系统建模与仿真

机电工程与自动化

哈尔滨工业大学深圳

系统

- 系统的概念（钱学森）
  - 具有特定的功能，按照某些规律结合起来，互相作用、互相依存的所有物体的集合或总和
- 系统三要素
- 实体
  - 具有确定意义的物体
  - 电力拖动系统电动机 热力系统控制阀
- 属性
  - 实体具有的有效特征 如温度 开度 速度
- 活动
  - 内部活动 外部活动
  - 控制阀开启 电网电压波动

连续系统/离散系统/混合系统

- 连续系统 (Continuous System) 时间触发
  - 系统状态随时间连续变化的系统，连续系统中发生的变化是平滑变化，如：导弹飞行过程中的姿态变化、飞行位置的变化
  - 离散时间系统：连续系统离散化
- 离散事件系统 (Discrete Event System) 事件触发
  - 系统状态（或参数）只在一些特定时刻被观测并产生相应离散数据，即系统操作和状态只在离散时刻发生，且这些时刻常常是随机的（不确定的）
  - 离散事件系统中发生的变化主要是断续的变化，如：经过某处的汽车数量、服务系统中的队列长度。
- 混合系统（连续-离散混合系统）（Hybrid System）
  - 一部分具有连续系统特性，另一部分具有离散事件系统特性

系统的研究方法

- 理论分析（解析）法
  - 运用已经掌握的理论知识对系统进行理论上的分析（纯理论意义、普遍性）
- 实验法
  - 对于已经建立（或已经存在）的实际系统，利用相关的仪器/仪表及装置，对系统施加一定类型的信号（或利用系统中正常的工作信号），通过测取系统响应来确定系统性能的方法。（简明、直观与真实）
- 仿真实验法
  - 在系统的模型上（物理的或数学的）进行系统性能分析与研究的实验方法，所遵循的基本依据是相似性原理。

系统模型

- 系统的物理的、数学的或其他逻辑的表现形式
- 系统模型是对实际系统的一种抽象，是系统本质的表述，是人们对客观世界反复认识、分析，经过多级转换、整合等相似过程而形成的最终结果，它具有与系统相似的数学描述或物理属性，以各种可用的形式，给出被研究系统的信息。

系统模型分类

按模型形式：

- 物理模型： DNA双螺旋结构模型
  - 以实物或图片形式直观表达认识对象的特征
- 数学模型---数学仿真（计算机仿真）
  - 内部因素变化关系的数学公式
- 描述模型 （模糊控制系统 If-Then-Else）

$$a\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+cx=F(t)$$

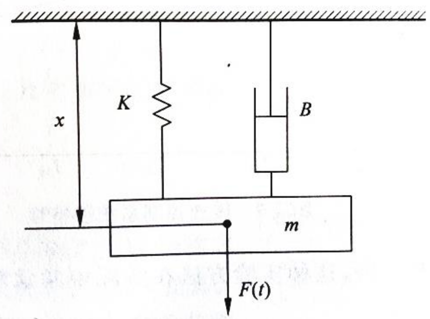


图 1-1 悬挂系统动力学模型

系统模型分类

按基本的数学描述：

- 静态系统模型
  - 代数方程，如：系统稳态解 （Riccatti 方程）
- 动态系统模型
  - 连续模型
    - 集中参数：微分方程、传递函数、状态方程，如：工程动力学、系统动力学……
    - 分布参数：偏微分方程，如：热传导场、波动方程……
  - 离散模型
    - 离散时间：差分方程、Z 变换、离散状态方程，如：计算机数据采集系统……
    - 离散事件：概率分布、排队论，如：交通系统、市场系统、电话系统……

系统数学模型分类

按对模型的求解方法分类：

- 用解析法求解的模型 $\dot{x}(t) = ax(t)$
  - 线性齐次微分方程（有解析解）$\dot{x}(t) = p(t)x(t) + q(t)$
- 用数值法求解的模型
  - 非线性齐次微分方程 $\dot{x}(t) = p(t)x^2(t) + q(t)$

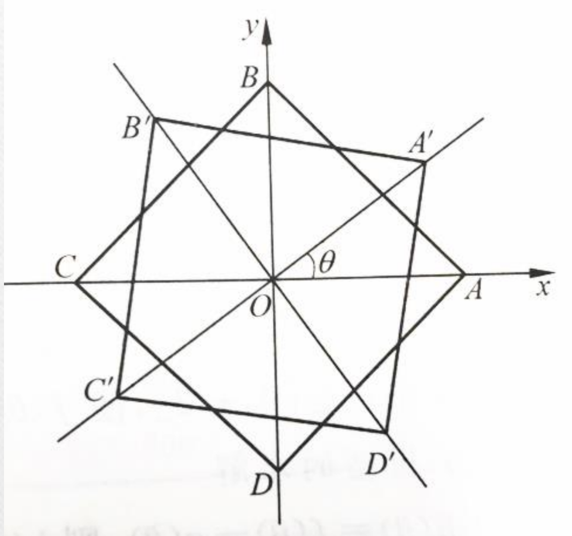
系统建模原则

- 可分离原则：系统中的实体不同程度上是相互关联的，系统分析忽略绝大部分联系。系统分离依赖于对系统的充分认识、环境的界定，系统因素的提炼以及约束条件与外部条件的设定。
- 假设合理性原则：数学模型是对系统的抽象，并提出合理性假设
- 因果性原则：系统的输入量和输出量满足函数映射关系，有因才有果

数学建模

利用各种数学理论建立实际应用问题的模型，寻求解决方法

- 四条腿椅子，放在不平坦的地面上，如何放平稳



$f(\theta)$: A、C 两脚与地面距离之和

$g(\theta)$: B、D 两脚与地面距离之和

$$f(\theta)g(\theta) = 0 \quad \forall\theta \in [0, \pi/2]$$

且假设 $f(0) \geq 0, g(0) = 0;$ $\quad f(\pi/2) = 0, g(\pi/2) \geq 0$

初始状态：A、C之间有一个脚没落地

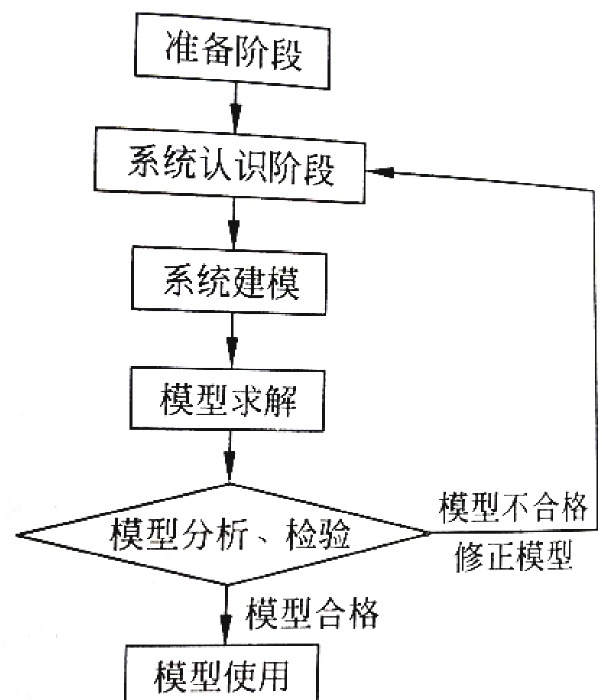
旋转90度后：B、D之间有一个脚没落地

求证：存在 $\theta_0 \in [0, \pi/2]$，使得 $f(\theta_0) = g(\theta_0) = 0$

现象 ➡ 数学

建模的步骤

- 准备阶段
  - 分析问题背景（文献调查），确定建模目的，摸清建模对象属性（自然科学、社会科学还是工程技术领域），确定模型实现是模拟还是仿真，定性还是定量
- 系统认识阶段
  - 建模的目标：优化或决策问题：质量最好、产量最
    目标还是多目标模型；表述形式目标最大化最小化
  - 建模的规范：对象有效范围限定、解决问题的方式
  - 建模的要素：模型所涉及的真正起作用的要素
  - 模型中的关系和限制
- 系统建模阶段
  - 分析要素的表示，关系的表示，哪些变量、常量，
  - 建模方法确定
- 模型求解和模型验证



模型的建立

- 把系统行为概括为数学函数关系
- 步骤
  - 确定模型结构、约束条件
  - 测取模型数据
  - 运用适当理论建立系统的数学描述
  - 检验数学模型准确性

控制好坏以数学模型为基础

系统仿真

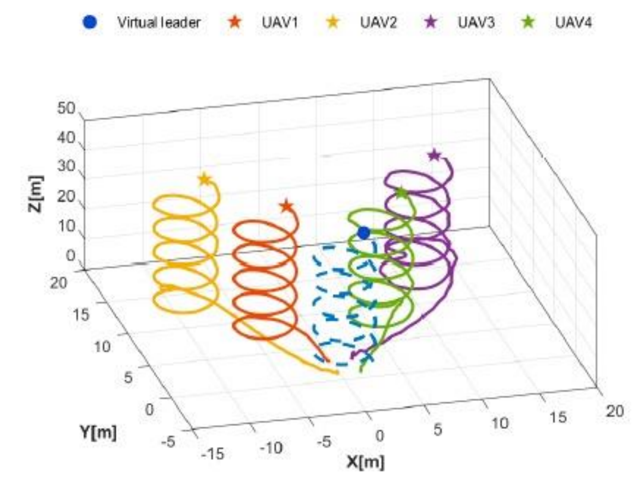


Fig. 5. Formation flight trajectories.

定义

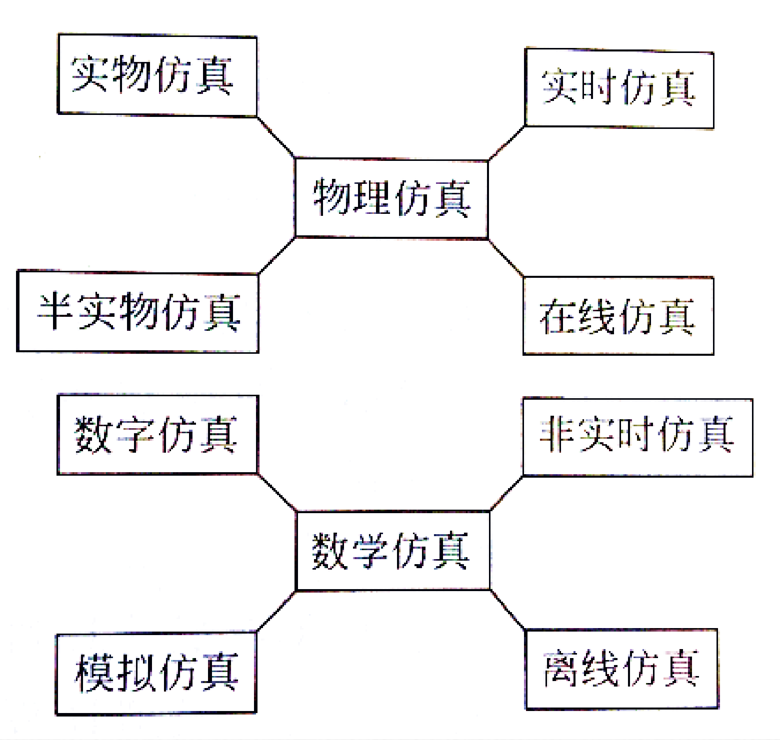
- 模仿真实事物
- 在数字计算机上进行试验的数
- 用一个人造的系统（称为仿真系统）去模仿一个真实或设想的系统行为，以对其进行研究
- 对系统模型进行随时间演化试验的活动，或是利用系统模型展现类似系统运行的过程或特性的活动。

- 经济 对大型复杂系统 直接实验昂贵
- 安全 直接实验危险（载人飞行器，核电装置）
- 快捷 加快工作进程

系统仿真理论依据

- 相似性原理
  - 几何相似（等比模型）
    - 风洞实验
    - 水池船舶实验
  - 环境相似
    - 驾驶员操控培训系统 （虚拟现实）
  - 性能相似（数学相似）
    - 不同问题用相同数学模型
  - 思维相似
    - 专家系统、神经网络
  - 生理相似
    - 仿生系统

系统仿真的分类



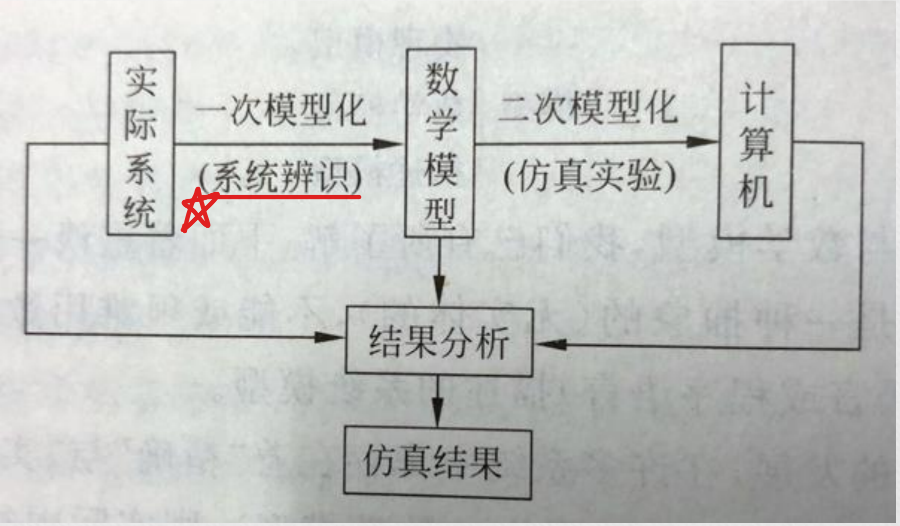
按模型分类

物理仿真：构成复杂，造价较高

数学仿真：具有非实时性和离线经济、快捷和实用

数字仿真

- 数字仿真三要素
  - 实际系统、数学模型、计算机
- 数字仿真三个基本活动
  - 模型建立、仿真实验、结果分析



浦丰（Buffon）的针

- 1） 取一张白纸，在上面画上许多条间距为a的平行线。
- 2） 取一根长度为l（l≤a） 的针，随机地向画有平行直线的纸上掷n次，观察针与直线相交的次数，记为m。
- 3）计算针与直线相交的概率.

$$p = \frac{2l}{\pi a}$$ 事件发生的可能性

$$n \to \infty, \frac{m}{n} \to p \quad \Rightarrow \quad \pi \approx \frac{2ln}{ma}$$

证明过程

证明一：找一根铁丝弯成一个圆圈，使其直径恰恰等于平行线间的距离a。可以想象得到，对于这样的圆圈来说，不管怎么扔下，都将和平行线有两个交点。因此，如果圆圈扔下的次数为n次，那么相交的交点总数必为2n。

现在设想把圆圈拉直，变成一条长为πa的铁丝。显然，这样的铁丝扔下时与平行线相交的情形要比圆圈复杂些，可能有4个交点，3个交点，2个交点，1个交点，甚至于都不相交。

由于圆圈和直线的长度同为πa，根据机会均等的原理，当它们投掷次数较多，且相等时，两者与平行线组交点的总数期望也是一样的。这就是说，当长为πa的铁丝扔下n次时，与平行线相交的交点总数应大致为2n。

现在转而讨论铁丝长为l的情形。当投掷次数n增大的时候，这种铁丝跟平行线相交的最大的交点总数m应当与长度l成正比，因而有：m=kl，式中k是比例系数。

为了求出k来，注意到l=πa时的特殊情形，有m=2n。于是求得 $\pi a = k\cdot 2n \Rightarrow k$

$$k=\frac{2n}{\pi a}$$

代入前式就有：$\frac{m}{n}=\frac{2l}{\pi a}$

将此结论推广到l≤a ，那么最多也只有一个交点，m与n的比值是针与直线相交的概率。

证明过程

证明一：找一根铁丝弯成一个圆圈，使其直径恰恰等于平行线间的距离a。可以想象得到，对于这样的圆圈来说，不管怎么扔下，都将和平行线有两个交点。因此，如果圆圈扔下的次数为n次，那么相交的交点总数必为2n。现在设想把圆圈拉直，变成一条长为πa的铁丝。显然，这样的铁丝扔下时与平行线相交的情形要比圆圈复杂些，可能有4个交点，3个交点，2个交点，1个交点，甚至于都不相交。由于圆圈和直线的长度同为πa，根据机会均等的原理，当它们投掷次数较多，且相等时，两者与平行线组交点的总数期望也是一样的。这就是说，当长为πa的铁丝扔下n次时，与平行线相交的交点总数应大致为2n。

现在转而讨论铁丝长为l的情形。当投掷次数n增大的时候，这种铁丝跟平行线相交的最大的交点总数m应当与长度l成正比，因而有：m=kl，式中k是比例系数。

为了求出k来，注意到l=πa时的特殊情形，有m=2n。于是求得

$$k=\frac{2n}{\pi a}$$

代入前式就有：$\frac{m}{n}=\frac{2l}{\pi a}$

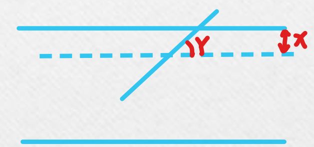
但此证明较不严谨，例如圆和直线期望相等，铁丝与平行线的交点成正比。接下来用概率论和微积分提供严谨的证明。

证明过程

证明二：由于向平面投针是随机的，所以用二维随机变量（X,Y）来确定它在平面上的具体位置。设X表示针的中点到平行线的的距离，Y表示针与平行线的夹角，如果 $X < \frac{l}{2}\sin Y$ 时，针与直线相交。并且X在 $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ 服从均匀分布，Y在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 服从均匀分布，XY相互独立，由此可以写出（X，Y）的联合概率密度函数

$f(x,y)=f(x)f(y)$

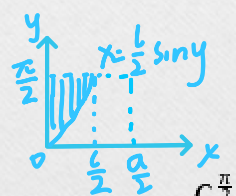
因此所求概率



二维均匀分布

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi a} & 0<x<\dfrac{a}{2}, 0<y<\dfrac{\pi}{2}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

相交条件： $X < \frac{l}{2}\sin Y$

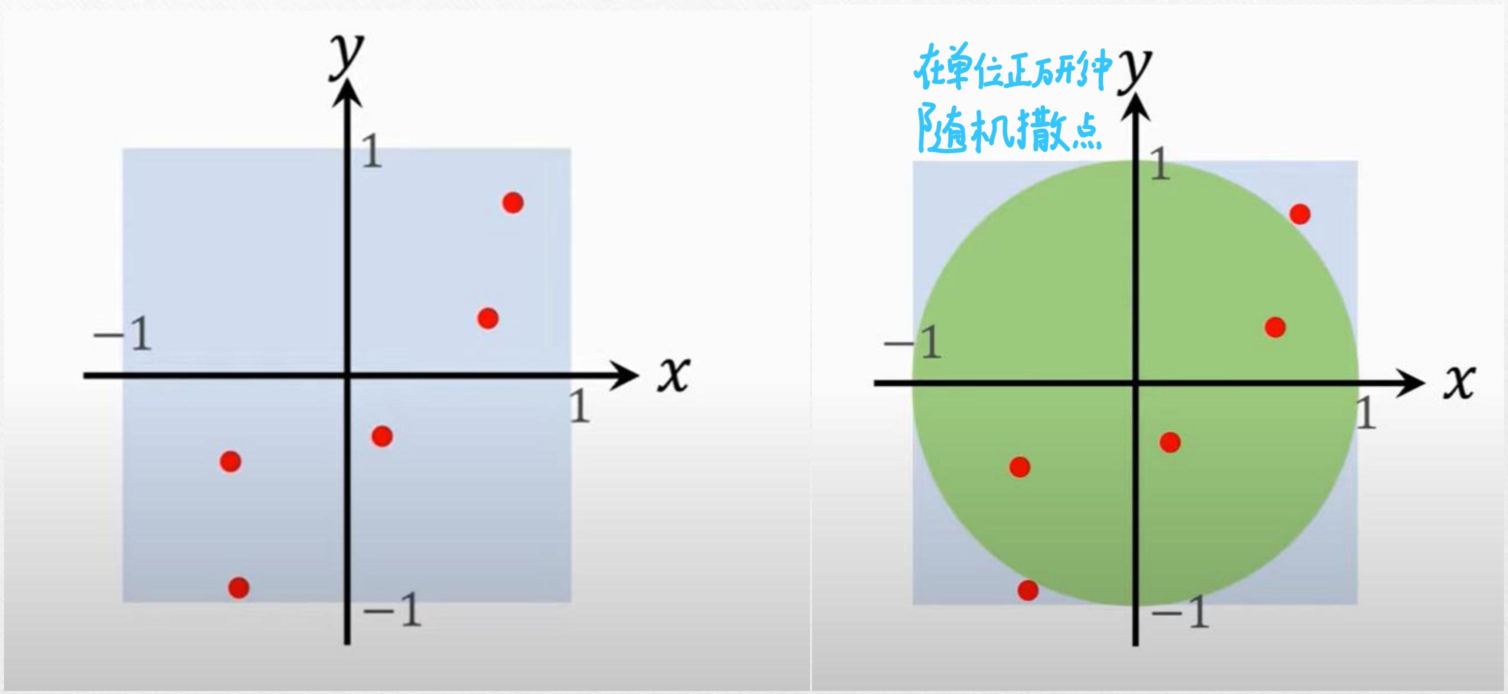


$a \geq l$

$$P\left\{X < \frac{l}{2}\sin Y\right\} = \iint\limits_{X<\frac{l}{2}\sin Y} f(x,y)\,dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{l}{2}\sin y}\frac{4}{\pi a}\,dxdy = \frac{2l}{\pi a}$$

二重积分 ⟶ 二次积分

Pi的计算



落在圆内的点的个数

$$\left|\frac{4m}{n} - \pi\right| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

撒的点的总数