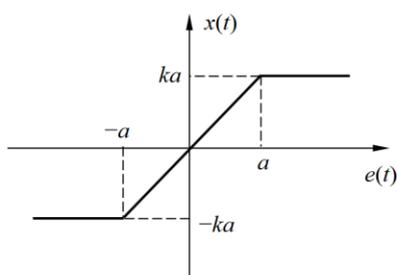
1. 不满足叠加原理
2. 稳定性更复杂。
3. 会产生自激振荡。线性系统在无外界周期变化信号作用时所具有的周期运动不是自激振荡。
4. 混沌现象。

在线性系统中，系统初始条件的微小改变可以导致系统输出的微小变化，对一个线性系统，可以预测系统输出在初始条件变化时的变化。

而有些非线性系统的输出对初始条件极为敏感。即使具有确定性的、十分精确的模型，也不能预言系统初始条件变化时的输出变化——混沌（Chaos）

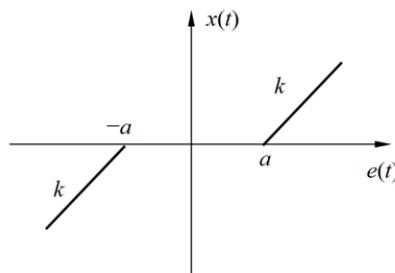
典型非线性特性

1. 饱和特性



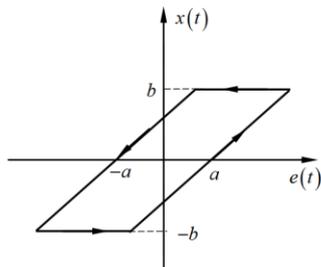
$$x(t) = \begin{cases} ke(t), & |e(t)| \leq a \\ k \operatorname{sgn}(e(t)), & |e(t)| > a \end{cases}$$

2. 死区特性



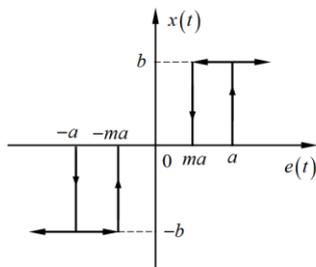
$$x(t) = \begin{cases} k(e(t) + a), & e(t) < -a \\ 0, & |e(t)| < a \\ k(e(t) - a), & e(t) > a \end{cases}$$

3. 滞环特性



$$x(t) = \begin{cases} k[e(t) - a], & \dot{x}(t) > 0 \\ b \operatorname{sgn}(e(t)), & \dot{x}(t) = 0 \\ k[e(t) + a], & \dot{x}(t) < 0 \end{cases}$$

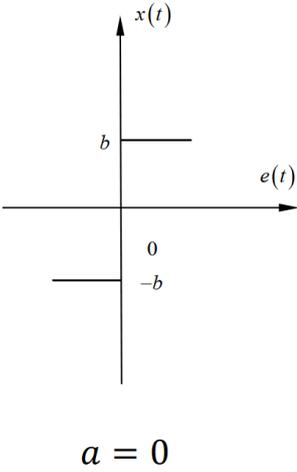
4. 继电器特性



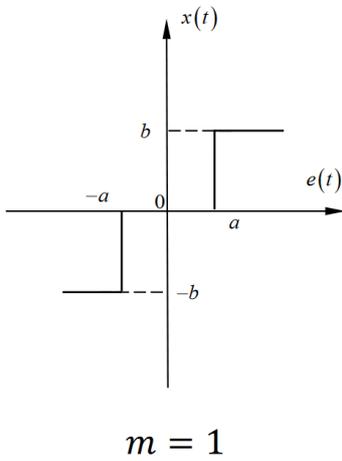
$$x(t) = \begin{cases} 0, & -ma < e(t) < a, \dot{e}(t) > 0 \\ 0, & -a < e(t) < ma, \dot{e}(t) < 0 \\ b \operatorname{sgn}(e(t)), & |e(t)| \geq a \\ b, & e(t) \geq ma, \dot{e}(t) < 0 \\ -b, & e(t) \leq -ma, \dot{e}(t) > 0 \end{cases}$$

继电特性

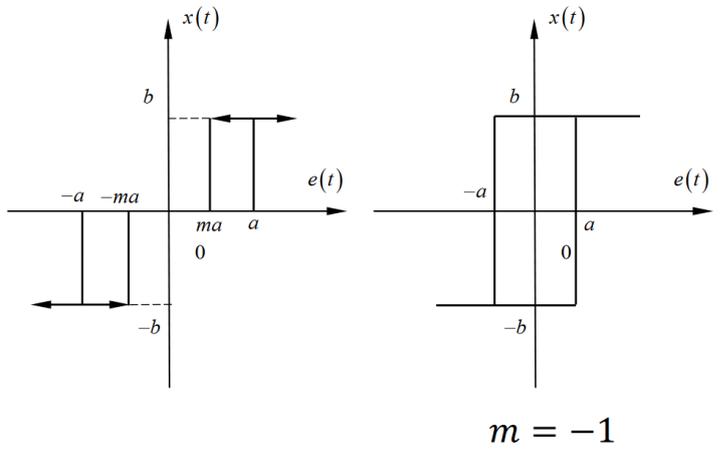
理想继电器



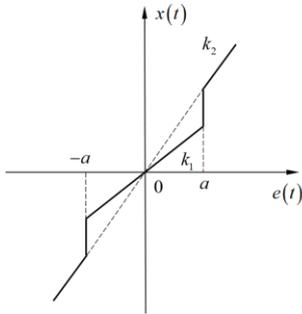
带死区继电器



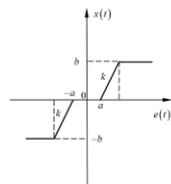
带滞环继电器



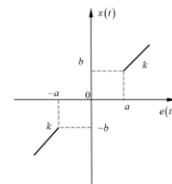
5. 变增益特性



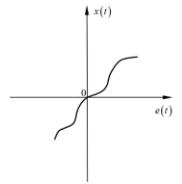
$$x(t) = \begin{cases} k_1 e(t), & |e(t)| < a \\ k_2 e(t), & |e(t)| > a \end{cases}$$



死区-线性-饱和特性



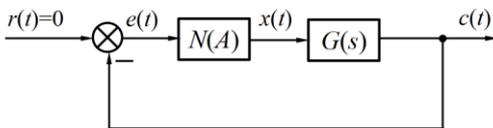
死区-线性特性



不规则非线性特性

复杂非线性特性

二 描述函数法



$$e(t) = A \sin \omega t$$

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t) \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \end{aligned}$$

$x(t)$ 是周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$ 的周期函数

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t) d(\omega t)$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos n\omega t d(\omega t)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin n\omega t d(\omega t)$$

$$X_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

$$\varphi_n = \arctan \frac{A_n}{B_n}$$

假设 1: 奇对称性. 即正弦输入下的输出 $x(t)$ 为 t 的奇对称函数, $x(t + \frac{\pi}{\omega}) = -x(t)$, 以保证非线性环节的正弦响应不含有常值分量, 即 $A_0 = 0$ 。

假设 2: 线性环节低通滤波特性良好. 在整个系统中, 线性环节低通滤波特性良好, 意味着在正弦输入情况下, 实际输出中高次谐波分量将被大大削弱。只有在这种条件下, 实际输出中基波分量才能较精确地近似代替正弦输入信号下的实际输出。当然, 描述函数法分析的精度也直接取决于线性环节的低通滤波特性, 低通滤波特性越好, 相应的分析精度也越高。

$$x(t) \approx x_1(t) = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t = X_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$N(A) = \frac{X_1}{A} e^{j\varphi_1} = \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{A} e^{j \arctan \frac{A_1}{B_1}} = \frac{B_1}{A} + j \frac{A_1}{A}$$

$\frac{X_1}{A}, \frac{A_1}{A}, \frac{B_1}{A}$ 都和A有关
(和线性情况不一样)

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t) d\omega t = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^\pi x(t) d\omega t + \int_\pi^{2\pi} x(t) d\omega t \right]$$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^\pi x(t) d\omega t + \int_0^\pi x\left(u + \frac{\pi}{\omega}\right) d\omega u \right] = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^\pi x(t) d\omega t + \int_0^\pi -x(u) d\omega u \right] = 0$$

$$A_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(t) \cos \omega t d\omega t, \quad B_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(t) \sin \omega t d\omega t$$

进一步地, 若 $f(e)$ 是奇函数

$$x(t) = f(A \sin \omega t), x\left(t + \frac{\pi}{\omega}\right) = f(-A \sin \omega t), x(-t) = f(-A \sin \omega t)$$

$$\text{可得: } x(t) = -x(-t), x\left(t + \frac{\pi}{\omega}\right) = -x(t) \quad A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi x(t) d\omega t = 0$$

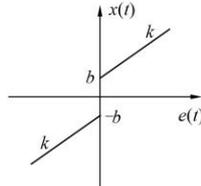
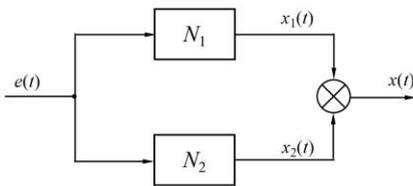
关于描述函数计算, 还具有以下特点。若 $x(t)$ 为奇函数, 即 $x(t) = -x(-t)$, 则

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos \omega t d\omega t = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi x(t) \cos \omega t d\omega t = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 x(t) \cos \omega t d\omega t + \int_0^\pi x(t) \cos \omega t d\omega t \right] = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\pi x(-t) \cos(-\omega t) d\omega t + \int_0^\pi x(t) \cos \omega t d\omega t \right] = 0$$

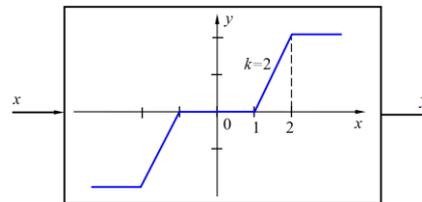
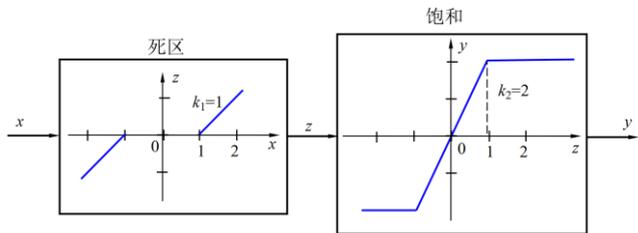
若 $x(t)$ 为奇函数, 且又为半周期内对称, 即 $x(t) = x\left(\frac{\pi}{\omega} - t\right)$ 时

$$B_1 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t) \sin \omega t d\omega t$$

组合非线性的描述函数



$$N(A) = k + \frac{4b}{\pi A}$$



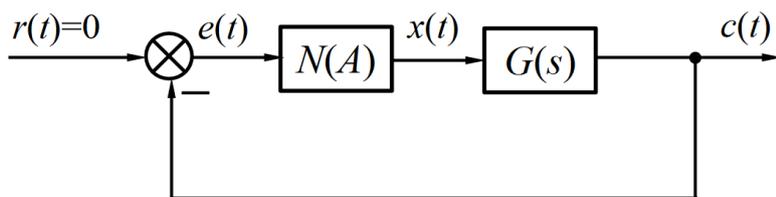
$$x_1(t) = N_1(A) A \sin \omega t$$

$$x_2(t) = N_2(A) A \sin \omega t$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = (N_1(A) + N_2(A)) A \sin \omega t$$

$$N(A) = N_1(A) + N_2(A)$$

非线性系统的稳定性



假设：描述函数可以作为一个具有复变增益的比例环节；
 $G(s)$ 具有低通特性，故极点位于左半平面

闭环特征方程： $1 + N(A)G(j\omega) = 0$ 或 $G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)}$

即

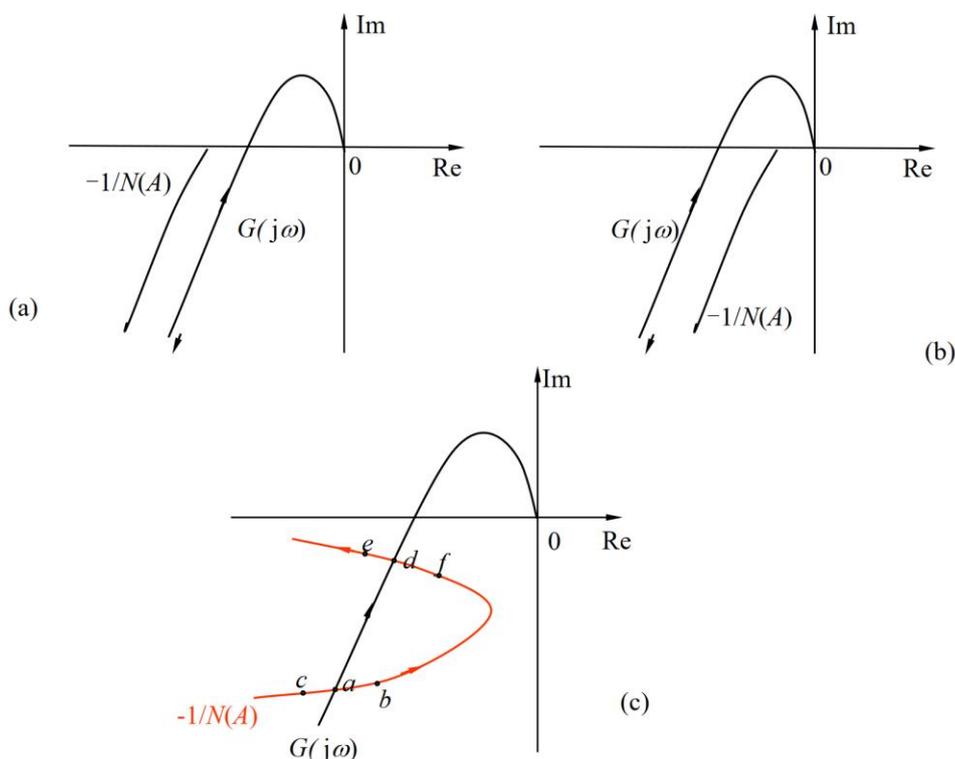
$$\begin{cases} |G(j\omega)N(A)| = 1 \\ \angle N(A) + \angle G(j\omega) = -180^\circ \end{cases}$$

推广的Nyquist稳定判据：

(1) 若线性环节的频率特性 $G(j\omega)$ 的轨迹不包围 $-\frac{1}{N(A)}$ 轨迹，如图10.24(a)所示，则非线性系统是稳定的，并且 $G(j\omega)$ 离 $-\frac{1}{N(A)}$ 越远，系统稳定程度越高。

(2) 若 $G(j\omega)$ 轨迹包围 $-\frac{1}{N(A)}$ 轨迹如图10.24(b)，则系统是不稳定的，系统将做发散运动。

(3) 若 $G(j\omega)$ 轨迹与 $-\frac{1}{N(A)}$ 轨迹有交点，如图10.25所示，则系统中存在着等幅振荡，其振幅和频率对应交点的振幅和频率。该等幅振荡可能是具有一定稳定性的等幅振荡，即自激振荡；也可能是不稳定的等幅振荡，即在一定条件下等幅振荡发散或收敛。



三 相平面法

相平面：

由系统某变量及其导数构成的用以描述系统状态的平面。

相轨迹：

系统变量及其导数随时间变化在相平面上描绘出来的轨迹。

相平面图的性质

(1) 相轨迹的斜率

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \frac{dx}{dt} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = -f(x, \dot{x})$$

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0$$

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{-f(x, \dot{x})}{\dot{x}}$$

(2) 相轨迹的奇点 (平衡点) 相轨迹上斜率不确定的点, 在x轴上

$$\alpha = \frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{-f(x, \dot{x})}{\dot{x}} = \frac{0}{0} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \dot{x} = 0 \end{cases}$$

对于线性定常系统, 原点是唯一的平衡点

(3) 相轨迹的运动方向

$$\begin{cases} \text{上半平面 } \dot{x} > 0 & \text{— 向右移动} \\ \text{下半平面 } \dot{x} < 0 & \text{— 向左移动} \end{cases} \quad \text{顺时针运动}$$

(4) 相轨迹通过横轴的方向

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{-f(x, \dot{x})}{\dot{x}} \quad \begin{cases} f(x, \dot{x}) \neq 0 \\ \dot{x} = 0 \end{cases} \quad \text{相轨迹以 } 90^\circ \text{ 穿越 } x \text{ 轴}$$

相轨迹的绘制——解析法

消去变量 t

求相轨迹方程的第二种方法是, 根据给定的微分方程分别求出 \dot{x} 和 x 对时间 t 的函数关系, 然后再从这两个关系式中消去变量 t , 便得相轨迹方程。再次考虑系统 (10.8.3), 对微分方程 $\ddot{x} = -M$ 积分一次, 求得

$$\dot{x} = -Mt$$

$$\dot{x} = -Mt$$

对上式再进行一次积分, 得到

$$x = -\frac{1}{2}Mt^2 + x_0$$

对上两式关于 \dot{x} 和 x 的表达消去变量 t , 最终求得相轨迹方程为

$$\dot{x}^2 = -2M(x - x_0)$$

相轨迹的绘制——解析法

直接积分法

设系统方程为 $\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$ ，试绘制系统的相轨迹。

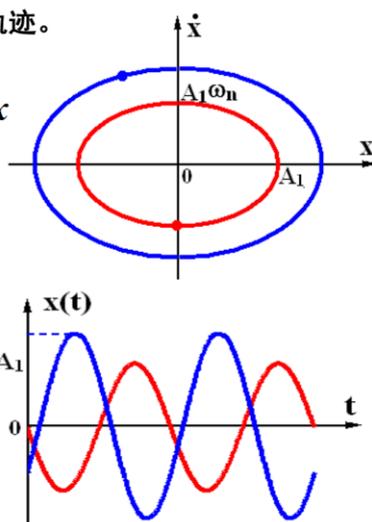
$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = -\omega_n^2 x$$

$$\dot{x} \cdot d\dot{x} = -\omega_n^2 x \cdot dx$$

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 = \frac{-\omega_n^2}{2} \cdot x^2 + C$$

$$x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega_n^2} = \frac{2C}{\omega_n^2} = A^2$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{A^2 \omega_n^2} = 1 \quad \text{— 椭圆方程}$$



相轨迹绘制——等倾线法

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0$$

对于二阶系统 (10.8.1)，其斜率方程为

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{f(x, \dot{x})}{\dot{x}} \quad (10.8.5)$$

该方程给出了相轨迹在相平面上任一点 (x, \dot{x}) 处切线的斜率。取相轨迹切线的斜率为某一常数 α ，得

$$\alpha = \frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{f(x, \dot{x})}{\dot{x}} \quad (10.8.6)$$

也就是说，相平面上满足该方程的点 (x, \dot{x}) ，其所对应的相轨迹在该点处切线的斜率为 α 。如果 $\dot{x} \neq 0$ ，则方程 (10.8.6) 可等价地写为

$$\alpha \dot{x} + f(x, \dot{x}) = 0 \quad (10.8.7)$$

该方程称为二阶系统 (10.8.1) 的等倾线方程。对比式 (10.8.7) 和 (10.8.1) 可以发现，二阶系统的等倾线方程可将系统方程 (10.8.1) 中系统状态对时间的二阶导数 \ddot{x} 替换为 $\alpha \dot{x}$ 得到。根据等倾线方程 (10.8.7)，可在相平面的各条相轨迹上求出具有同一斜率的点 (x, \dot{x}) ，将这些点连接起来，由此得到的等斜率轨迹便称为等倾线。

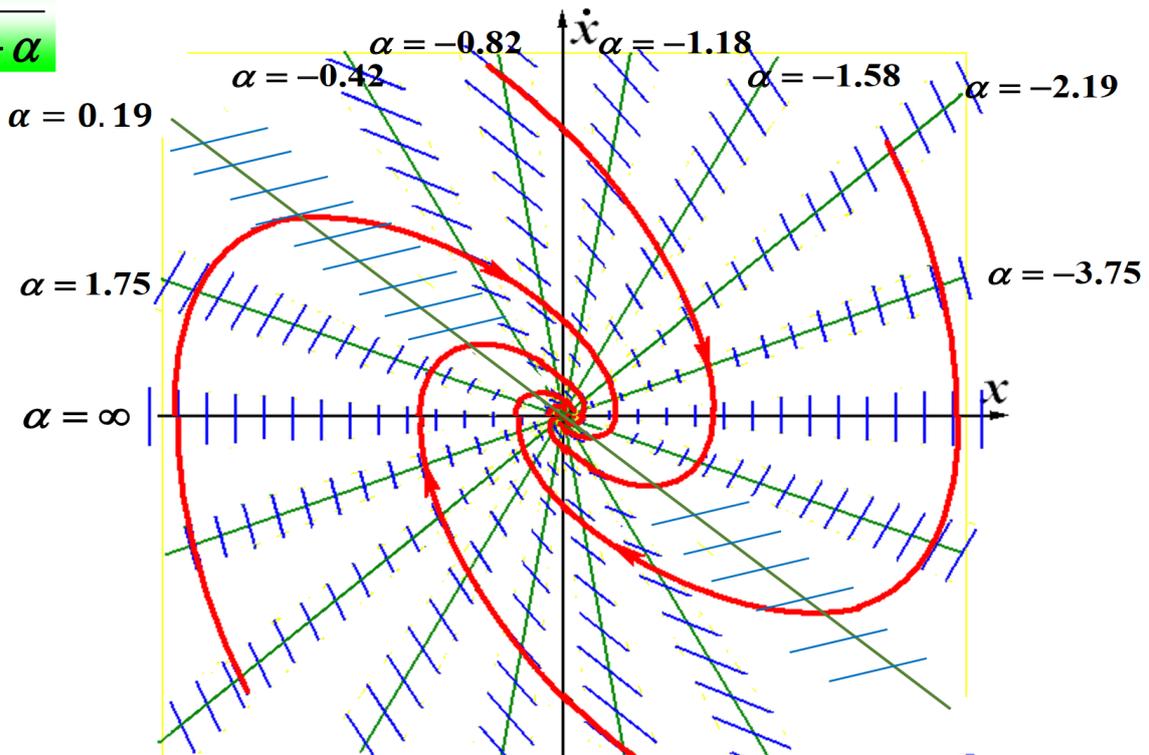
例3 系统方程 $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$ ，用等倾斜线法绘制系统相轨迹图。

$$\text{解} \quad \ddot{x} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = -(x + \dot{x}) \quad \alpha = \frac{-(x + \dot{x})}{\dot{x}}$$

$$\text{等倾斜线方程} \quad \dot{x} = \frac{-x}{1 + \alpha}$$

α	-3.75	-2.19	-1.58	-1.18	-0.82	-0.42	0.19	1.75	∞
$-1/(1+\alpha)$	0.36	0.84	1.73	5.67	-5.76	-1.73	-0.84	-0.36	0.00
$\arctan(\frac{-1}{1+\alpha})$	20°	40°	60°	80°	100°	120°	140°	160°	180°

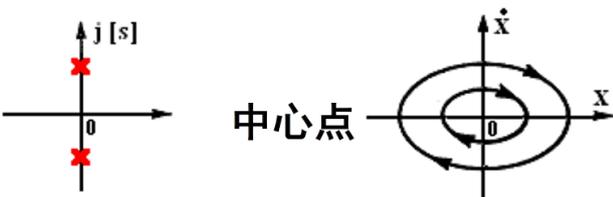
$$\dot{x} = \frac{-x}{1+\alpha}$$



线性二阶系统的相轨迹

奇点分稳定奇点和不稳定奇点。 据二阶系统特征根分布情况，奇点分：**中心点，节点（稳定的、不稳定的），焦点（稳定的、不稳定的），鞍点。**，相应的相轨迹图如下：

极点分布 奇点 相迹图

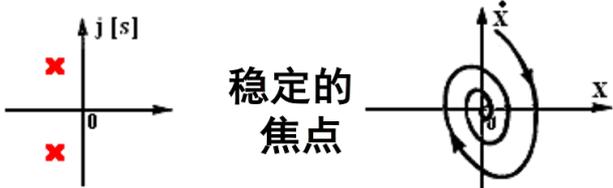


中心点

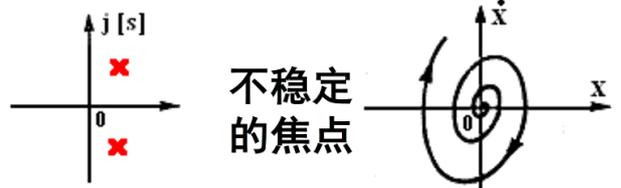
极点分布 奇点 相迹图



鞍点



稳定的焦点



不稳定的焦点



稳定的节点

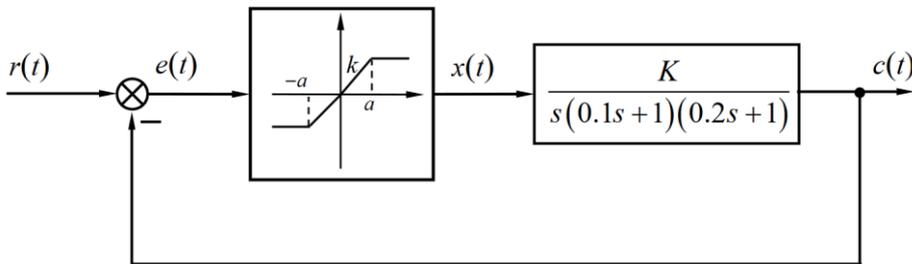


不稳定的节点

四 习题

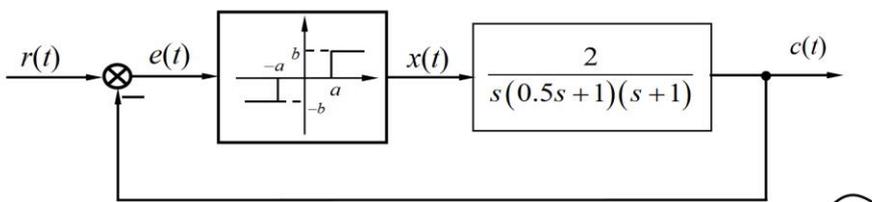
例 10.3:带饱和特性的非线性系统如图10.26所示，其中 $k = 2, a = 1$ 。

- (1) 试确定使系统稳定而不出现自激振荡的 K 的临界稳定值。
- (2) $K = 15$ 时，求系统自激振荡的振幅和频率。



例 10.4: 设包含死区继电器特性的非线性系统如图10.28所示。其中，饱和特性输出 $b = 3$ ，死区 $a = 1$ 。

- (1) 分析系统稳定性；
- (2) 继电器参数 a, b 应怎样调整使得系统不产生自激振荡？



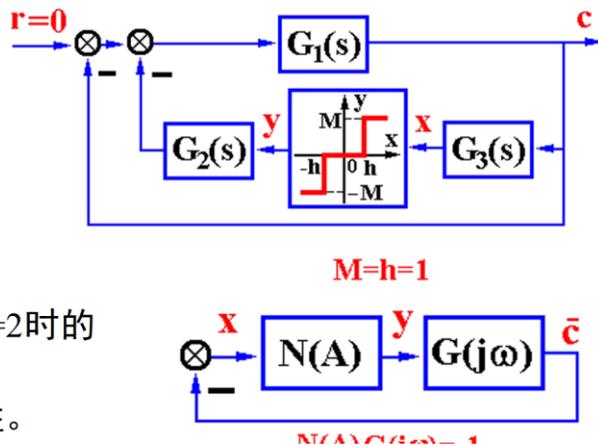
非线性系统结构图如右图所示，已知：

$$\begin{cases} G_1(s) = \frac{1}{s(s+1)}, & G_2(s) = \frac{K}{s} \\ N(A) = \frac{4M}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{A}\right)^2} & (A \geq h) \end{cases}$$

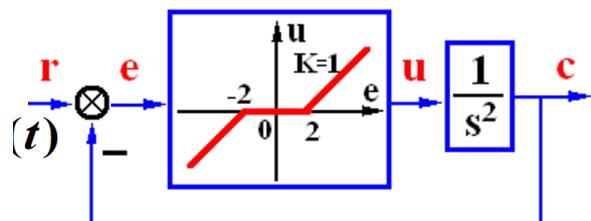
- (1) $G_3(s) = 1$ 时，系统是否自振？

确定使系统自振的 K 值范围；求 $K=2$ 时的自振参数。

- (2) $G_3(s) = s$ 时，分析系统的稳定性。



例2 系统如右，已知 $\begin{cases} c(0) = 0 \\ r(t) = 4 \times 1(t) \end{cases}$ 确定开关线方程，奇点位置和类型，绘制相轨迹 (e, \dot{e}) 图。



1. 系统结构图如图10.38所示。试用等倾斜线法作出系统的 $x - \dot{x}$ 相平面图。系统参数为 $K = T = M = h = 1$ 。

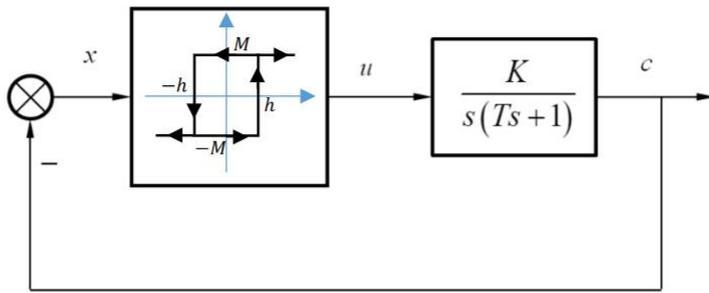


图 10.38

2. 非线性系统结构图如图10.39所示，取 (c, \dot{c}) 为坐标，写出相轨迹方程，并画出 $c(0) = 2, \dot{c}(0) = 0$ 起始的相轨迹。

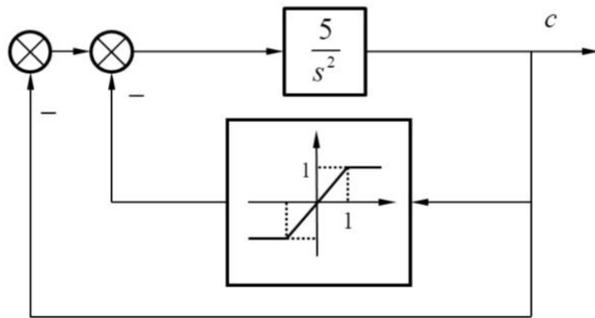


图 10.39

3. 三个非线性系统的非线性环节一样，线性部分分别如下，用描述函数分析时哪个系统的准确度高？

$$(1) G(S) = \frac{1}{s(0.1s+1)}$$

$$(2) G(S) = \frac{2}{s(s+1)}$$

$$(3) G(S) = \frac{2(1.5s+1)}{s(s+1)(0.1s+1)}$$

4. 试分析图10.42所示的非线性控制系统 ($M = 2, h = 0.5$) 的稳定性，若系统存在自振，则求出自振的振幅及频率。

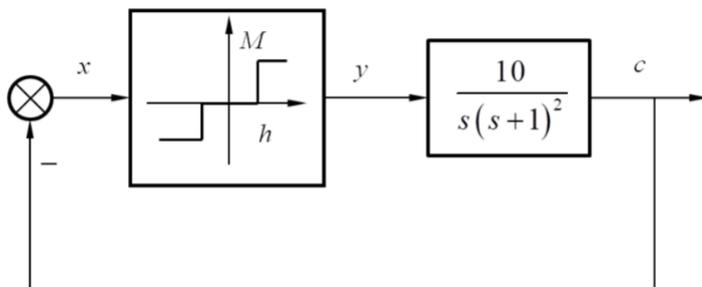


图 10.42

5. 已知图10.43所示的非线性系统，试求延迟时间 τ 为何值时，会使系统产生临界自振？临界自振时，非线性元件输入信号的振幅及频率各为多少？

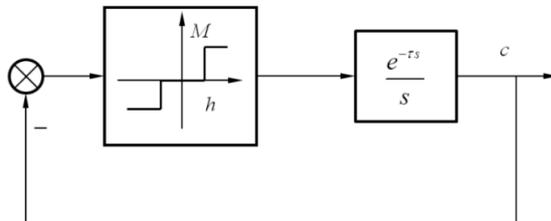


图 10.43

6. 非线性控制系统如图10.46所示，非线性特性为 $y(t) = x^3(t)$ ，用描述函数法分析系统的稳定性。

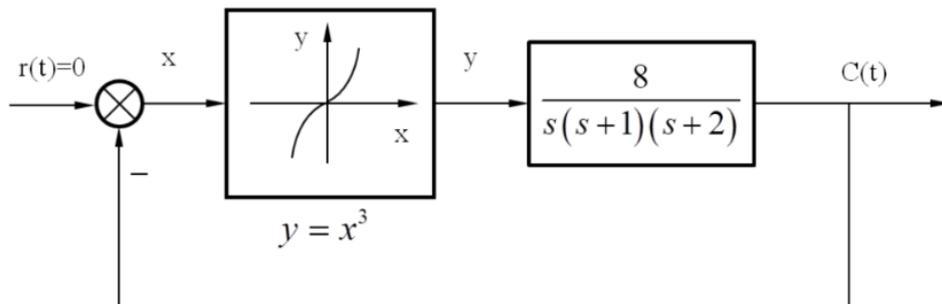


图 10.46

7. 某非线性系统如图10.48所示， $\frac{M}{h} = 2$ 。

- (1) 画出 $-\frac{1}{N(A)}$ 的图像；
- (2) 分析系统的稳定性，如存在自持振荡，请计算出自持振荡的频率与振幅；
- (3) 当 M 值不变， h 值加大时，系统将有何特点。

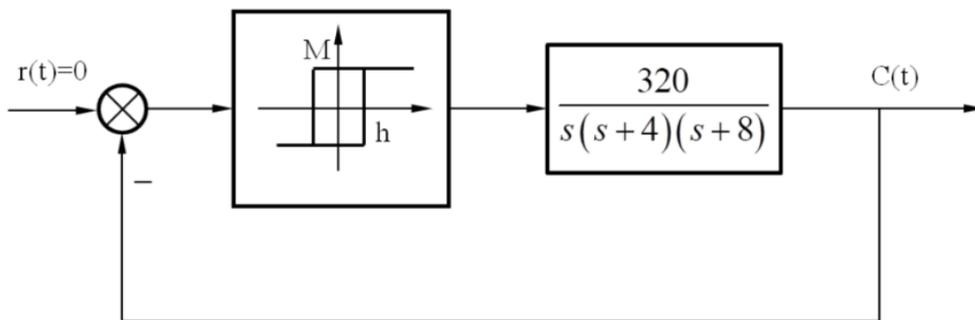


图 10.48

8. 设非线性系统如图10.49所示。试求：

- (1) 两个非线性环节串联后的等效非线性特性；
- (2) 用描述函数法求此系统的自振角频率 ω 和振幅 A 。

已知： $N_1 = \frac{2K}{\pi} \left[\arcsin \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} \right], A \geq a$

$N_2 = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{A}\right)^2}, A \geq \Delta$

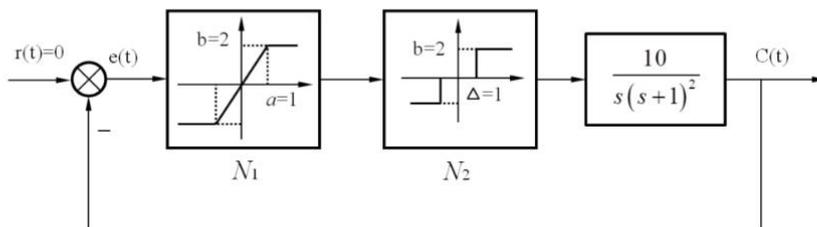


图 10.49

9. 设有一非线性系统，其平衡点附近的线性化微分方程为

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

系统的平衡点是相平面的奇异点，试给出下列 6 种情况下平衡点附近的相平面图 (图形特征要明显)，并标出奇异点的名称 (类型)。

- (1) $b > 0, b^2 < \omega_0^2$
- (2) $b < 0, b^2 < \omega_0^2$
- (3) $b > 0, b^2 > \omega_0^2$
- (4) $b < 0, b^2 > \omega_0^2$
- (5) $b = 0, \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$
- (6) $b = 0, \ddot{x} - \omega_0^2 x = 0$