一、简答题

1. 请简述系统的定义。系统的三要素是什么？请举出一个实例来说明。

1.系统的定义 具有特定的功能,按照某些规律结合起来,互相作用
互相依存的所有物体的集合或总和

系统三要素 ①实体:具有确定意义的物体
②属性 实体具有的有效特征
③活动 可分为内部活动和外部活动

系统例子.电动机转速闭环控制系统
实体:电动机、测速元件、比较元件、控制器
属性 转速
活动:实现按给定要求调节电动机的转速

2. 请写出线性定常连续系统的数学模型（至少 4 种）。

2.①微分方程模型 $a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=b_0u^{(m)}+\cdots+b_mu$

② 传递函数模型 $G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}$

③ 零极点增益形式 $G(s)=k\frac{\prod(s-z_i)}{\prod(s-p_j)}$ 累乘

④ 部分分式形式 $G(s)=k\sum_i\frac{r_i}{s-p_i}+h(s)$ 累加

⑤ 状态空间模型 $\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)\\ y(t)=Cx(t)+Du(t)\end{cases}$

3. 白噪声序列具有什么性质？可以用什么方法生成白噪声序列？

连续白噪声的性质. 均值为零, 自相关函数为脉冲函数, 功率谱密度为非零常数
$E\{w(t)\}=0$ $R_w(\tau)=\sigma^2\delta(\tau)$ $S_w(w)=\sigma^2$

白噪声序列的性质 随机序列$\{w(k)\}$两两不相关, $R_w(k)=\sigma^2\delta_k$, $S_w(w)=\sigma^2$

产生方法: ①均匀分布 乘同余法, $x_i=Ax_{i-1}(\mathrm{mod}\ M)$ $\Rightarrow T=2^{k-2}$

②正态分布 统计近似抽样法, 设 $\xi_i=\begin{cases}1 & \xi\in(0,1)\\ 0 & 其它\end{cases}$ $M_\xi=\frac{1}{2}$ $\sigma_\xi^2=\frac{1}{12}$ $\Rightarrow x=\frac{\sum_{i=1}^{N}\xi_i-NM_\xi}{\sqrt{N\sigma_\xi^2}}\sim N(0,1)$

注. $\sum\xi_i$的均值为NM_ξ方差$N\sigma_\xi^2$

系统辨识的定义 三要素

定义 按照一个准则在一组模型类中选择一个与数据拟合得最好的模型

三要素 数据、模型类、准则

4. 系统辨识常用的输入信号有哪些？（至少三种）

①脉冲输入 ②阶跃输入 ③正弦输入

5.数字仿真三要素:实际系统、数学模型、计算机
三个基本活动:模型建立、仿真实验、结果分析

6.建模三要素:目的、方法、验证

二、MATLAB 编程题

1. 请看下面代码并写出 C、D、E 的结果。

```
A=[1,2,3;4:6;7:9];
C=[A;[10 11 12]];
D=C(1:3,[2 3]);
E=C(2,1:2);
```

注. matlab中, a:b 会生成一个包括a,b两个端点的向量

eg. 7:9 = 7 8 9

1:2:10 = 1 3 5 7 9

matlab索引从1开始

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\\10&11&12\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}2&3\\5&6\\8&9\end{bmatrix},\quad E=[4\ 5]$$

2. 下面生成 M 序列的代码有误，请找出错误并改正。

```
N = 6;
Np = 2^N-1;
a = 2;
M = [0,0,0,0,0,0];
M_list = zeros(1,Np);
u = zeros(Np,1);
for i = 1:Np
  for j = Np : -1 : 2
    M(j) = M(j-1);
  temp = xor(M(4),M(7));
  M(1) = temp;
  M_list(i) = M(6);
end
a = 6;
u = (1-2*M_llist)*a;
```

a = 2; 重复了,去掉

M = [0,0,0,0,0,0]; ← 不能为全零序列, M=[1,0,0,1,0,0]

u = zeros(Np,1); × (1,Np) 要和M_list形状一致

for j = ~~Np~~ N : -1 : 2

异或xor需在移位前进行

end

M(7) 不存在

M_llist → M_list

M序列的自相关函数.

$$R_m(\tau)=\begin{cases}a^2 & \tau=0\\ 0 & 其它\end{cases}$$

$T=2^k-1,\ k=9$　　不能为0！

```
M = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0];  % 设置初始状态，9级移位寄存器
Np = 2^9-1;       % M序列的周期
u = zeros(1, Np);
for i = 1 : Np
    u(i) = M(9);     % 周期循环
    m = xor(M(9), M(5));        %  输入的反馈逻辑运算
    for  j = 9 : -1 : 2
        M(j) = M(j-1);              % 移位
    end
    M(1) = m;
end
a = 5;
for i=1:Np
    u(i)=(1-2*u(i))*a;      % 由逻辑值到物理值: u(i)=1 -> -a; u(i)=0 -> a
end
```

异或=模2运算

1 对矩阵进行操作(单步)，写出结果，考 matlab 矩阵语法

Matlab矩阵运算.

① 矩阵合并.抽取小矩阵 (注意索引从1开始)

② 加减运算. 同阶矩阵相加减,标量与矩阵相加减,相当于对每个元素运算

③ 乘除运算 A/B = A*inv(B)　　A\B = inv(A)*B

④ 点乘.点除.对每个元素进行运算,需为同阶矩阵

⑤ 乘方运算. A^P　P为 { 正整数 矩阵A自乘P次; 负整数 〃 再求逆; 分数. 如 $p=\frac{n}{m}$,则先将矩阵A自乘n次再开m次方 }

⑥ 关系运算. 两个同阶矩阵⇒对每个位置进行关系判断 } 结果的尺寸与两个运算矩阵一致

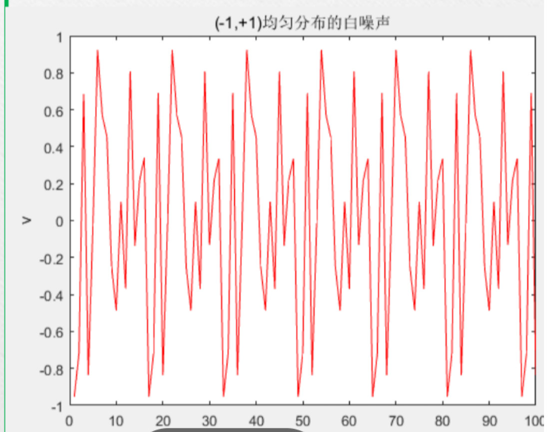
⑦ 逻辑运算 与 A&B 或 A|B 非 ~B

非零值即为1

2 用乘同余法生成高斯白噪声

例：产生[-1,1）的伪白噪声序列 $X_i = AX_{i-1}(\mathrm{mod}\,M)$

```
%白噪声产生程序 M=2^k, k=8 ⇒ T=2^(k-2)=64
A=6; x0=1; M=256; f=2; N=100;
for k=1:N
 x2=A*x0;
 x1=mod (x2,M); % x1的范围 0~255 (M-1)
 v1=x1/256; % 归一化 [0,1) 分布
 v(:,k)=(v1-0.5)*f; % [-1,1) 分布
 x0=x1;
 v0=v1;
end
v2=v;
k1=k;
%grapher
k=1:k1;
plot(k,v,'r');
xlabel('k'), ylabel('v');
title('(-1,+1)均匀分布的白噪声')
```



三、

某一阶倒立摆系统的数学模型为

$$\begin{cases}\ddot{X}(t)=-6\theta(t)+0.8F(t)\\ \ddot{\theta}(t)=40\theta(t)-2.0F(t)\end{cases}$$

（1） 写出 $X(t)$与$F(t)$、$\theta(t)$与$F(t)$ 的传递函数模型；

（2） 写出系统的状态空间模型。

解：(1) 原方程拉氏变换.

$$\begin{cases} s^2X(s)=-6\theta(s)+0.8F(s)\\ s^2\theta(s)=40\theta(s)-2F(s)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{X(s)}{F(s)}=\dfrac{0.8s^2-20}{s^4-40s^2}\\ \dfrac{\theta(s)}{F(s)}=\dfrac{-2}{s^2-40}\end{cases}$$

(2) 取状态变量 $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\theta\\ \dot{\theta}\\ X\\ \dot{X}\end{pmatrix}$, $u=F$, 则 $\dot{x}=\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\ 40x_1-2u\\ x_4\\ -6x_1+0.8u\end{pmatrix}$

故状态空间模型为

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\40&0&0&0\\0&0&0&1\\-6&0&0&0\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\0.8\end{pmatrix}u$$

$$y=\begin{pmatrix}\theta\\X\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}x$$

四、计算题（满分 23 分）

1. 系统状态变量 $x(1),x(2)$，测得三组输出量 $y(1),y(2),y(3)$，且知

$$\begin{cases} y(1)=3=x(1)+x(2)+v(1) \\ y(2)=1=x(1)+v(2) \\ y(3)=2=x(2)+v(3) \end{cases}$$

$$Y=\Phi X+\xi \Rightarrow X=(\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T Y$$

其中 $v(1),v(2),v(3)$ 为白噪声序列，试用最小二乘法估计状态变量 $x(1),x(2)$ 的值。

解：$Y=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$　$\Phi=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$\xi=\begin{pmatrix}v(1)\\v(2)\\v(3)\end{pmatrix}$ 原方程为 $Y=\Phi X+\xi$，由最小二乘估计知 $X=(\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T Y=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

2. 已知常微分方程 $\frac{dx(t)}{dt}=x(t)$，且初始条件 $x(0)=1$，取步长为 $h=0.1$，试分别用欧拉法、梯形法、4 阶龙格-库塔法求出 $t=2h$ 时的 $x(t)$。即求出 $x(2)$

对比 $\dot{x}(t)=x(t)$ 与 $\dot{x}(t)=f(t,x)$ 故 $f(t,x)=x$ [即 $f(t,x)$ 取其第二个元素]

解. 1. 欧拉法. $y_{k+1}=y_k+h f(t_k,y_k)$

即 $x(1)=x(0)+0.1\cdot x(0)=1.1$,

$x(2)=x(1)+0.1\cdot x(1)=1.21$

2. 梯形法 $\begin{cases} y^0_{k+1}=y_k+h f(t_k,y_k) \text{ —— 预估} \\ y_{k+1}=y_k+\frac{1}{2}\cdot h[f(t_k,y_k)+f(t_{k+1},y^0_{k+1})] \text{ —— 校正} \end{cases}$

即 $x(0)=1$, $h=0.1$, $f(t_k,x_k)=x(k)$

$x^0(1)=x(0)+h\,x(0)=1.1$,

$x(1)=x(0)+\frac{1}{2}h[x(0)+x^0(1)]=1+0.05[1+1.1]=1.105$

$x^0(2)=x(1)+h\,x(1)=1.2155$,

$x(2)=x(1)+\frac{1}{2}h[x(1)+x^0(2)]=1.221025$

3. RK4 方法. $\dot{x}=f(t,x)=x$, $h=0.1$

$$\begin{cases} y_{k+1}=y_k+\frac{h}{6}[K_1+2K_2+2K_3+K_4] \\ K_1=f(t_k,y_k) \\ K_2=f(t_k+\frac{h}{2},y_k+\frac{hK_1}{2}) \\ K_3=f(t_k+\frac{h}{2},y_k+\frac{hK_2}{2}) \\ K_4=f(t_k+h,y_k+hK_3) \end{cases}$$

先算　代入

① $k=0$, $k+1=1$ 时

$k_1=x(0)=1$, $k_2=x(0)+\frac{h}{2}k_1=1.05$,

$k_3=x(0)+\frac{h}{2}k_2=1.0525$, $k_4=x(0)+hk_3=1.10525$

$\Rightarrow x(1)=x(0)+\frac{h}{6}[k_1+2k_2+2k_3+k_4]=1.1052$

② $k=1$, $k+1=2$ 时.

$k_1=x(1)=1.1052$;　$k_2=x(1)+\frac{h}{2}k_1=1.1605$

$k_3=x(1)+\frac{h}{2}k_2=1.1632$;　$k_4=x(1)+hk_3=1.2215$

$\Rightarrow x(2)=x(1)+\frac{h}{6}[k_1+2k_2+2k_3+k_4]=1.2214$

例. 【例3.2.1】对微分方程 $\dot{y}=-2y$，用欧拉法，RK4法计算 t=0.4时的y，设t=0时，y(0)=1，取步长h=0.1

(3)RK4法　$\dot{y}=f(t,y)=-2y$

取 f 的第二个自变量 $x(-2)$

$K_1=f(t_k,y_k)=-2y_k$

$K_2=f(t_k+\frac{h}{2},y_k+\frac{h}{2}K_1)=-2[y_k+\frac{h}{2}(-2y_k)]=-1.8y_k$

$K_3=f(t_k+\frac{h}{2},y_k+\frac{h}{2}K_2)=-2[y_k+\frac{h}{2}(-1.8y_k)]=-1.82y_k$

$K_4=f(t_k+h,y_k+hK_3)=-2[y_k+h(-1.82y_k)]=-1.636y_k$

$$\begin{aligned}\therefore y_{k+1}&=y_k+\tfrac{h}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4)\\&=y_k+\tfrac{h}{6}(-2y_1-3.6y_k-3.64y_k-1.636y_k)\\&=0.8187y_k\end{aligned}$$

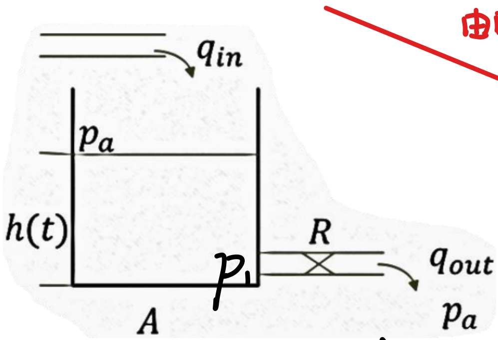
五、（满分 12 分）

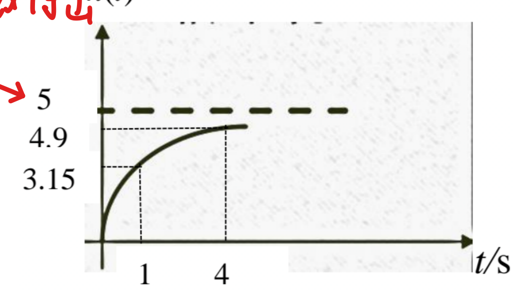
如图所示水箱液面控制系统，水箱中液体密度 ρ（单位 kg/m^3），液面高度为 h，底面积为 $A=1\mathrm{m}^2$，大气压强为 p_a（单位为 Pa），水箱底部压强为 p_1（单位为 Pa），上方注水管注水速率为 q_{in}（单位为 m^3/s），下方出水管出水速率为 q_{out}（单位为 m^3/s），流阻定义为 $R=\dfrac{p_a-p_1}{\rho q_{out}}$，重力加速度为 g（单位 m/s^2）。

（1） 试写出输出变量 h 和被控量 q_{in} 的数学模型（微分方程或传递函数形式）。

（2） 若 q_{in} 为阶跃输入信号时，$h(t)$随时间的变化规律如图所示，试写出 $h(t)$的时域表达式，并求出阶跃输入信号的幅值和流阻 R 的大小。

由时间常数得出





解：由质量守恒. $\dfrac{dm}{dt}=\dot{m}_{in}-\dot{m}_{out}$，同乘以$\dfrac{1}{\rho}$，有 $\dfrac{dV}{dt}=q_{in}-q_{out}$

由乘以$\dfrac{1}{A}$，有 $\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{q_{in}}{A}-\dfrac{q_{out}}{A}$ ···①

又由 $p_1=p_a+\rho g h(t)$，$p_1-p_a=\rho q_{out}R \Rightarrow q_{out}=\dfrac{gh(t)}{R}$，代入①式有：

$$A\dot{h}(t)=q_{in}-\frac{g}{R}h(t)$$

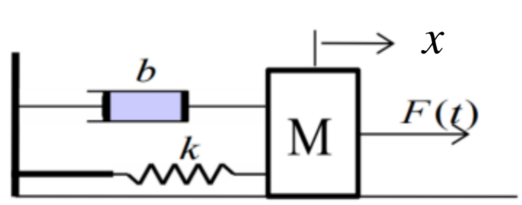
$$\Rightarrow AsH(s)=q_{in}(s)-\frac{g}{R}H(s) \Rightarrow \Phi(s)=\frac{H(s)}{q_{in}(s)}=\frac{1}{As+\frac{g}{R}}\overset{已知A=1}{=}\frac{1}{s+\frac{g}{R}}$$

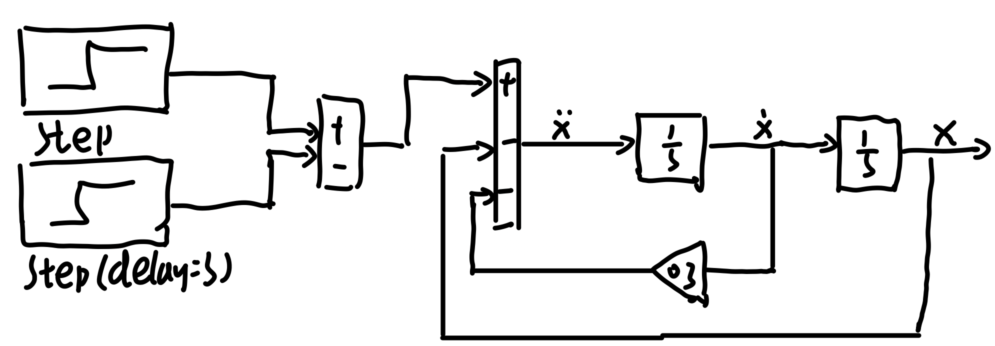
q_{in}为5的阶跃信号，$T=\dfrac{g}{R}$，由于 $t=1s$时 $\dfrac{3.15}{5}=0.63$，故 $T=1s$

$$h(t)=h(\infty)+[h(0)-h(\infty)]e^{-\frac{t}{T}}=5-5e^{-t} \quad t\geq 0 \quad T=\frac{g}{R} \Rightarrow R=g=9.8$$

六、（满分 16 分）

一质量 $M=1$kg 的箱子放在光滑水平地面上，其左侧与左侧墙面间连有阻尼系数 $b=0.3$N/(m/s)的阻尼器和 $k=1$N/m 的弹簧。箱子初始时处于静止状态，记此时为坐标原点。现在在箱子上作用一水平向右的力 $F=1$N，持续时间为 3s。请写出系统的传递函数和状态空间模型，并画出 Simulink 仿真框图。





解：牛二得 $F(t)-kx-b\dot{x}=M\ddot{x}$，代入数据，有 $\ddot{x}=-0.3\dot{x}-x+F$

传递函数. $s^2X(s)=-0.3sX(s)-X(s)+F(s)$

$$\Rightarrow \frac{X(s)}{F(s)}=\frac{1}{s^2+0.3s+1}$$

状态空间. 设 $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x(t)\\\dot{x}(t)\end{pmatrix}$，则 $\dot{x}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-0.3\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}u$

$$y=\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}x$$