题目一：利用最小二乘辨识 SISO 的 LTI 系统的最优参数

解：由系统方程 $y(k) = -a_1 y(k-1) + b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \xi(k)$，

设：

$$Y = \begin{pmatrix} y(2) \\ y(3) \\ y(4) \\ y(5) \end{pmatrix} \qquad \phi = \begin{pmatrix} -y(1) & u(2) & u(1) \\ -y(2) & u(3) & u(2) \\ -y(3) & u(4) & u(3) \\ -y(4) & u(5) & u(4) \end{pmatrix} \qquad \theta = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

满足：

$$Y = \phi\theta + \xi$$

根据最小二乘法，其参数估计的结果为：$\hat{\theta} = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T Y$

代码：

```
yk = [0.3 0.5 -0.2 0.6 0.83];
u1 = [2.1 -2.7 0.8 1.5 -2.1];

Y = [yk(2); yk(3); yk(4); yk(5)];
X = [-yk(1), u1(2), u1(1);
        -yk(2), u1(3), u1(2);
        -yk(3), u1(4), u1(3);
        -yk(4), u1(5), u1(4)];
% 计算参数估计结果 theta_hat = inv(X' * X) * X' * Y
theta_hat = (X' * X) \ (X' * Y);
disp(theta_hat);
```

结果：$a_1 = -1.4862$, $b_0 = 0.3456$, $b_1 = 0.4569$

题目二：面积法编程

系统的传递函数为:

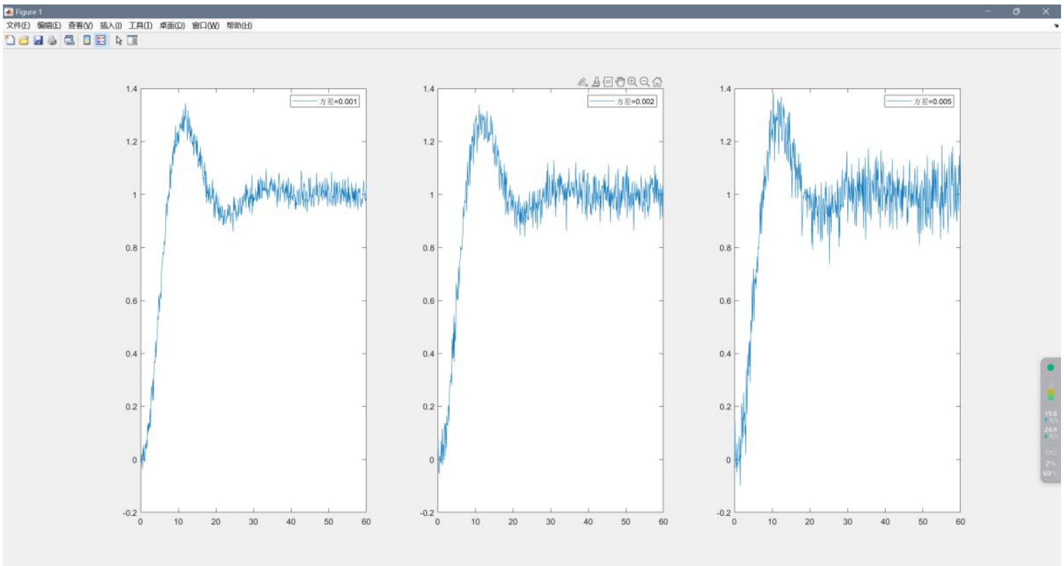
$$G(s) = \frac{1}{6s^3 + 12s^2 + 3s + 1}$$

1. 使用 step 函数产生该系统的阶跃响应，并在响应曲线中加入不同方差的高斯白噪声。

代码:

```
% (1) 使用 step 函数产生该系统的阶跃响应，并在响应曲线中加入不同方差的高斯白噪声
G = tf(1, [6, 12, 3, 1]);
t = 0:0.1:60;
[y, t] = step(G, t);
y_noise1 = y + sqrt(0.001) * randn(size(y));
y_noise2 = y + sqrt(0.002) * randn(size(y));
y_noise3 = y + sqrt(0.005) * randn(size(y));
figure;
subplot(1, 3, 1)
plot(t, y_noise1)
legend("方差=0.001")
subplot(1, 3, 2)
plot(t, y_noise2)
legend("方差=0.002")
subplot(1, 3, 3)
plot(t, y_noise3)
legend("方差=0.005")
```

结果：



2. 利用产生的阶跃响应通过面积法辨识得到传递函数中的参数。

代码:

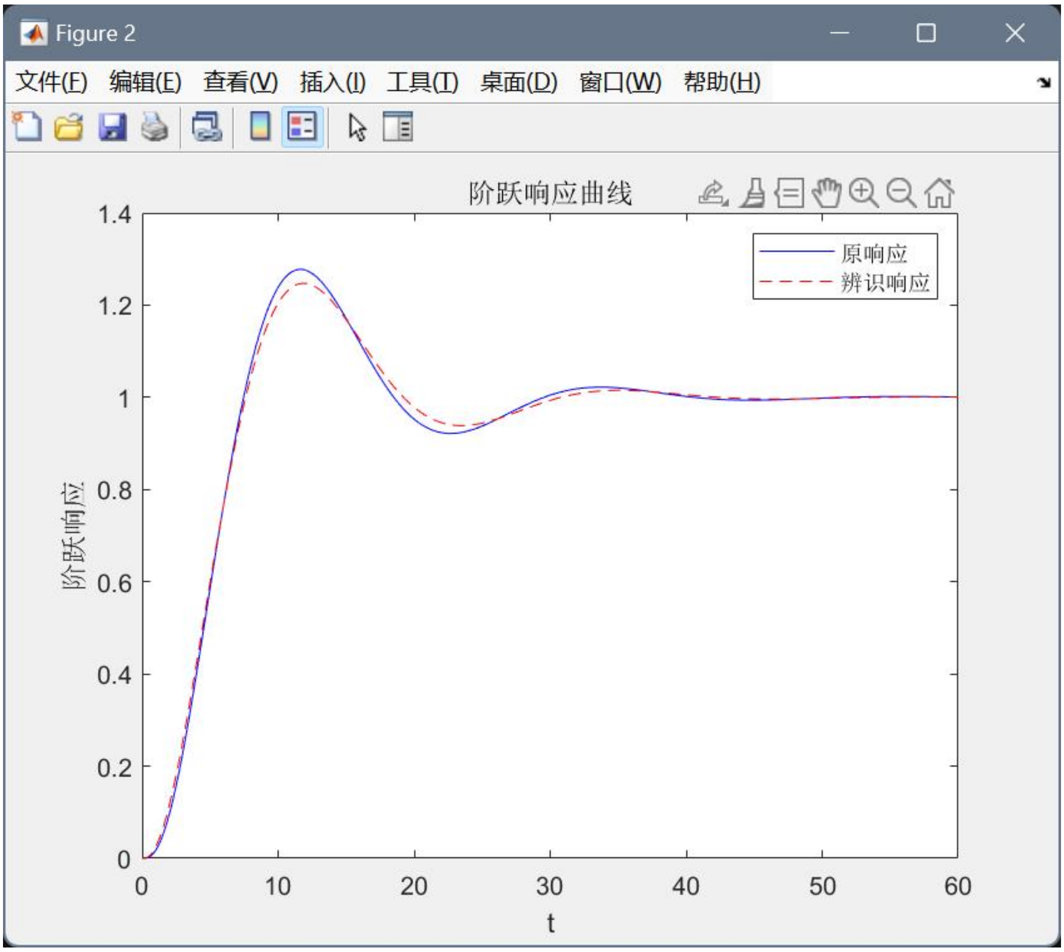
```
% (2) 利用产生的阶跃响应通过面积法辨识得到传递函数中的参数。
G = tf(1, [6 12 3 1]);
t = 0:0.1:60;
y = step(G, t)';
% 定义面积函数，计算 M(i)
function result = M(i)
    t = evalin('base', 't');
    y = evalin('base', 'y');
    % trapz 使用梯形法则进行数值积分
    result = trapz(t, (1 - y) .* (-t) .^ (i - 1) / factorial(i - 1));
end

% 利用 M(i) 计算 A1, A2, A3
A1 = M(1);
A2 = M(2) + A1 * M(1);
A3 = M(3) + A1 * M(2) + A2 * M(1);
fprintf('A1 = %.2f\nA2 = %.2f\nA3 = %.2f\n', A1, A2, A3);
b1 = 1; a1 = A3; a2 = A2; a3 = A1; a4 = 1;
G2 = tf(b1, [a1 a2 a3 a4]);
y2 = step(G2, t);
```

3. 输出辨识得到的传递函数与理论值对比，画出辨识所得传递函数和上述传递函数的阶跃响应曲线，进行对比分析。

结果：A1 = 3.00，A2 = 12.10，A3 = 2.97

曲线：



由曲线可知，辨识传递函数的阶跃响应曲线与理论传递函数的响应曲线几乎重合，故使用面积法辨识的精度较高。