

系统建模与分析

Outline

2.1 连续控制系统的数学模型

2.2 系统建模概述

2.3 系统建模方法

2.4 模型验证

2.5 系统建模实例

2.6 问题与探究

2.1 连续控制系统的数学模型

1 数学模型的表示形式

根据系统数学描述方法的不同，可建立不同形式的数学模型

➤ 微分方程形式 I/O form 输入/输出型式

设线性定常（LTI）系统输入、输出量是单变量（SISO），分别为 $u(t), y(t)$

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = b_0 u^{(m)} + \cdots + b_m u$$

模型参数形式为： 输出量时间导数

输出参数向量 $A = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ $n+1$ 维

输入参数向量 $B = [b_0, b_1, \dots, b_m]$ $m+1$ 维

初始条件 $[y(0), y^{(1)}(0), \dots, y^{(n)}(0)]$

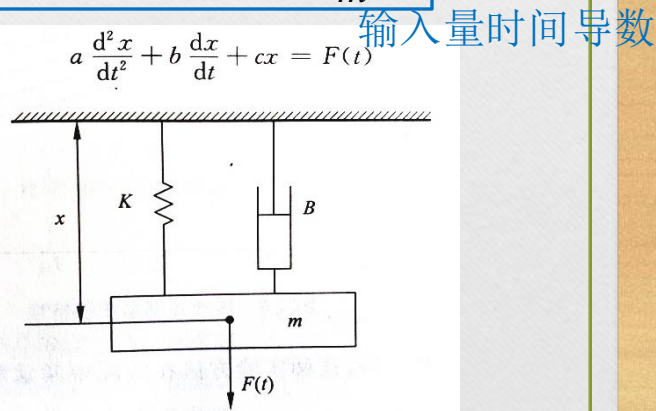


图 1-1 悬挂系统动力学模型

微分方程的解与动态系统响应

- 微分方程描述了系统的运动规律，微分方程的解对应的就是对应系统的响应。

牛顿第二运动定律 $F = ma = mx^{(2)}(t)$ 二阶微分方程

通解 $x = A + Bt$, 特解 $x = \frac{F}{2m}t^2$, \Rightarrow 全解 $x = A + Bt + \frac{F}{2m}t^2$

给定初始条件 $x(0) = A_0$, $x^{(1)}(0) = B_0$
 $\Rightarrow x(0) = A = A_0$, $x^{(1)}(0) = B = B_0$

此微分方程的解: $x = A_0 + B_0t + \frac{F}{2m}t^2$

零输入响应 零状态响应

线性常系数ODE 全解 = 齐次方程非零初始条件解 + 非齐次方程零初始条件解
线性定常 (LTI) 系统响应 = 零输入响应 + 零状态响应

2.1 控制系统的数学模型

➤ 状态方程形式

state space

当控制系统输入、输出为多变量时，可用向量分别表示为

$u(t), y(t)$ ，系统的内部状态变量为 $x(t)$ 。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

eg. $ay'' + by' + cy = u$

设 $x = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}$, 则 $\dot{x} = \begin{bmatrix} y' \\ y'' \end{bmatrix}$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{a} \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0] x.$$

引入状态变量 x ，把高阶的线性微分方程转化为状态空间的形式（一阶线性微分方程组）

模型参数形式为： $u(t) \in R^m, y(t) \in R^r, x(t) \in R^n$

系统系数矩阵 $A \in R^{n \times n}$ ，系统输入矩阵 $B \in R^{n \times m}$

系统输出矩阵 $C \in R^{r \times n}$ ，直接传输矩阵 $D \in R^{r \times m}$

简记为(A,B,C,D)形式。

系统响应

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

零输入响应

零状态响应

与系统状态有关

与系统输入有关

2.1 控制系统的数学模型

➤ 传递函数形式

在零初始条件下，将系统微分方程两边进行拉氏变换，则有

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad s = \sigma + j\omega$$

transfer function
系统零点

模型参数可表示为 *代数基本定理* $\Rightarrow a_0(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)$
复数域里

传递函数分母系数向量 $A = [a_0, a_1, \dots, a_n]$

传递函数分子系数向量 $B = [b_0, b_1, \dots, b_m]$

用 num=B, den=A 分别表示分子，分母参数向量，则可简练的表示为 (num,den)，称为 传递函数二对组模型参数。

2.1 控制系统的数学模型

➤ 零极点增益形式 zero-pole-gain form

将传递函数中的分子，分母分解为因式连乘形式，则有

$$G(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s-z_i)}{\prod_{i=1}^n (s-p_i)} = K \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}$$

$K = \frac{b_0}{a_0}$

↓ 根轨迹增益

模型参数可表示为

系统零点向量: $Z = [z_0, z_1, \dots, z_n]$

系统极点向量: $P = [p_0, p_1, \dots, p_n]$

简记为(Z,P,K)形式，称为零极点增益三对组模型参数。

2.1 控制系统的数学模型

➤ 部分分式形式 方便做反拉氏变换, 得到时域解

将传递函数表示为如下形式

$$G(s) = K \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{(s - p_i)} + h(s)$$

← 留数

eg. $\frac{s^2+s}{s^2+1} = \frac{s^2+1+s-1}{s^2+1}$
 $= 1 + \frac{s-1}{s^2+1} = 1 + \frac{s-1}{(s+i)(s-i)}$
 $= 1 + \frac{A}{s+i} + \frac{B}{s-i}$ A B即留数
A, B求法: 待定系数法/求极限法

模型参数可表示为

极点留数向量: $r = [r_0, r_1, \dots, r_n]$

极点向量: $p = [p_0, p_1, \dots, p_n]$

余式向量: $h = [h_0, h_1, \dots, h_l]$

简记为(R,P,H), 称为极点留数模型参数。 $l = m - n$

2.1 控制系统的数学模型

➤ 部分分式形式

传递函数 $F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (n > m)$

设

$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)$$

情况1: 当 $A(s) = 0$ 无重根时,

$$F(s) = \frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2} + \dots + \frac{C_n}{s - p_n}$$

其中

$$C_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i) F(s) = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i) \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

或

$$C_i = \frac{B(s)}{A'(s)} \Big|_{s=p_i} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{\lim_{s \rightarrow p_i} \frac{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}{(s - p_i)}}$$

$$f(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t}$$

情况2: 当 $A(s) = 0$ 有重根时(设 p_1 为 m 重根, 其余为单根)

$$F(s) = \left[\frac{C_m}{(s - p_1)^m} + \frac{C_{m-1}}{(s - p_1)^{m-1}} + \dots + \frac{C_1}{s - p_1} \right] + \frac{C_{m+1}}{s - p_{m+1}} + \dots + \frac{C_n}{s - p_n}$$

其中

$$C_m = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i)^m F(s)$$

$$C_{m-1} = \frac{1}{1!} \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{d}{ds} [(s - p_i)^m F(s)]$$

$$C_{m-j} = \frac{1}{j!} \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{d^{(j)}}{ds^{(j)}} [(s - p_i)^m F(s)]$$

Until $j = m - 1$

2.1 控制系统的数学模型

2 数学模型的转换

➤ 微分方程与传递函数形式

两者的模型参数向量完全一样。

➤ 传递函数与零极点增益形式

transfer function *zero-pole-gain form*

Matlab函数tf2zp()和zp2tf()用来完成两种形式之间的转换

如 $[z, p, k]=\text{tf2zp}(\text{num},\text{den});[\text{num},\text{den}]=\text{zp2tf}(z, p, k)$

➤ 状态方程与传递函数或零极点增益形式

state space

ss2tf()和tf2ss用来状态方程与传递函数间转换

如 $[\text{num},\text{den}]=\text{ss2tf}(A,B,C,D);[A,B,C,D]=\text{tf2ss}(\text{num},\text{den})$

2.1 控制系统的数学模型

ss2zp()和zp2ss用来状态方程与零极点增益形式间转换

如 $[z,p,k]=ss2zp(A,B,C,D);[A,B,C,D]=zp2ss(z,p,k)$

➤ 部分分式与传递函数或零极点增益形式

传递函数转化为部分分式形式的关键在于求取极点的留数
可通过residue()函数来完成。

如 $[r, p, h]=residue(num,den)$

$[num,den]=residue(r, p, h)$

数学模型可根据仿真分析需要建立不同的形式，并且利用MATLAB语言可以非常容易的相互转换，以适应仿真过程中的一些特殊要求。

2.1 控制系统的数学模型

例:

如 $[z,p,k]=ss2zp(A,B,C,D);[A,B,C,D]=zp2ss(z,p,k)$

➤ 部分分式与传递函数或零极点增益形式

传递函数转化为部分分式形式的关键在于求取极点的留数
可通过residue()函数来完成。

如 $[r, p, h]=residue(num,den)$

$[num,den]=residue(r, p, h)$

数学模型可根据仿真分析需要建立不同的形式，并且利用MATLAB语言可以非常容易的相互转换，以适应仿真过程中的一些特殊要求。

Outline

2.1 控制系统的数学模型

2.2 系统建模概述

2.3 系统建模方法

2.4 模型验证

2.5 系统建模实例

2.6 问题与探究

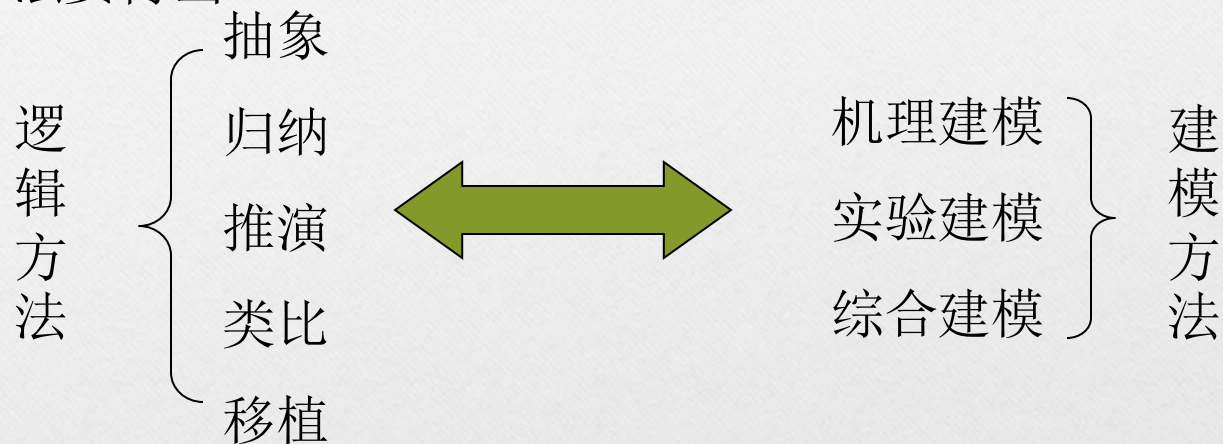
2.2 系统建模概述

 建模三要素 ——> 目的、方法和验证

➤ 目的要明确

同一个系统，不同的研究目的，所建立的模型也不同。

➤ 方法要得当

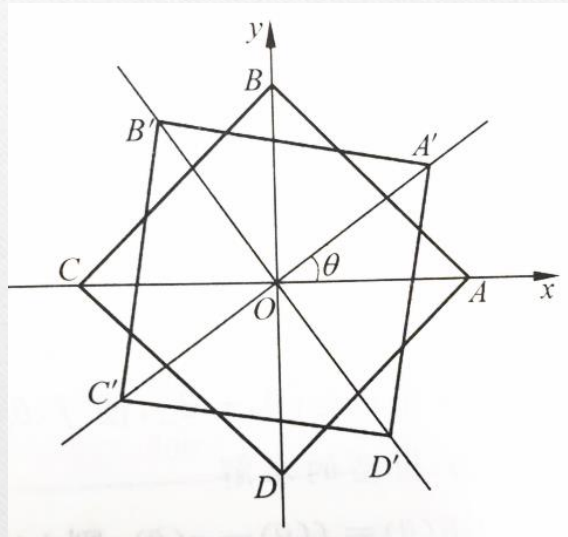


➤ 结果要验证

验证所建立的模型能够“真实反映”实际系统

抽象

- 四条腿椅子放稳



$f(\theta)$: A、C 两脚与地面距离之和

$g(\theta)$: B、D 两脚与地面距离之和

$$f(\theta)g(\theta) = 0 \quad \forall \theta \in [0, \pi/2]$$

且 $f(0) \geq 0, g(0) = 0$; $f(\pi/2) = 0, g(\pi/2) \geq 0$

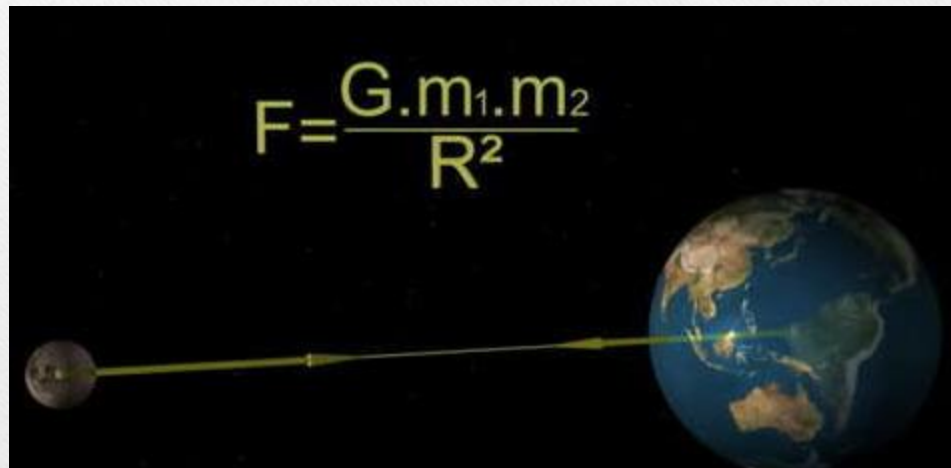
求证: 存在 $\theta_0 \in [0, \pi/2]$, 使得 $f(\theta_0) = g(\theta_0) = 0$

归纳

- 由具体认识到一般抽象
- 开普勒三定律
 - 第谷（1546-1601）观察行星运动，积累数据
 - 开普勒（1571-1630）
 - 第一定律：行星绕太阳在不同椭圆轨道运行，太阳是焦点
 - 第二定律：单位时间内太阳行星扫过的面积是常数
 - 行星运行周期的平方与椭圆轨道长半轴的三次方成正比

推演

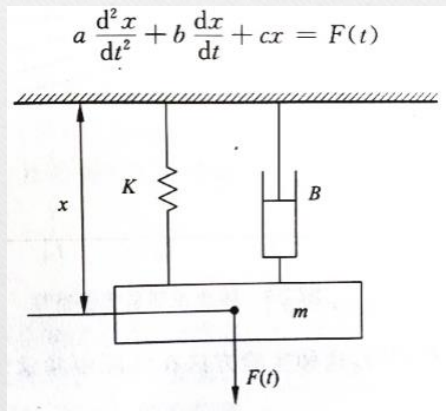
- 万有引力定律
- 牛顿通过开普勒三定律和微积分推演出



类比

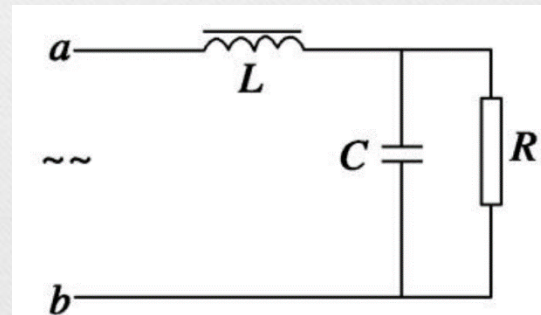
- 对比两类不同的事物，找出相同和相似之处

- 机械系统



- 电路系统

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = u(t)$$

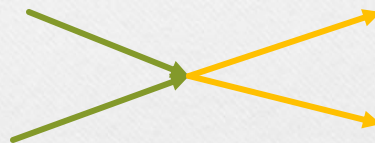


相似之处：二阶微分方程，^{线性定常}LTI系统

电路系统建模

- 基尔霍夫电流定律 (Kirchhoff Current Law) **KCL**

- 所有进入某个节点的电流等于所有离开这个节点的电流的总和。



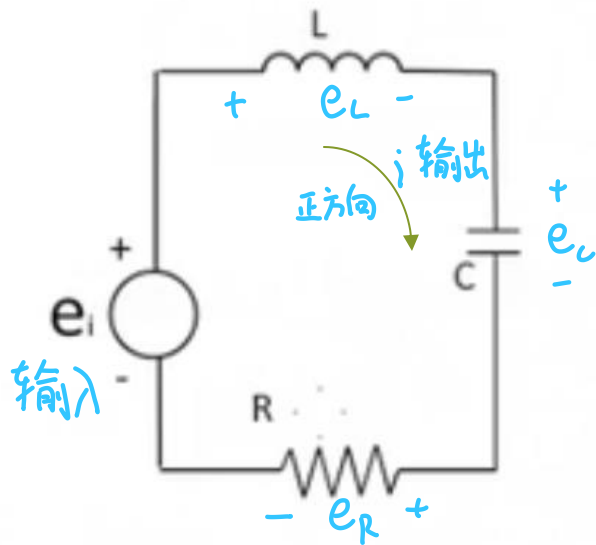
- 基尔霍夫电压定律(Kirchhoff Voltage Law) **KVL**

- 沿着闭合回路所有元件两端的电压的代数和等于零。

视频参看

<https://space.bilibili.com/230105574/channel/detail?cid=63545>

电路系统建模



kVL

$$e_L + e_C + e_R - e_i = 0$$

元件

$$e_L = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$e_C = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt$$

$$e_R = i(t)R$$

$$L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + i(t)R = e_i \xrightarrow[\text{对时间求一阶导数}]{} Li''(t) + Ri'(t) + \frac{1}{C} i(t) = e'(t)$$

输入信号

流体力学

- 均质、不可压缩、密度 ρ (kg / m^3)

流量 q (m^3 / s)

体积 V (m^3)

高度 h (m)

压强 P ($\text{N} / \text{m}^2, \text{Pascal}$)

流阻 $p_1 - p_2 = \rho q R$
类比: 电阻

流体两端压强差 = 密度 · 压强 · 流阻

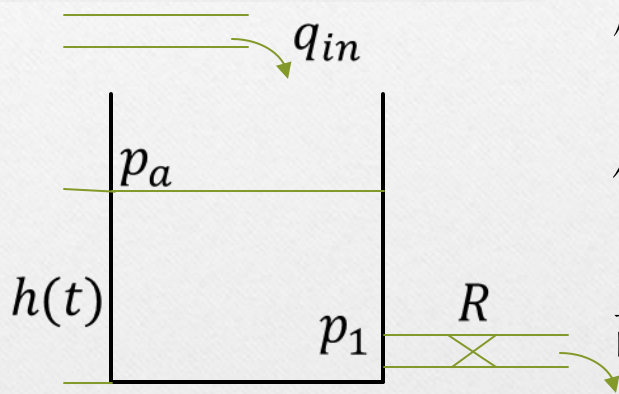


理想压源 $p_2 = p_1 + p_s$
忽略摩擦力

流体系统建模

输入: 控制变量: 注水量 $q_{in}(t)$ ^(m³/s)

输出: 被控变量: 液面高度 $h(t)$ ^(m)



质量守恒定律

质量 $\frac{dm}{dt} = \dot{m}_{in} - \dot{m}_{out}$ ^{kg/s}

体积 $\frac{dV}{dt} = q_{in} - q_{out}$ ^(m³/s)
流量

高度 $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A} (q_{in} - q_{out})$

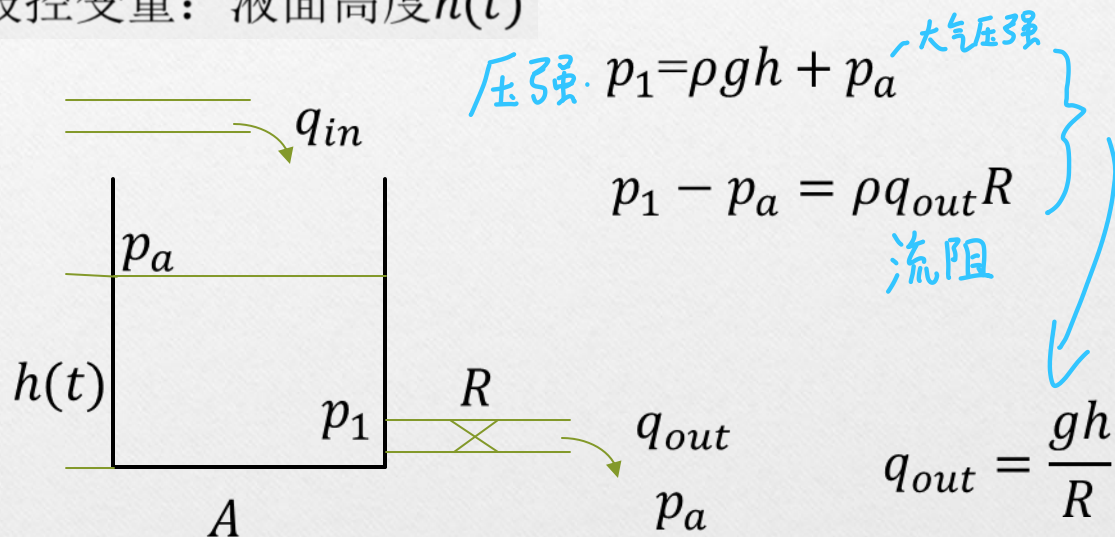
$\frac{1}{\rho}$ ^{m³/kg}

$\frac{1}{A}$ ^{s⁻²}
底面积

流体系统建模

输入: 控制变量: 注水量 $q_{in}(t)$

输出: 被控变量: 液面高度 $h(t)$



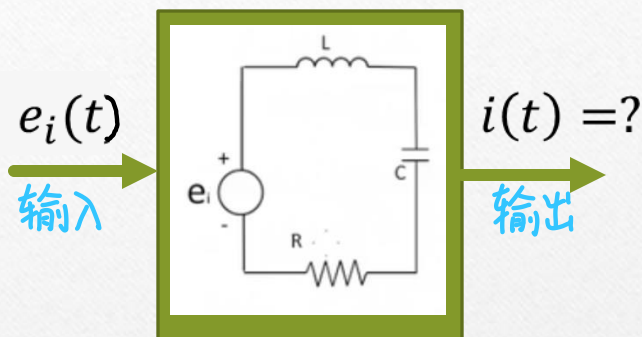
代入: $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A}(q_{in} - q_{out})$

$$A \frac{dh(t)}{dt} = q_{in} - \frac{gh(t)}{R}$$

- 阶SISO线性微分方程

输入 $q_{in}(t)$
输出 $h(t)$

拉普拉斯变换



时域方法两种

- 解微分方程

$$L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + i(t)R = e_i(t)$$

- 计算卷积

$$\underline{i(t)} = \underline{e_i(t)} * \underline{g(t)} = \int_0^\infty e_i(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

输出 输入 脉冲响应函数

s域:

微分方程 $\xrightarrow{\text{拉普拉斯变换}}$ 代数方程 (传递函数)

卷积运算 $\xrightarrow{\text{拉普拉斯变换}}$ 乘积运算

$$f_1(t) * f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F_1(s) F_2(s)$$

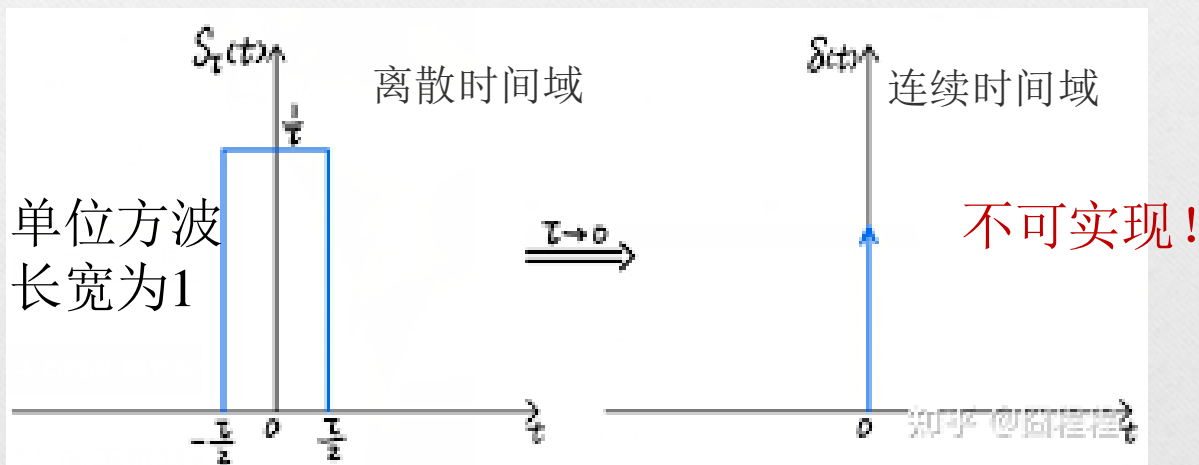
脉冲响应函数

狄拉克函数

脉冲函数 $\delta(t)$: 用于描述瞬间或空间几何点上高度集中的物理量

e.g. 瞬时的冲击力、脉冲电流或电压等急速变化的物理量

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0; \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$



脉冲响应函数



$g(t)$: 脉冲响应函数

推导:
 时间 $t=0$ $t=1$ $t=2$ $t=t$
 输入 $u(0)\delta(t)$ $u(0)g(0)$ $u(0)g(1)$ $u(0)g(2)$ $t=t$
 $u(1)\delta(t-1)$ 0 $u(1)g(0)$ $u(1)g(1)$ 卷积的
 $u(2)\delta(t-2)$ 0 0 $u(2)g(0)$ 离散形式

- 系统在输入为单位脉冲函数时的输出（响应）
 - 是暂态响应中的一种



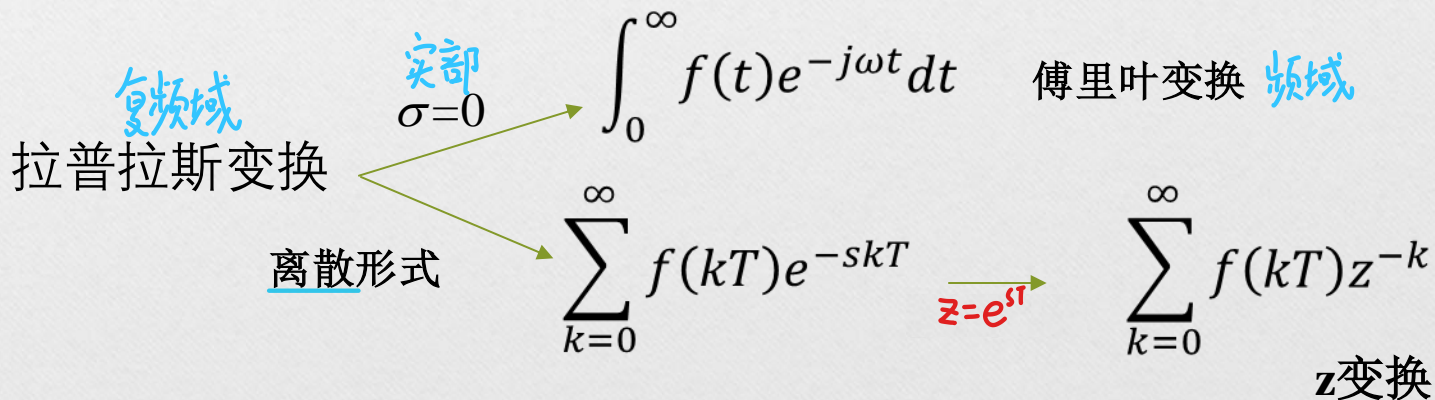
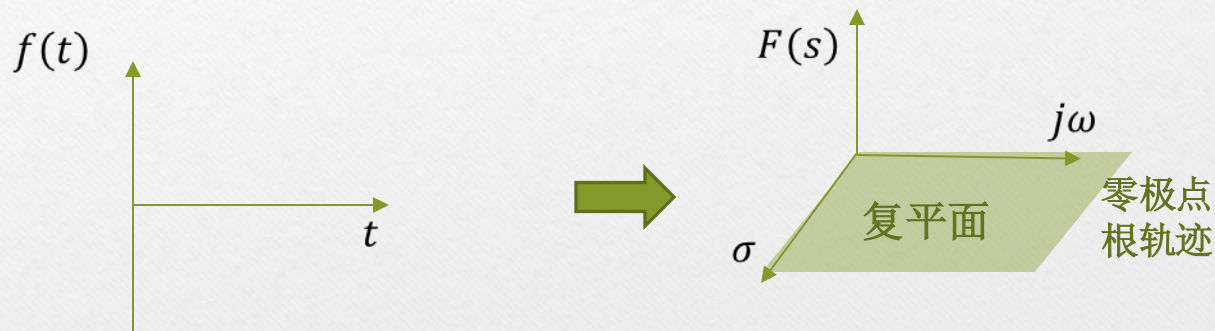
卷积 $y(t) = u(t) * g(t) = \int_0^{\infty} u(\tau)g(t - \tau)d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} u(k)g(t - k)$

拉普拉斯变换

卷积 \rightarrow 乘积

定义式:

复函数 $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$ 复数 $s = \sigma + j\omega$



拉普拉斯变换

$$f(t) = e^{-at} \quad \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = \frac{1}{s+a}$$

-阶惯性环节

线性变换 $\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = aF(s) + bG(s)$

$$f(t) = \sin(at)$$

欧拉公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$\sin(\theta) = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

$$\mathcal{L}[\sin(at)] = \frac{1}{2i} \left(\mathcal{L}[e^{iat}] - \mathcal{L}[e^{-iat}] \right) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$\frac{1}{s-ia}$ $\frac{1}{s+ia}$

拉普拉斯变换

$$\begin{aligned}L[f'(t)] &= \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} df(t) \\ &= e^{-st} f(t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad \text{分部积分} \\ &= \boxed{-f(0)} + \boxed{sF(s)}\end{aligned}$$

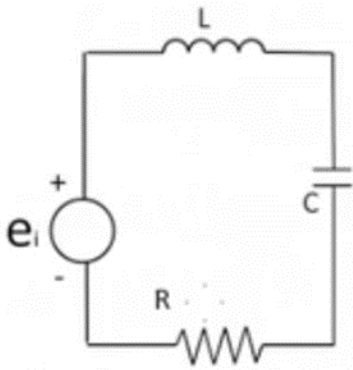
初始条件 系统动态

0初始条件: $f(0)=0$ $L[f'(t)]=sF(s)$

$$L[f''(t)] = sL[f'(t)] - f'(0) = s^2 F(s) - \boxed{sf(0) - f'(0)}$$

$$L\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} F(s)$$

$$L[f(t) * g(t)] = F(s)G(s)$$



0初始条件下:

微分方程

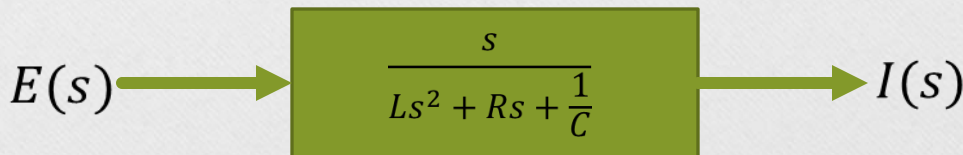
$$Li''(t) + Ri'(t) + \frac{1}{C}i(t) = e'(t)$$

方程两端拉氏变换

$$\begin{aligned} sE(s) &= Ls^2I(s) + RsI(s) + \frac{1}{C}I(s) \\ &= (Ls^2 + Rs + \frac{1}{C})I(s) \end{aligned}$$

传递函数

$$\frac{I(s)}{E(s)} = \frac{s}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}}$$



拉普拉斯变换

重要性质:

1. 线性性质 $L[af_1(t) \pm bf_2(t)] = aF_1(s) \pm bF_2(s)$

2. 微分定理 $L[f'(t)] = sF(s) - f(0)$;

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0);$$

0 初始条件下, $L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s)$

例: $L[\delta(t)] = L[1'(t)] = s \frac{1}{s} - 1(0) = 1$

3. 积分定理 $L[\int f(t)dt] = \frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s}f^{-1}(0)$, $f^{-1}(0)$ 是积分初始条件;

$$L[\int \int \dots \int f(t)dt^n] = \frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s^n}f^{-1}(0) + \frac{1}{s^{n-1}}f^{-2}(0) + \dots + \frac{1}{s}f^{-n}(0);$$

4. 实位移定理 $L[f(t - \tau_0)] = e^{-\tau_0 s}F(s)$

5. 初值定理 $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$

6. 终值定理 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$ (终值确实存在时)

拉普拉斯与微分方程求解

- 对微分方程进行拉氏变换（时域转复频域）
- 微分方程 \rightarrow 代数方程（关于s的多项式）
- 进行逆拉氏变换（复频域转时域）

$$F(s) = \frac{-s+5}{s^2+5s+4} = \frac{-s+5}{(s+4)(s+1)} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s+1} = \frac{A(s+1)+B(s+4)}{(s+4)(s+1)}$$

分母因式分解

一次分式

$$A(s+1)+B(s+4) = -s+5 \quad s = -1 \Rightarrow B = 2, \quad s = -4 \Rightarrow A = -3 \quad \text{待定系数法}$$

$$L^{-1}\left(\frac{-3}{s+4} + \frac{2}{s+1}\right) = -3e^{-4t} + 2e^{-t} \quad \text{反拉氏变换}$$

求解步骤：

1. 对微分方程进行拉氏变换
2. 作因变量反拉氏变换

拉普拉斯与微分方程求解

例：解方程 $y^{(2)}(t) + 5y^{(1)} + 6y(t) = 6$,
其中 $y^{(1)}(0) = 2, y(0) = 2$ 非零初始条件的情况

解：方程两边取拉氏变换

$$s^2Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0) + 5(sY(s) - y(0)) + 6Y(s) = \frac{6}{s},$$

代入 $y^{(1)}(0) = 2, y(0) = 2$ ，整理得到

$$Y(s) = \frac{2s^2 + 12s + 6}{s(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s} + \frac{5}{s+2} - \frac{4}{s+3}$$

反拉氏变换

$$y(t) = 1 + 5e^{-2t} - 4e^{-3t}$$

拉普拉斯变换表

序号	拉氏变换 F(s)	时间函数 f(t)	Z 变换 F(z)
1	1	$\delta(t)$	1
2	$\frac{1}{1-e^{-Ts}}$	$\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT)$	$\frac{z}{z-1}$
3	$\frac{1}{s}$	1(t) 单位阶跃	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{t^2}{2}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
6	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\frac{t^n}{n!}$	$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial a^n} \left(\frac{z}{z-e^{-aT}} \right)$
7	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
8	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
9	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
10	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}} - \frac{z}{z-e^{-bT}}$

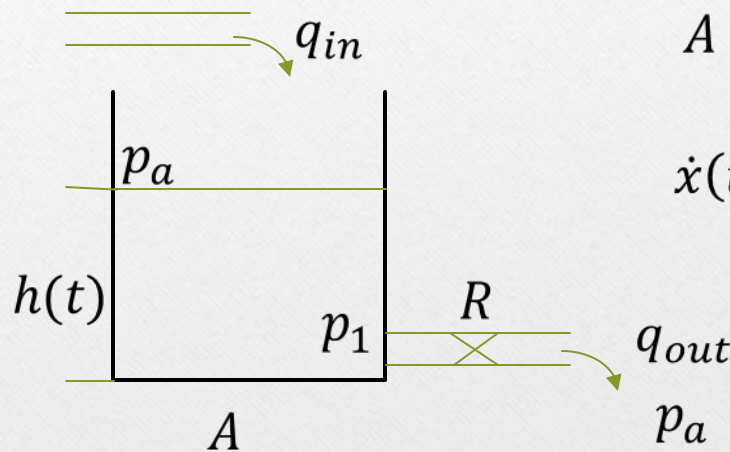
流体系统建模

一阶微分方程

$$A \frac{dh(t)}{dt} = q_{in} - \frac{gh(t)}{R}$$

$$A = 1, x(t) = h(t), u(t) = q_{in}$$

$$\dot{x}(t) + \frac{g}{R} x(t) = u(t) \text{ 线性微分方程}$$



传递函数

0初始条件

$$x(0) = 0, sX(s) + \frac{g}{R} X(s) = u(s)$$

$$G(S) = \frac{X(s)}{u(s)} = \frac{1}{s + \frac{g}{R}}$$

非0初始条件时，传递函数如何体现？

x传递函数就是零状态的，表征输出与输入的关系

2.1 控制系统的数学模型

➤ 传递函数形式的局限性

- 1) 原则上不反映非零初始条件下系统响应的全部信息(但可以利用上述步骤求得非线性初始条件下的系统响应);
- 2) 适合于描述单输入单输出系统(原因 $\frac{C(s)}{R(s)}$);
- 3) 只能用于表示线性定常系统(如 $c\dot{c}$, $L(c\dot{c}) \neq L(c)L(\dot{c})$, 且不能写成 $*C(s)$ 的形式, 无法提出 $C(s)$)。

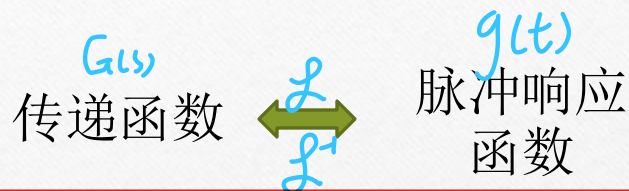
水箱系统——一阶线性系统——惯性环节

输入：阶跃信号

$u(s)$



$X(s)$



由于 $\delta(t) \xrightarrow{L} 1$
故 $g(t) \xrightarrow{L} G(s)$

$$X(s) = G(s)u(s)$$

输出 $x(t) = g(t) * u(t) = \int_0^{\infty} u(\tau)g(t-\tau)d\tau$

$u(t) = c(\text{constant})$

$L[u(t)] = L[ce^0] = c \frac{1}{s}$

输入：阶跃信号 流体系统建模

$$X(s) = G(s)u(s) = \frac{1}{s + \frac{g}{R}} c \frac{1}{s} = c \left(\frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{g}{R}} \right) = c \frac{A(s + \frac{g}{R}) + Bs}{s(s + \frac{g}{R})}$$

一阶系统



$$A(s + \frac{g}{R}) + Bs = 1 \quad s = 0, A = \frac{R}{g}; \quad s = -\frac{g}{R}, B = -\frac{R}{g}$$

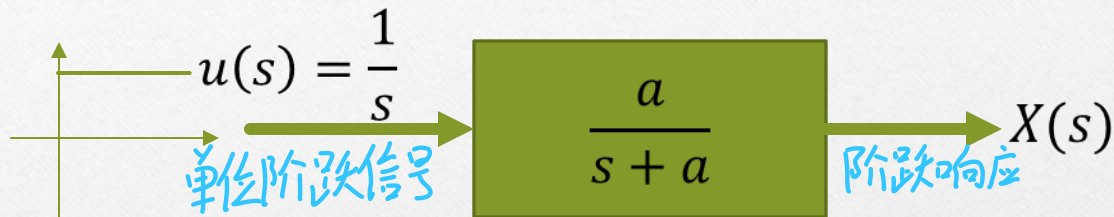
$$X(s) = C \left(\frac{R}{g} \frac{1}{s} - \frac{R}{g} \frac{1}{s + \frac{g}{R}} \right) = \frac{CR}{g} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{g}{R}} \right) \quad x(t) = \frac{cR}{g} (1 - e^{-\frac{g}{R}t})$$

$\downarrow \mathcal{L}^{-1}$
1 $\downarrow \mathcal{L}^{-1}$
 $e^{-\frac{g}{R}t}$

阶跃响应

一阶系统的阶跃响应

一阶惯性环节:



$$\frac{1}{\tau s + 1}, \quad \tau = \frac{1}{a}$$

τ : 时间常数

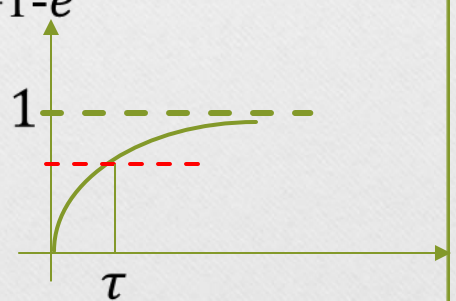
$$X(s) = \frac{a}{s+a} \frac{1}{s} \quad x(t) = L^{-1}[X(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right] = 1 - e^{-at}$$

时间常数:

$$\tau = \frac{1}{a}$$

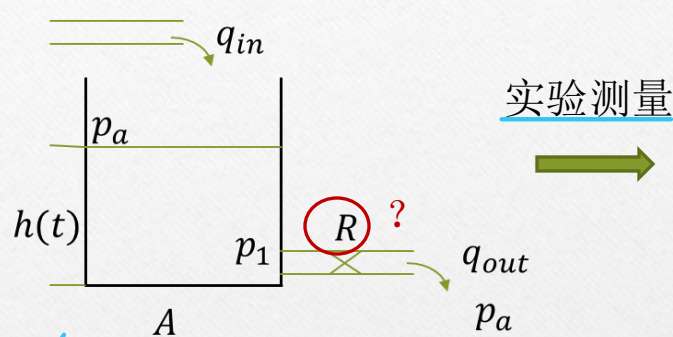
$\tau \rightarrow 63\%$ 稳态值

$$x(\tau) = 1 - e^{-a \frac{1}{a}} = 1 - e^{-1} = 0.63$$



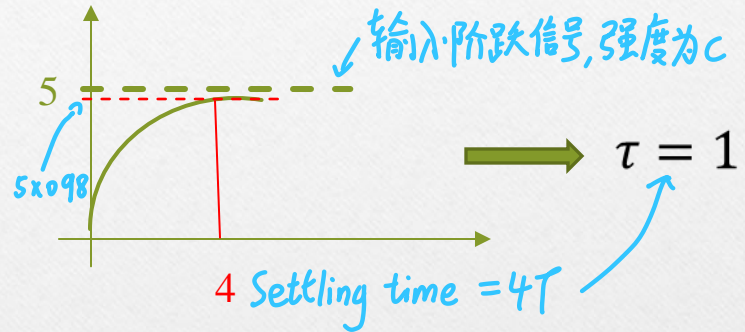
$t = 4\tau$ 安定时间 Settling time
 $x(4\tau) = 0.98$

系统辨识 —— 参数辨识



水箱系统 —— 一阶线性系统 —— 惯性环节

实验测量



$$G(s) = \frac{X(s)}{u(s)} = \frac{1}{s + \frac{g}{R}}$$

$$\tau = \frac{1}{\frac{g}{R}} = \frac{R}{g} = 1$$

$$\Rightarrow R = g$$

$$x(t) = \frac{cR}{g}(1 - e^{-\frac{g}{R}t})$$

$$\frac{cR}{g} = 5$$

$$\Rightarrow c = 5$$

输入阶跃信号的大小

一阶系统与相平面

$$\frac{X(s)}{u(s)} = \frac{a}{s+a} \quad \longrightarrow \quad \dot{x}(t) + ax(t) = au(t)$$

输入

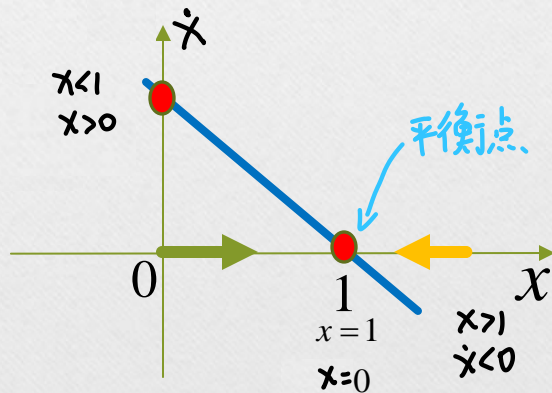
$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

$$\dot{x}(t) = a(1 - x(t))$$

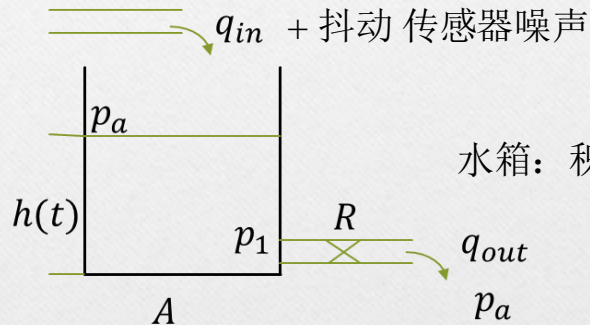
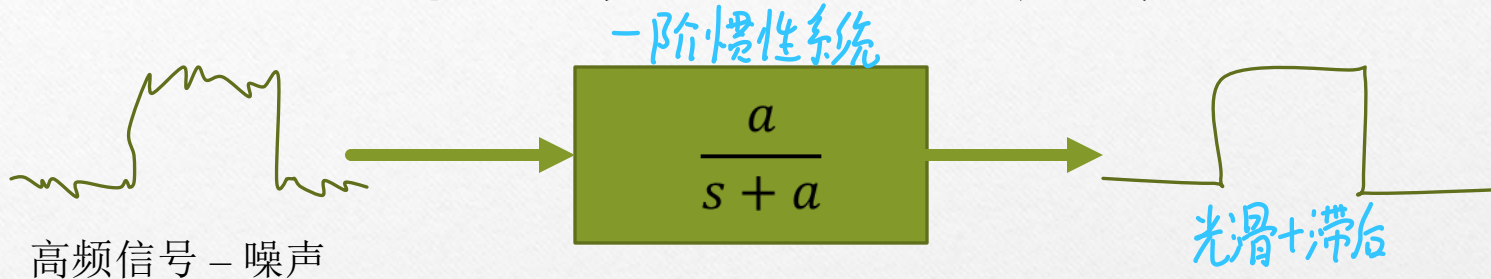
系统不稳定

$a < 0$ 情况???

相平面方法分析稳定性



一阶系统与低通滤波器

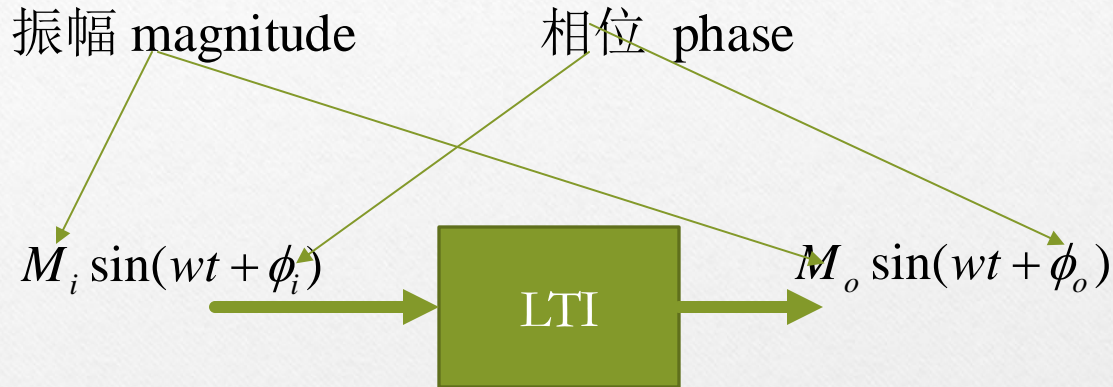


水箱：积累 & 缓冲 \rightarrow 低通滤波

容器：有积累的都是低通滤波器



频率响应



$$\frac{M_o}{M_i} = M$$

振幅响应

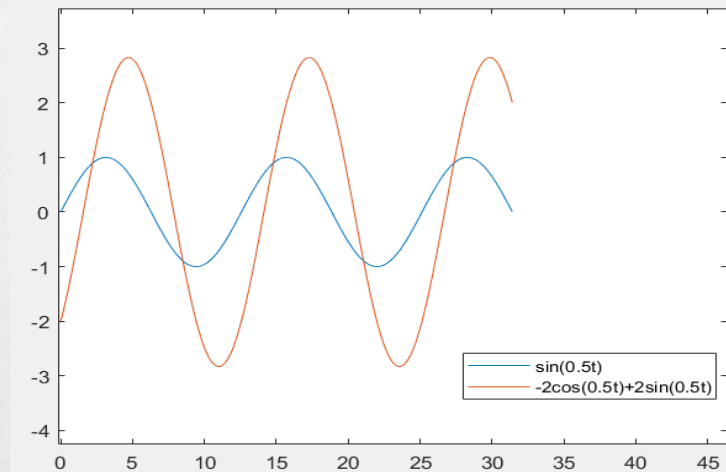
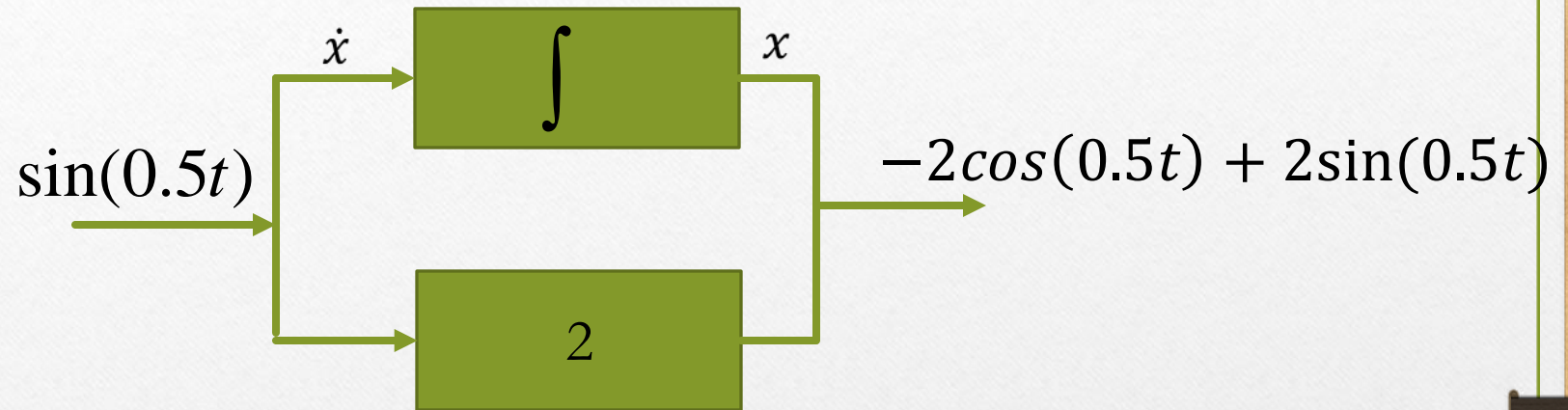
$$\phi_o - \phi_i = \phi$$

幅角响应

$$u(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

$$= \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\omega t + \phi_i) \quad \arctan \phi_i = \frac{B}{A}$$

$$= M_i \sin(\omega t + \phi_i)$$



一般情况

输入: $u(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$

$$u(s) = L[A \sin \omega t + B \cos \omega t] = \frac{Aw}{s^2 + \omega^2} + \frac{Bs}{s^2 + \omega^2} = \frac{Aw + Bs}{s^2 + \omega^2} = \frac{Aw + Bs}{(s + i\omega)(s - i\omega)}$$

$$X(s) = G(s) \overset{\text{输入}}{u(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} u(s) = \frac{N(s)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \frac{Aw + Bs}{(s + i\omega)(s - i\omega)}$$

零点

$$= \frac{k_1}{s + i\omega} + \frac{k_2}{s - i\omega} + \frac{c_1}{s - p_1} + \dots + \frac{c_n}{s - p_n}$$

极点
系数: 待定系数法

$$= \frac{k_1(s - i\omega)D(s) + k_2(s + i\omega)D(s) + c_1(s + i\omega)(s - i\omega) \dots + \dots}{(s + i\omega)(s - i\omega)(s - p_1) \dots (s - p_n)}$$

$$\text{输出 } X(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = k_1 e^{-i\omega t} + k_2 e^{i\omega t} + c_1 e^{p_1 t} + \dots + c_n e^{p_n t}$$

稳定系统: p_1, p_2, \dots, p_n 的实部小于0

$\rightarrow 0, \text{ as } t \rightarrow \infty$

$$\text{稳态输出 } X_{ss}(t) = k_1 e^{-i\omega t} + k_2 e^{i\omega t}$$

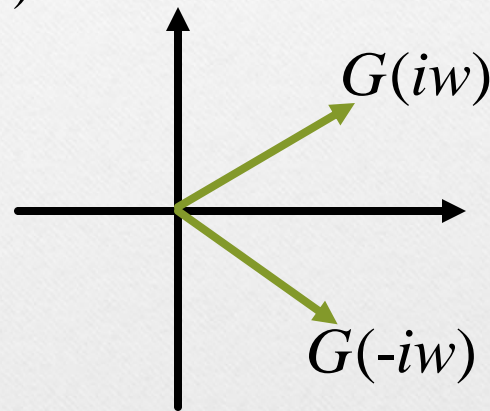
(下面求解k1和k2)

$$k_1(s - iw)D(s) + k_2(s + iw)D(s) + c_1(s + iw) + L = (Aw + Bs)N(s)$$

$$\text{令 } s = -iw \quad k_1(-iw - iw)D(-i\omega) = (Aw - Bi\omega)N(-i\omega)$$

$$k_1 = \frac{Aw - Bi\omega}{-2i\omega} \frac{N(-i\omega)}{D(-i\omega)} = \frac{B + Ai}{2} G(-i\omega)$$

$$\text{令 } s = iw \quad k_2 = \frac{B - Ai}{2} G(i\omega)$$



$$G(i\omega) = |G(i\omega)| e^{i\phi_G}, \quad G(-i\omega) = |G(i\omega)| e^{-i\phi_G}$$

$$X_{ss}(t) = \frac{B + Ai}{2} |G(i\omega)| e^{-i\phi_G} e^{-i\omega t} + \frac{B - Ai}{2} |G(i\omega)| e^{i\phi_G} e^{i\omega t}$$

$$= \frac{1}{2} |G(i\omega)| [(B + Ai)e^{-(\omega t + \phi_G)i} + (B - Ai)e^{(\omega t + \phi_G)i}]$$

欧拉公式

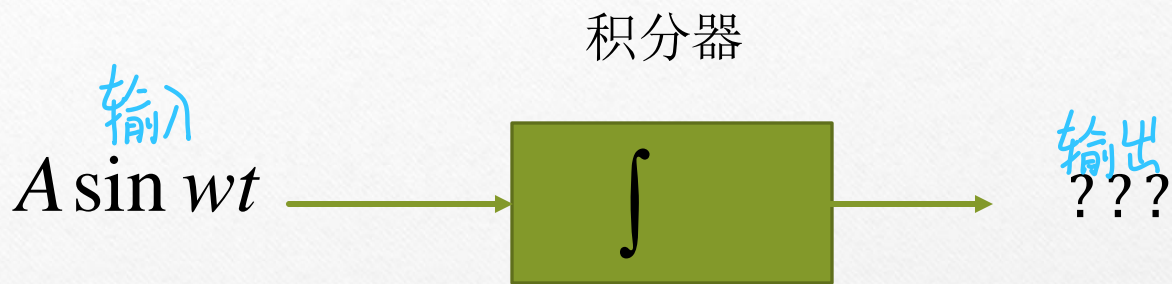
$$= \frac{1}{2} |G(i\omega)| (2B \cos(\omega t + \phi_G) + 2A \sin(\omega t + \phi_G))$$

两角和公式

$$= |G(i\omega)| M_i \sin(\omega t + \phi_i + \phi_G)$$

$$M = \frac{M_o}{M_i} = |G(i\omega)|$$

$$\phi_G = \angle G(i\omega)$$



积分器的传递函数 $G(s) = \frac{1}{s}$ $\xrightarrow{s=j\omega}$ 频率特性 $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -\frac{1}{\omega} j$

$G(j\omega) = |G(j\omega)| \angle G(j\omega)$

幅频特性 $|G(j\omega)| = \frac{1}{\omega}$, 相频特性 $\angle G(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$

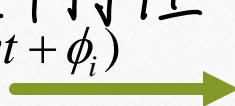
$A \sin \omega t \Rightarrow \frac{1}{\omega} A \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$

ω 越大, $|G(j\omega)|$ 越小

低通滤波器

一阶惯性环节的频率特性

$$M_i \sin(\omega t + \phi_i)$$



$$G(s)$$

$$M_o \sin(\omega t + \phi_o)$$

$$\frac{M_o}{M_i} = |G(j\omega)| \quad \text{振幅响应}$$

$$\phi_o - \phi_i = \angle G(j\omega) \quad \text{相位响应}$$

$$G(s) = \frac{a}{s + a}$$

$$G(j\omega) = \frac{a^2}{a^2 + \omega^2} + \left(-\frac{a\omega}{a^2 + \omega^2}\right)j$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2}}$$

$$\omega = 0$$

$$|G(j\omega)| = 1$$

$$\omega \uparrow$$

$$|G(j\omega)| \downarrow$$

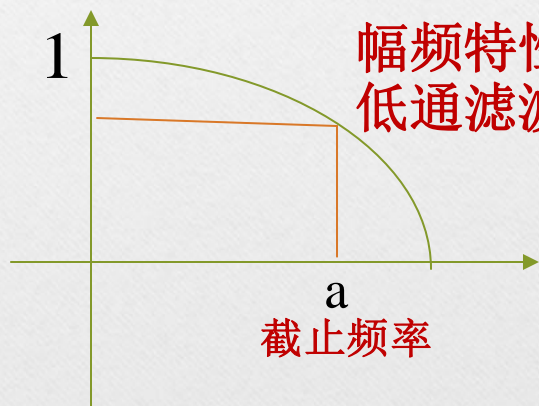
$$\omega = a = \frac{1}{\tau}$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

衰减约3dB

$$\omega > a$$

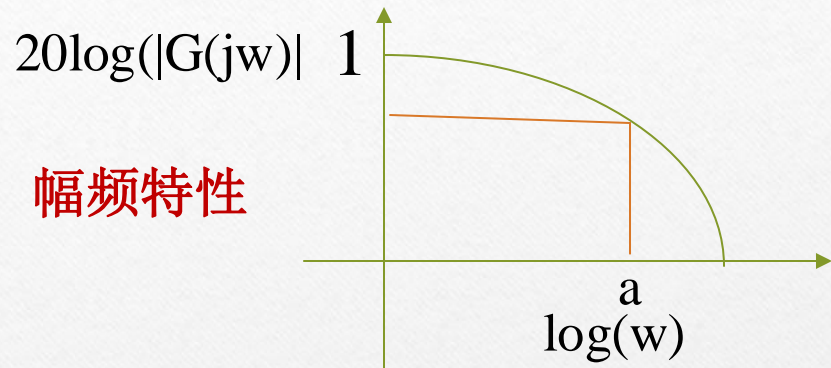
$$|G(j\omega)| \rightarrow 0$$



幅频特性：
低通滤波器

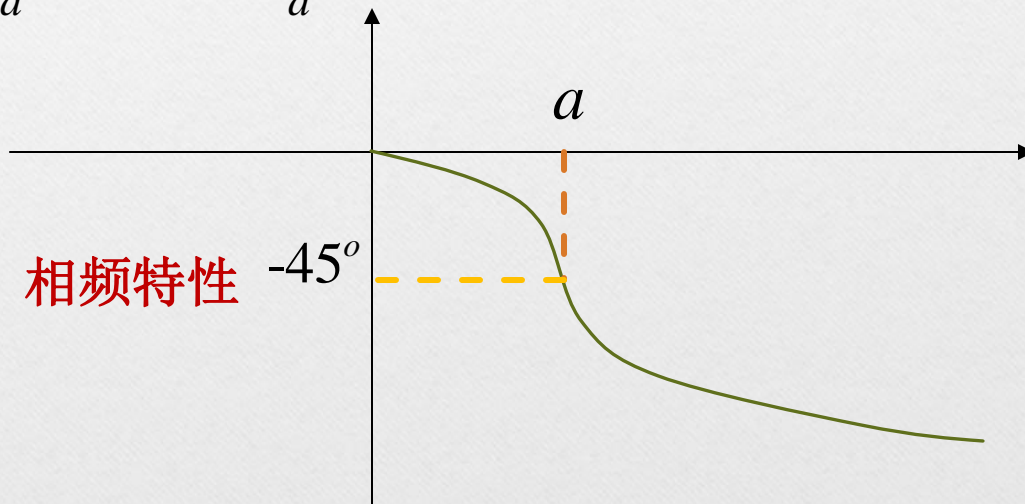
截止频率

$$\phi_G = \left(\frac{-a\omega}{a^2}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



Bode图

$$\phi_G = \arctan\left(\frac{-a\omega}{a^2}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



2.3 系统建模方法

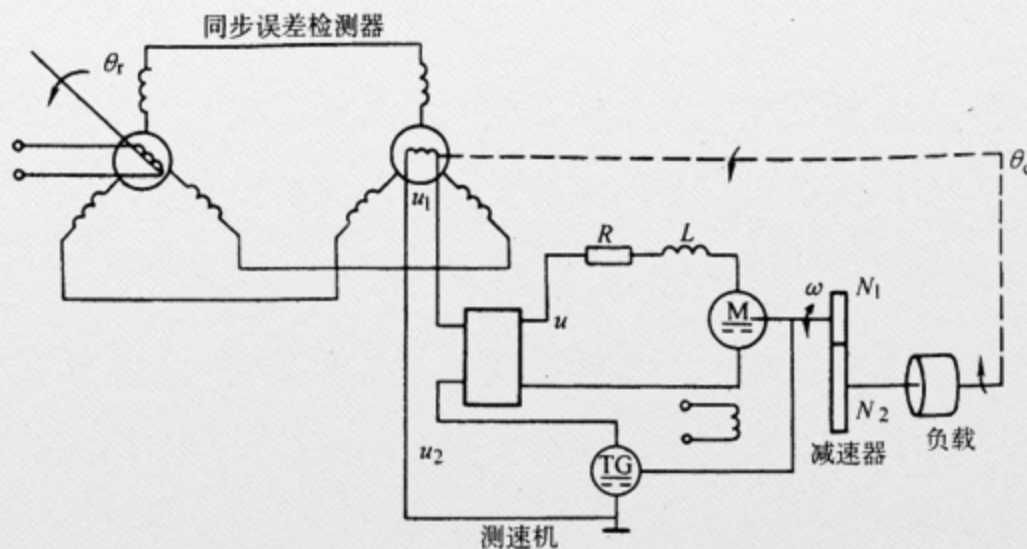
机理模型法 运用相应的物理定律或定理

1 机理模型法

实验建模法: 实测、观察的物理数据 { 频率特性法
系统辨识法 三要素 { 数据
假设模型
准则

采用由一般到特殊的推理演绎方法，对已知结构，参数的物理系统运用相应的物理定律或定理，经过合理分析简化而建立起来的描述系统各物理量动、静态变化性能的数学模型。

例：位置伺服闭环控制系统

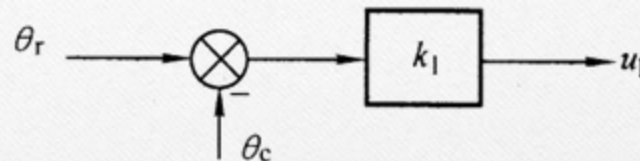


2.3 系统建模方法

(1) 同步误差检测器

$$u_1 = k_r (\theta_r - \theta_c)$$

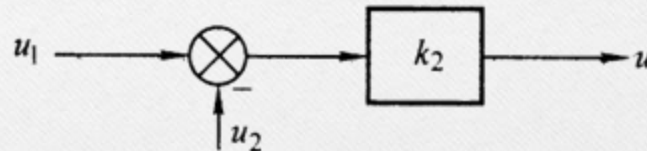
$$\frac{U_1(s)}{\theta_r(s) - \theta_c(s)} = k_1$$



(2) 放大器

$$u = k_2 (u_1 - u_2)$$

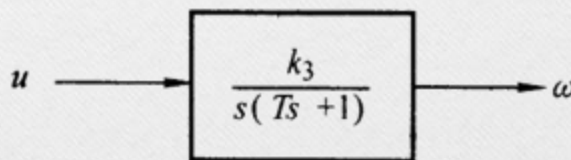
$$\frac{U(s)}{U_1(s) - U_2(s)} = k_2$$



(3) 直流电动机

$$T \frac{d^2 \omega}{dt^2} + \frac{d\omega}{dt} = k_3 u$$

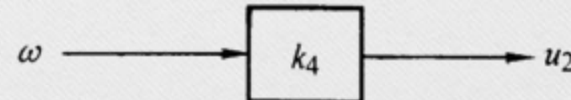
$$\frac{\omega(s)}{U(s)} = \frac{k_3}{s(Ts + 1)}$$



(4) 测速发电机

$$u_2 = k_4 \omega$$

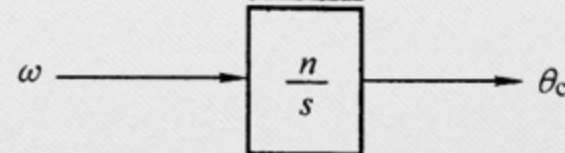
$$\frac{u_2(s)}{\omega(s)} = k_4$$



(5) 负载输出

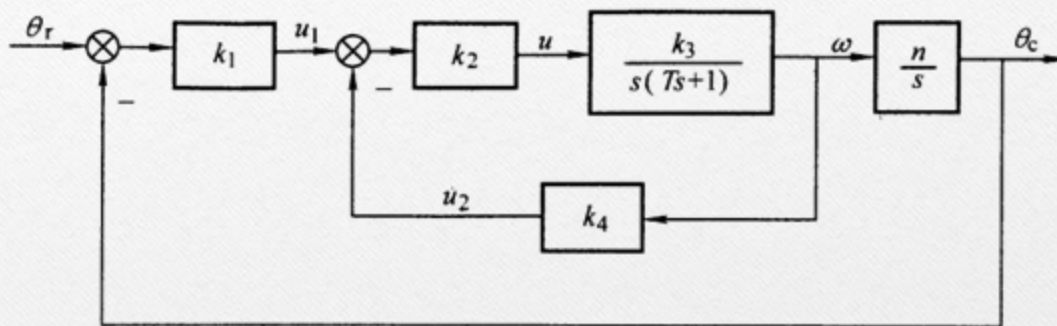
$$\frac{d\theta_c}{dt} = n\omega$$

$$\frac{\theta_c(s)}{\omega(s)} = \frac{n}{s}$$



2.3 系统建模方法

将各环节连接起来构成系统的总结构图



该系统总传递函数 $G_B(s)$

$$G_B(s) = \frac{\theta_c(s)}{\theta_r(s)} = \frac{k_1 k_2 k_3 n}{Ts^3 + s^2 + k_2 k_3 k_4 s + k_1 k_2 k_3 n}$$

2.3 系统建模方法

2 实验建模法

采用由特殊到一般的逻辑、归纳方法，根据一定数量的在系统运行过程中实测、观察的物理数据，运用统计规律、系统辨识等理论合理估计出反应实际系统各物理量相互制约关系的数学模型。

(1) 频率特性法

通过实验方法测得某系统的开环频率响应，来建立该系统的开环传递函数模型

表 2-1 例 2-2 系统的开环频率响应实测数据表

$\omega/(\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})$	0.10	0.14	0.23	0.37	0.60	0.95	1.53	2.44	3.91	6.25	10.0
$L(\omega)/\text{dB}$	-0.049	-0.102	-0.258	-0.638	-1.507	-3.270	-6.315	-10.81	-16.69	-23.65	-31.27
$\phi(\omega)/(^{\circ})$	-9.72	-14.12	-22.45	-35.35	-54.56	-81.25	-115.5	-157.2	-207.8	-271.7	-358.9

2.3 系统建模方法

(1) 由已知数据绘制该系统开环频率响应bode图

(2) 用 $\pm 20\text{dB/dec}$ 及其倍数的折线逼近幅频特性，得到两个转折频率

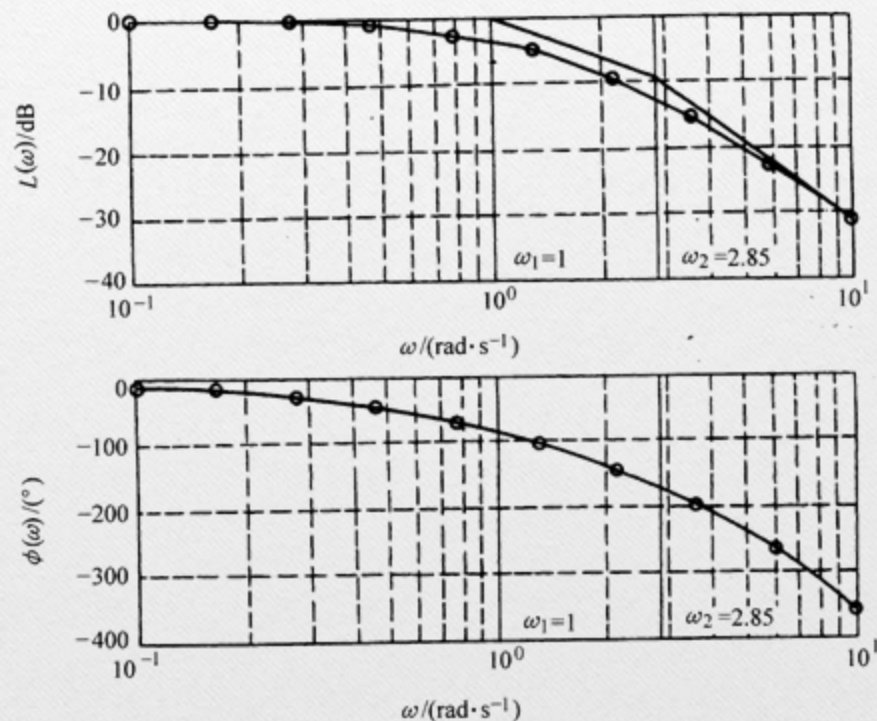
$$\omega_1 = 1\text{rad/s}, \omega_2 = 2.85\text{rad/s}$$

相应的惯性环节时间常数为

$$T_1 = \frac{1}{\omega_1} = 1\text{s} \quad T_2 = \frac{1}{\omega_2} = 0.35\text{s}$$

(3) 由低频幅频特性可知

$$L(\omega)|_{\omega \rightarrow 0} = 0, K = 1$$



2.3 系统建模方法

(4) 由高频段相频特性知，该系统存在纯滞后环节，为非最小相位系统，系统的开环传递函数应为以下形式

$$G(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{(T_1s+1)(T_2s+1)} = \frac{e^{-\tau s}}{(s+1)(0.35_2s+1)}$$

(5) 确定纯滞后时间值 $\omega = \omega_1 = 1 \text{ rad/s}$ 时 $\phi(\omega_1) = -86^\circ$

$$\phi(\omega_1) = -\arctan 1 - \arctan 0.35 - \tau_1 \times \frac{180^\circ}{\pi} = -86^\circ$$

再查图中 $\omega = \omega_1 = 2.85 \text{ rad/s}$ 时 $\phi(\omega_1) = -169^\circ$

$$\phi(\omega_2) = -\arctan 2.85 - \arctan(0.35 \times 2.85) - 2.85\tau_2 \times \frac{180^\circ}{\pi} = -169^\circ$$

$$\tau = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} = 0.35 \text{ s}$$

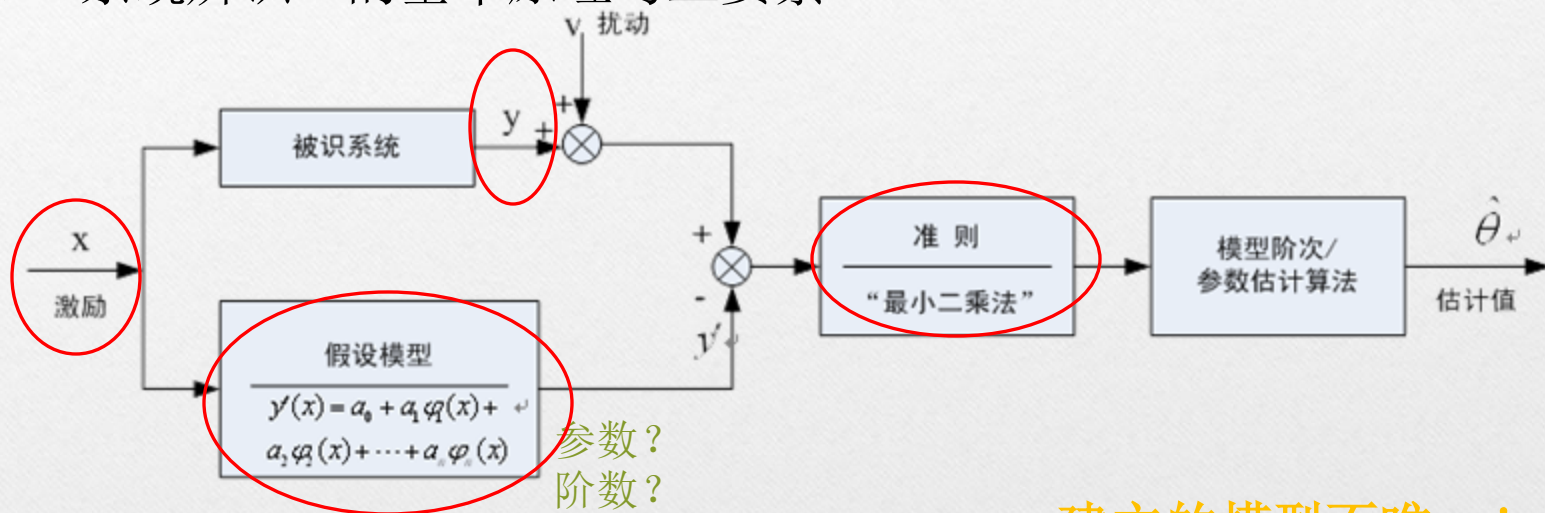
(6) 最终求得该系统的开环传递函数模型 $G(s)$ 为

$$G(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{(T_1s+1)(T_2s+1)} = \frac{e^{-0.35s}}{(s+1)(0.35_2s+1)}$$

2.3 系统建模方法

(2) 系统辨识法

➤ “系统辨识”的基本原理与三要素



建立的模型不唯一!

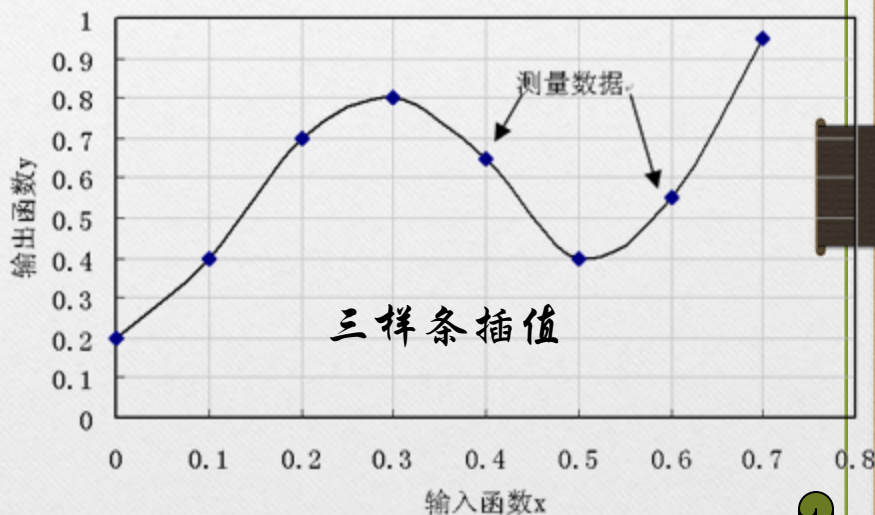
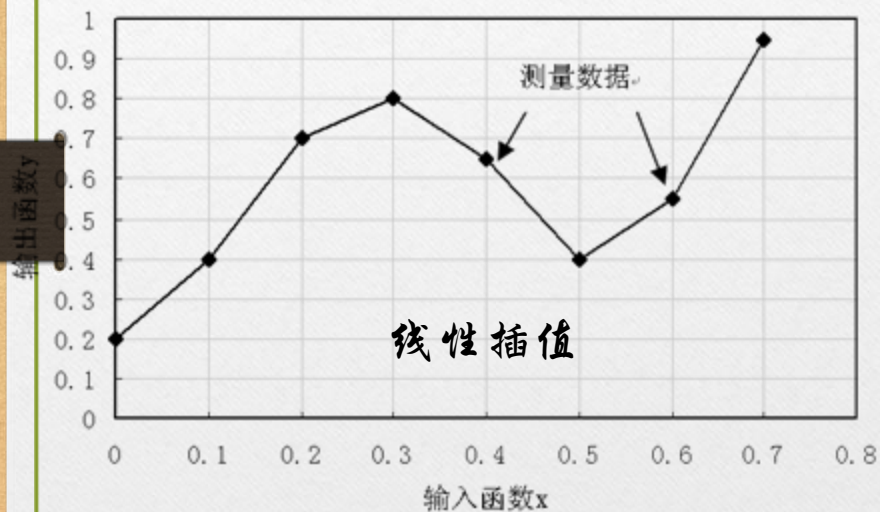
“数据、假设模型、准则”是系统辨识建模过程中的“三要素”。

输入输出

2.3 系统建模方法

➤ 实验数据的平滑处理—插值与逼近

所谓“插值”，就是求取两测量点之间“函数值”的计算方法，常用的有“线性插值”和“三次样条插值”。



线性插值所建立的数学描述/模型在插值点上是“非光滑的”。三次样条插值可以较完美地逼近理想的数学描述/模型，其代价是计算量与存储空间的增加。

2.3 系统建模方法

➤ 实验数据的统计处理—最小二乘法

对于随机型系统，其数据处理需要依据“数理统计”的理论与方法来处理，常用的方法是“最小二乘法”。

$$(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n \longrightarrow y = \varphi(x)$$

目标:

要求是某给定函数类H中的一个函数，并要求 $\varphi(x)$ 能使 y_i 与 $\varphi(x_i)$ 的差的平方和相对于同一函数类中的其他函数而言是最小的，即

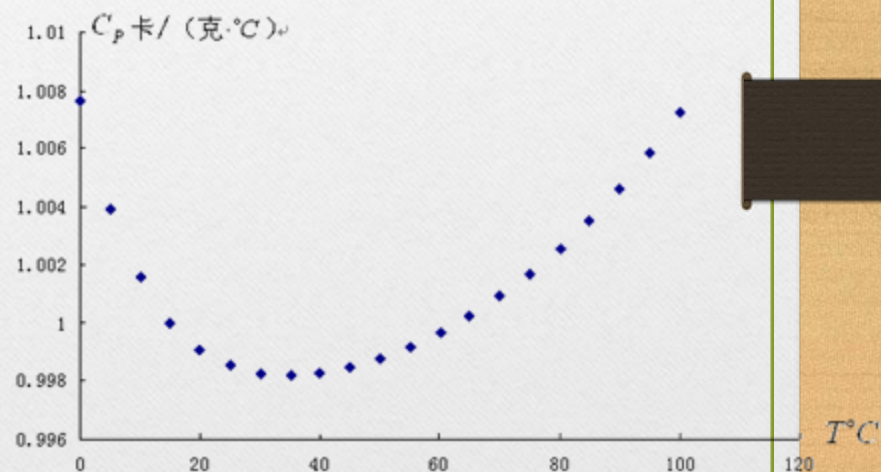
$$\sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i)]^2 = \text{Min}_{\varphi \in H} \sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i)]^2$$

$$Ax = b \Rightarrow x = \underline{(A^T A)^{-1} A^T b}$$

2.3 系统建模方法

例：求0-100°C之间水的定压比热变化的数学模型问题

温度 ^o		定压比热 ^o		温度 ^o		定压比热 ^o	
T °C ^o		C_p 卡/(克·°C) ^o		T °C ^o		C_p 卡/(克·°C) ^o	
T_0	0	$(C_p)_0$	1.00762				
T_1	5	$(C_p)_1$	1.00392	T_{11}	55	$(C_p)_{11}$	0.99919
T_2	10	$(C_p)_2$	1.00153	T_{12}	60	$(C_p)_{12}$	0.99967
T_3	15	$(C_p)_3$	1.00000	T_{13}	65	$(C_p)_{13}$	1.00024
T_4	20	$(C_p)_4$	0.99907	T_{14}	70	$(C_p)_{14}$	1.00091
T_5	25	$(C_p)_5$	0.99852	T_{15}	75	$(C_p)_{15}$	1.00167
T_6	30	$(C_p)_6$	0.99826	T_{16}	80	$(C_p)_{16}$	1.00253
T_7	35	$(C_p)_7$	0.99818	T_{17}	85	$(C_p)_{17}$	1.00351
T_8	40	$(C_p)_8$	0.99828	T_{18}	90	$(C_p)_{18}$	1.00461



2.3 系统建模方法

适用三次多项式 $C_P = A_0 + A_1T + A_2T^2 + A_3T^3$

$$\text{令 } \frac{\partial}{\partial A_i} \left[\sum_{j=0}^{18} ((C_P)_j - (A_0 + A_1T_j + A_2T_j^2 + A_3T_j^3))^2 \right] = 0, i = 0, 1, 2, 3$$

方程组的法方程

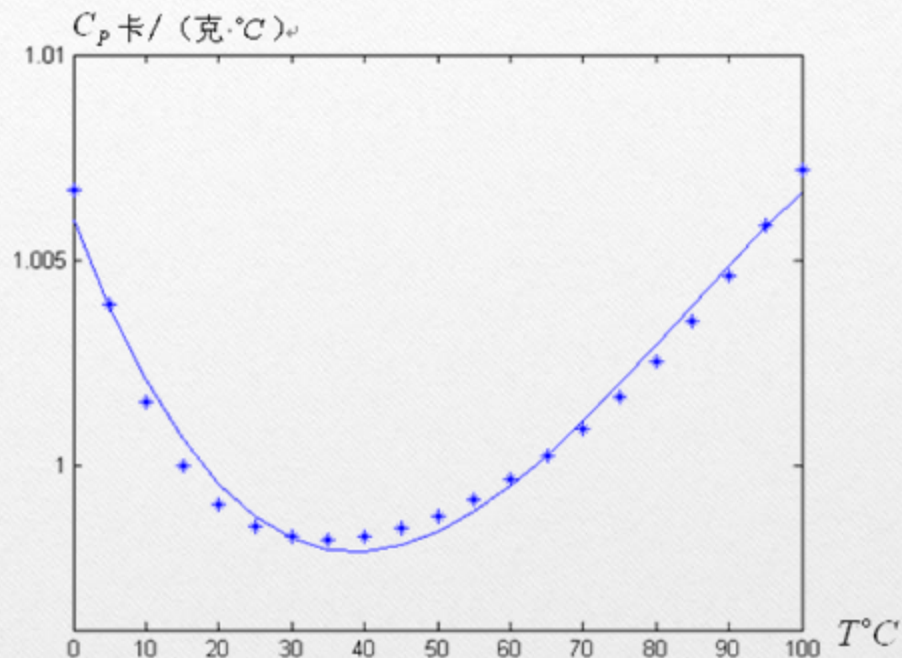
最小化目标函数: **2-norm**

$$\left. \begin{aligned} 21A_0 + (\sum T_j)A_1 + (\sum T_j^2)A_2 + (\sum T_j^3)A_3 &= \sum (C_P)_j \\ (\sum T_j)A_0 + (\sum T_j^2)A_1 + (\sum T_j^3)A_2 + (\sum T_j^4)A_3 &= \sum T_j(C_P)_j \\ (\sum T_j^2)A_0 + (\sum T_j^3)A_1 + (\sum T_j^4)A_2 + (\sum T_j^5)A_3 &= \sum T_j^2(C_P)_j \\ (\sum T_j^3)A_0 + (\sum T_j^4)A_1 + (\sum T_j^5)A_2 + (\sum T_j^6)A_3 &= \sum T_j^3(C_P)_j \end{aligned} \right\}$$

求解出上式的未知数,得所给数据的最小二乘拟合三次多项式为

$$C_P = 1.005956 - 4.629274 \times 10^{-4}T + 7.759288 \times 10^{-6}T^2 + 3.058133 \times 10^{-8}T^3.$$

2.3 系统建模方法



误差约为0.0017

➤ 最小二乘法的特点:

- 原理易于理解（不需要数理统计方面的知识；
- 应用广泛（动态/静态系统，线性/非线性系统的辨识；
- 所得的“估计值”具有条件最优的统计特性。