数字图像处理 作业 4

朱文杰 220320623 自动化 6 班 | 2024.10.1

4.38

> 参考式 (4.95) 和式 (4.96) 中的二维离散卷积定理，证明：
>
> (a) $(f * h)(x, y) \iff (F \cdot H)(u, v)$ ； (b) $(f \cdot h)(x, y) \iff (1/MN)[(F * H)(u, v)]$

证明： (a) 已知二维离散卷积定义为：

$$g(x,y)=(f*h)(x,y)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}f(m,n)h(x-m,y-n)$$

对上式进行傅里叶变换，得：

$$G(u,v)=\mathscr{F}\left[(f*h)(x,y)\right]=\mathscr{F}\left[\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}f(m,n)h(x-m,y-n)\right]$$

根据线性性质和时移性质，可以得到：

$$G(u,v)=F(u,v)\cdot H(u,v)$$

所以

$$(f*h)(x,y)\iff(F\cdot H)(u,v)$$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{MN}(F*H)(u,v)\right] &= \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{MN}F(u,v)*H(u,v)\right] \\
&= \frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}\left[\frac{1}{MN}F(u,v)*H(u,v)\right]e^{j2\pi(ux/M+vy/N)} \\
&= \frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}\left[\frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}F(m,n)H(u-m,v-n)\right]e^{j2\pi(ux/M+vy/N)} \\
&= \frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}F(m,n)\cdot\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}H(u-m,v-n)e^{j2\pi(ux/M+vy/N)} \\
&= \frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}F(m,n)\cdot e^{j2\pi(mx/M+ny/N)}h(x,y) \\
&= f(x,y)h(x,y) \\
&= (f\cdot h)(x,y)
\end{aligned}$$

4.48

> 在连续频率域中，一个连续高斯低通滤波器的传递函数为
>
> $$H(\mu, v)=A e^{(\mu^2+v^2)/2\sigma^2}$$
>
> 证明连续空间域中的对应滤波器的核是
>
> $$h(t, z)=A 2 \pi \sigma^2 e^{-2 \pi^2 \sigma^2\left(t^2+z^2\right)}$$

证明：要想证明 $\mathscr{F}^{-1}\left[A e^{(\mu^2+v^2)/2\sigma^2}\right]=A 2 \pi \sigma^2 e^{-2 \pi^2 \sigma^2\left(t^2+z^2\right)}$ ，只需证明如果 $H(\mu)=e^{-\mu^2/2\sigma^2}$ ，则 $h(t)=\mathscr{F}^{-1}[H(\mu)]=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2/2\sigma^2} e^{j 2 \pi \mu t} d\mu=\sqrt{2\pi}\sigma e^{-\pi^2\sigma^2 t^2}$ ，即该积分成立。

将积分改写为

$$h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\mu^2-j 4 \pi \sigma^2 \mu t\right]} d\mu$$

由于 $e^{-\frac{(2\pi)^2\sigma^2 t^2}{2}} e^{\frac{(2\pi)^2\sigma^2 t^2}{2}}=1$，所以

$$\begin{aligned}
h(t) & =e^{-\frac{(2\pi)^2\sigma^2 t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\mu^2-j 4 \pi \sigma^2 \mu t-(2\pi)^2 \sigma^4 t^2\right]} d\mu \\
& =e^{-\frac{(2\pi)^2\sigma^2 t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\mu^2-j 2 \pi \sigma^2 t\right]^2} d\mu
\end{aligned}$$

令 $r=\mu-j 2 \pi \sigma^2 t$ ，$dr=d\mu$，则

$$\begin{aligned}
h(t) & =e^{-\frac{(2\pi)^2\sigma^2 t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr \\
& =\sqrt{2\pi}\sigma e^{-\frac{(2\pi)^2\sigma^2 t^2}{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr\right]
\end{aligned}$$

方括号内的表达式正好是高斯概率密度函数的积分，所以方括号内的数值等于 1。所以

$$h(t)=\sqrt{2\pi}\sigma e^{-\pi^2\sigma^2 t^2}$$

现证明 $h(t, z)=\mathscr{F}^{-1}\left[A e^{-(\mu^2+v^2)/2\sigma^2}\right]$:

$$\begin{aligned}
h(t, z) & =\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-(\mu^2+v^2)/2\sigma^2} e^{j 2 \pi(\mu t+v z)} d\mu dv \\
& =\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} A e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}+j 2 \pi \mu t} d\mu\right] e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}+j 2 \pi v z} dv \\
& =A \sqrt{2\pi}\sigma e^{-\pi^2\sigma^2 t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}+j 2 \pi v z} dv \\
& =A \sqrt{2\pi}\sigma e^{-\pi^2\sigma^2 t^2} \cdot \sqrt{2\pi}\sigma e^{-\pi^2\sigma^2 z^2} \\
& =A 2 \pi \sigma^2 e^{-2\pi^2\sigma^2\left(t^2+z^2\right)}
\end{aligned}$$

4.49

> 已知一幅大小为 $M \times N$ 的图像，请用截止频率为 D_0 的一个高斯低通滤波器传递函数，在频率域对这幅图像重复滤波。可以忽略计算上的舍入误差。
>
> (a) 设 K 是这个滤波器的应用次数。对于足够大的 K 值，你能预测结果（图像）是什么吗？如果能预测，那么结果是什么？

解：(a) 应用 K 次滤波器，得到 $G_K(u,v) = e^{-KD^2(u,v)/2D_0^2}F(u,v)$。

如果 K 足够大，高斯低通滤波器就会演变成陷波滤波器，且只允许通过 $F(0,0)$，即整个图像的像素平均值。

所以存在一个 K，只要滤波次数超过它，继续滤波只会产生一个恒定的图像，即全部像素均为图像像素平均值。

4.56

> 证明式 (4.121) 中的巴特沃斯高通滤波器是由式 (4.117) 中的低通滤波器得到的。
>
> 式 (4.121)：n 阶巴特沃斯高通滤波器（BHPF）的传递函数 $H(u,v) = \frac{1}{1+[D_0/D(u,v)]^{2n}}$
>
> 式 (4.117)：n 阶巴特沃斯低通滤波器（BLPF）的传递函数 $H(u,v) = \frac{1}{1+[D(u,v)/D_0]^{2n}}$

证明：

$$
\begin{aligned}
H_{HP} &= 1 - H_{LP} \\
&= 1 - \frac{1}{1+[D(u,v)/D_0]^{2n}} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{[D(u,v)/D_0]^{2n}} + \frac{[D(u,v)/D_0]^{2n}}{[D(u,v)/D_0]^{2n}}} \\
&= \frac{1}{1+[D_0/D(u,v)]^{2n}}
\end{aligned}
$$

所以 n 阶巴特沃斯高通滤波器是由 n 阶巴特沃斯低通滤波器得到的。