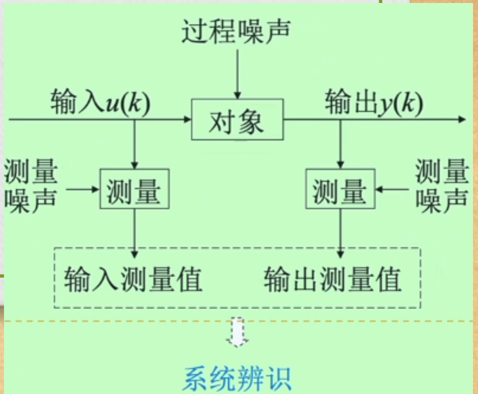
系统辨识初探

哈尔滨工业大学（深圳）

系统辨识的定义

- 系统辨识三要素：数据、模型类和准则
  - 数据：记录的输入/输出数据，含有噪声
  - 模型类：选定模型
  - 准则：代价函数，也称为误差准则

（3）L.Ljung定义（1978）：辨识有三个要素---数据、模型类和准则。辨识就是按照一个准则在一组模型类中选择一个与数据拟合得最好的模型。



系统辨识一般流程

- 一般流程：

（1）明确所辨识系统模型的使用目的：输入/输出？

（2）预选待辨识系统的数学模型种类 DE？TF？SS？AR？MA？

（3）进行辨识的实验设计，记录I/O数据

（4）数据与处理，野点剔除 减小随机误差

（5）模型结构辨识，辨识系统阶次

（6）选择参数估计方法，辨识系统其它参数

（7）模型验证

重点：参数估计方法

离线辨识：离开实验环境进行辨识、

(1)过程：系统模型及阶次n选定后，记录下系统全部的I/O数据，然后再用参数估计方法，辨识系统的模型参数。

(2)特点：需存储数据量大，计算量大，辨识精度较高。事后数据处理方法，不能用于实时控制系统。

在线辨识：

(1)过程：系统模型及阶次n选定后，先获取一小部分数据，估计系统模型参数，再获取新的I/O数据，采用递推修正算法获得新的参数估计值，重复上述过程，直至系统运行停止。

(2)特点：数据量小，计算量小，辨识精度稍低。是一种在线数据处理方法，用于实时控制系统。

经典辨识和现代辨识

- 经典辨识法
  - 非参数模型辨识方法
  - 获得是非参数模型，在假设过程是线性的前提下，不必确定模型的具体结构，适用于任意复杂过程；工程上至今在使用
- 现代辨识法
  - 参数模型辨识方法
  - 必须先假定一种模型结构，通过极小化模型与过程之间的误差准则函数来确定模型参数
  - 如果无法确定模型的结构，先进行结构辨识，确定模型结构参数，然后再确定模型参数

线性定常系统的经典辨识

经典辨识的基本概念

什么是经典辨识

由经典控制理论而来。经典控制中由三种典型输入信号可得三个典型输出，即

脉冲输入—脉冲响应

阶跃输入—阶跃响应

正弦输入—频率响应（不讲）

在自动控制原理中，讲述了如何由它们来求解出系统的传递函数。

对过程施加特定的信号，同时测定过程的输出，可以求得这些非参数模型，经过适当地数学处理，将其转化为参数模型形式---传递函数

系统辨识误差准则

$$J(\theta)=\sum_{k=1}^{N} f(\varepsilon(k))$$

ε(k)为模型与实际系统的误差，可以是输出误差或输入误差，也可以是广义误差。一般函数f取为误差平方：

$$f(\varepsilon(k))=\varepsilon^{2}(k)$$

输入误差： $\varepsilon(k)=u(k)-u_m(k)$

输出误差： $\varepsilon(k)=y(k)-y_m(k)$

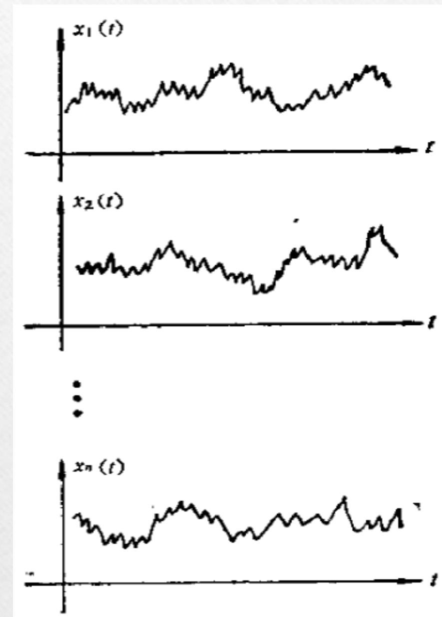
本课程均采用输出误差。

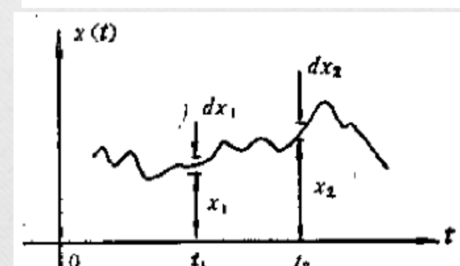
随机过程的基本概念

基本概念 确定性过程 随机过程 & 变量?

- **随机过程**：大量样本$x_1(t), x_2(t), \cdots$所构成的总体，其具有统计意义上的规律性.
  - 在每个孤立瞬间，$x(t)$ 的取值是随机
    - 一维概率密度 $p_1(x,t)$
  - 描述同时刻，不同样本or不同时刻$x(t)$ 取值之间的关系：
    - 二维概率密度 $p_2(x_1,x_2;t_1,t_2)$

    概率：$p_2(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2$
  - 三维，四维 … 统计特性





	确定过程 （Deterministic）	随机过程（Stochastic）
描述	函数，**表达式** $x(t) = f(t)$	概率，统计特性 $p(x,t)$
t时刻取值	确定	不确定

随机过程的数字特征 － 均值和相关函数

一维概率密度

- 与 $p_1(x,t)$ 有关的数字特征量统计特性

均值： $\mu_x(t) \overset{\Delta}{=} E\left(x(t)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_1(x,t)dx$

方差： $\sigma_x^2(t) \overset{\Delta}{=} E\left\{\left[x(t)-\mu_x(t)\right]^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x(t)-\mu_x(t)\right]^2 p_1(x,t)dx$

二维概率密度

- 与 $p_2(x_1,x_2;t_1,t_2)$ 有关的数字特征量

自相关函数： ①同一过程，不同时刻 ②不同随机过程：互相关函数 互协方差函数

同一时刻定义中为 $x_1、x_2、t$

$$R_x(t_1,t_2) \overset{\Delta}{=} E\left(x(t_1)x(t_2)\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_2(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1 dx_2$$

协方差函数：

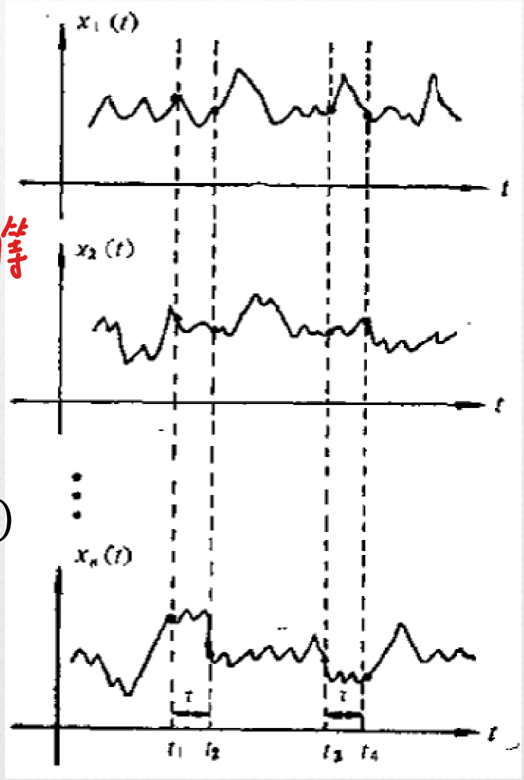
$$C_x(t_1,t_2) \overset{\Delta}{=} E\left\{\left[x(t_1)-\mu_x(t_1)\right]\left[x(t_2)-\mu_x(t_2)\right]\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left[x(t_1)-\mu_x(t_1)\right]\left[x(t_2)-\mu_x(t_2)\right] p_2(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1 dx_2$$

概率论：随机变量统计特性一般不变

- 平稳随机过程 or 非平稳随机过程
  - 如果一个随机过程的统计性质不随时间改变，则称它为平稳随机过程. 反之称为非平稳随机过程 类比:定常/非定常
  - 通常考虑的统计性质：

$\mu_x(t)$ $R_x(t_1,t_2)$



  - 对于平稳随机过程: 均值每时每刻都相等 自相关函数只与时间间隔有关

不同时刻 $t_1 \neq t_2 \neq \cdots$

均值 $\mu_x(t_1) = \mu_x(t_2) = \cdots = \mu_x$ (Constant)

相等间隔时间段 $t_2 - t_1 = t_4 - t_3 = \tau$

自相关函数: $R_x(t_1,t_2) = R_x(t_3,t_4) = \cdots = R_x(\tau)$

只与时间间隔有关

均值：$\mu_x(t) \overset{\Delta}{=} E\left(x(t)\right)$

$R_x(t_1,t_2) \overset{\Delta}{=} E\left(x(t_1)x(t_2)\right)$

平稳随机过程 $\not\Leftrightarrow$ 各态遍历

1. 只有平稳随机过程才有可能是各态遍历性的
2. 各态遍历的随机过程一定是平稳的。

必要而非充分条件

- 各态遍历性
  一次观察 $\mu_1(x)$ 时间平均
  一次观察 $\mu_2(x)$ 时间平均 集合平均为 $\sum_{i=1}^{n}\mu_i$
  $\mu_n(x)$
  - 上述统计性质为“集合平均值”
  - 具有“时间平均值”的统计性质：

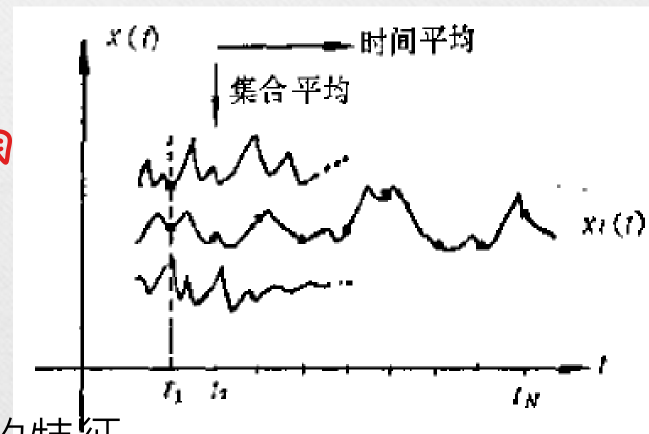
$$\bar{x} \overset{\Delta}{=} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x_i(t)dt \qquad \overline{x(t)x(t+\tau)} \overset{\Delta}{=} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x_i(t)x_i(t+\tau)dt$$

- 各态遍历的平稳随机过程：

$$\bar{x} = \mu_x$$

各态遍历性 集合平均可以用某一次观察的时间平均代替

$$\overline{x(t)x(t+\tau)} = R_x(\tau)$$



一个样本函数能充分地代表整个随机过程的特征

---- 经历了随机过程的各种可能状态 （‘各态遍历’）

均值：$\mu_x(t) \overset{\Delta}{=} E\left(x(t)\right)$

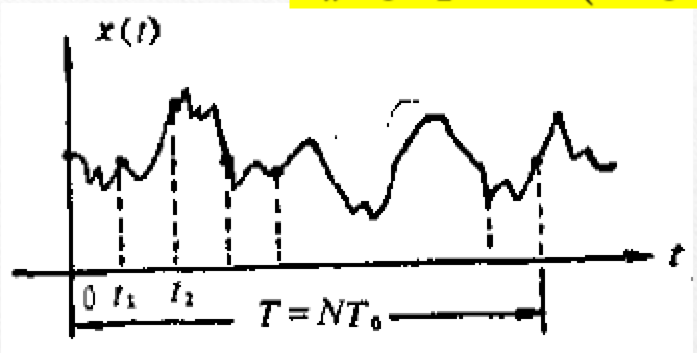
$R_x(t_1,t_2) \overset{\Delta}{=} E\left(x(t_1)x(t_2)\right)$

- 各态遍历的平稳随机过程

$$\mu_x = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x_i(t)dt \cong \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x(k)$$

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x_i(t)x_i(t+\tau)dt$$

$$R_x(\tau) \cong \frac{1}{N-\tau}\sum_{k=1}^{N-\tau} x(k)x(k+\tau)$$



- 两个互相关的随机过程 $x(t),y(t)$
  - 互相关函数 $R_{xy}(\tau) \overset{\Delta}{=} E\left\{x(t)y(t+\tau)\right\}$
  - 互协方差函数

$$C_{xy}(\tau) \overset{\Delta}{=} Cov\left\{x(t),y(t+\tau)\right\}$$
$$\overset{\Delta}{=} E\left\{\left[x(t)-\mu_x\right]\left[y(t+\tau)-\mu_y\right]\right\}$$
$$= R_{xy}(\tau)-\mu_x\mu_y$$

  - 若 $C_{xy}(\tau)=0, \forall -\infty<\tau<\infty$

则称两随机过程互不相关.

白噪声及其产生方法 ⇒相关分析法用到的输入实际上就是随机数

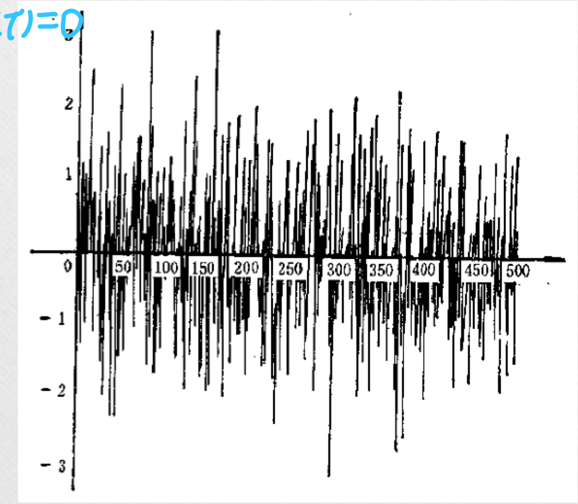
- 白噪声的概念
  - 白噪声过程是由一系列不相关的随机变量组成的一种理想化平稳随机过程. 定义→随机过程的统计性质不随时间改变
  - 白噪声过程没有“记忆性”. 下一时刻的值与上一时刻无关
  - 数学描述：如果随机过程 $w(t)$ 满足

自相关函数

$$\mu_w = E\{w(t)\} = 0 \qquad R_w(\tau) = E\{w(t)w(t+\tau)\} = \sigma^2\delta(\tau)$$

当$\tau \neq 0$时$R_w(\tau)=0$

则称该随机过程为白噪声过程.



功率谱密度

频谱（Spectral ）：一个时域的信号在频域下的表示方式
频谱分析：找出一个信号在不同频率下的性质（振幅、功率、强度或相位等）

功率谱密度（Power Spectral Density，PSD）：描述了信号功率在频域的分布状况，指单位时间的频谱能量分布

$$S_w(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_w(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

傅里叶变换对

自相关函数 $R_w(\tau)$ $\Longleftrightarrow$ 功率谱密度函数 $S_w(\omega)$

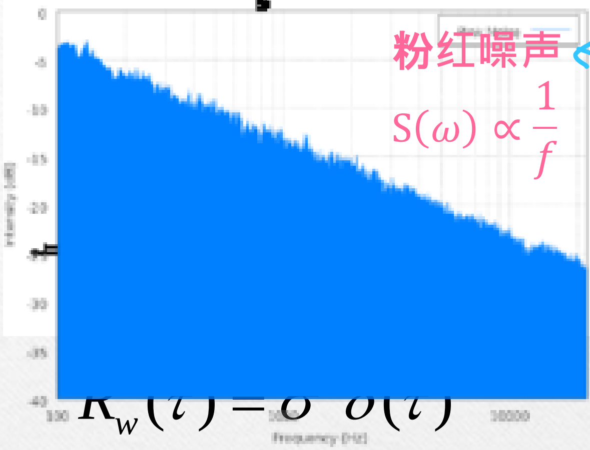
均值： $\mu_x(t) \overset{\Delta}{=} E\big(x(t)\big)$

$R_x(t_1,t_2) \overset{\Delta}{=} E\big(x(t_1)x(t_2)\big)$

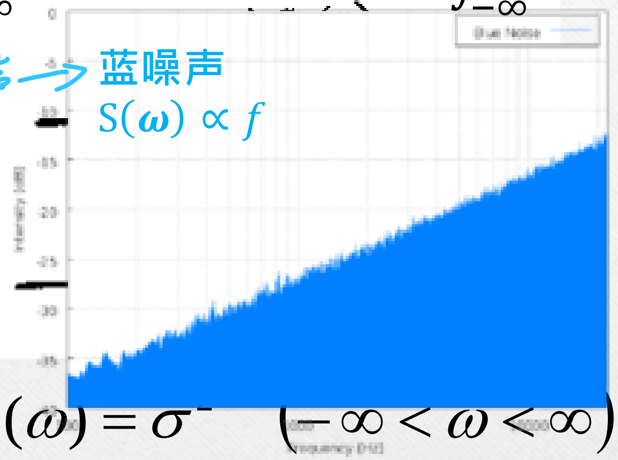
- 白噪声过程的平均功率谱密度（自相关函数的傅立叶变换）：

$$S_w(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2\delta(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \sigma^2\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \sigma^2$$

$R_w(\tau)$



粉红噪声 $S(\omega) \propto \frac{1}{f}$ ← 有色噪声 → 蓝噪声 $S(\omega) \propto f$



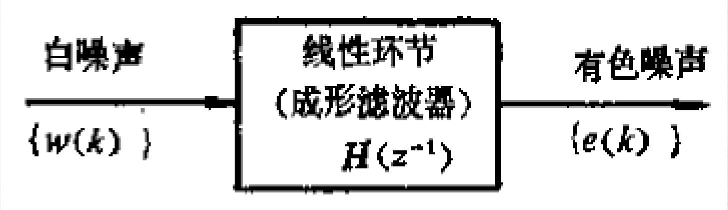
$R_w(\tau)=\sigma^2\delta(\tau)$　　$S_w(\omega)=\sigma^2 \quad (-\infty<\omega<\infty)$

- 上式表明功率在全频段内均匀分布。基于这一特点，借用光学里的“白色光”，由于白光是由各种频率（颜色）的单色光混合而成，因而此信号的这种具有平坦功率谱的性质被称作是“白色的”，所以称这种噪声为“白噪声”。 不具有该性质的为有色噪声

- 总结： 白噪声 -- 平稳随机过程 $w(t)$
  - 均值为零，自相关函数为脉冲函数，功率谱密度为非零常数

$\mu_w=E\{w(t)\}=0$　　$R_w(\tau)=\sigma^2\delta(\tau)$　　$S_w(w)=\sigma^2 \quad (-\infty<w<+\infty)$

- 表示定理
  - 若测量数据所含的噪声为白噪声，只需用较简单的辨识方法，就可得到较好的辨识结果，如相关分析法和最小二乘法；
  - 工程实际中的数据所含的噪声通常是有色噪声，即噪声序列中每一时刻的噪声和另一时刻的噪声是相关的.
  - 表示定理阐述的问题就是将有色噪声通过白噪声描述.
  - 表示定理：



可以证明：如果有色噪声序列 $\{e(k)\}$ 的谱密度$S_e(\omega)$ 是$\cos\omega$ 的有理函数，那么一定存在一个线性环节，它的脉冲传递函数为

$$H(z^{-1})=\frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})}=\frac{1+c_1z^{-1}+\cdots+c_{n_c}z^{-n_c}}{1+d_1z^{-1}+\cdots+d_{n_d}z^{-n_d}}$$

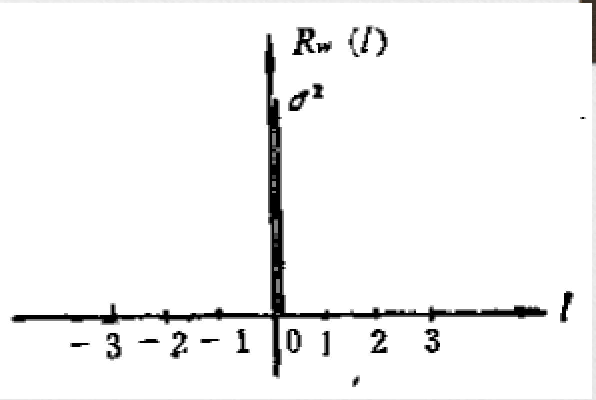
且分子、分母的根都在 z 平面的单位圆内.

白噪声序列

- 从实验的角度讲，连续的白噪声不容易产生，而离散的白噪声较容易产生. $M_w=0,\ R_w(\tau)=\sigma^2\delta(\tau),\ S_w(w)=\sigma^2,(-\infty<w<+\infty)$
- 白噪声序列就是白噪声过程的一种离散形式.
- 数学描述：如果随机序列 $\{w(k)\}$ 两两不相关，自相关函数为：

$$R_w(k)=\sigma^2\delta_k,\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

$$\delta_k=\begin{cases}1, & k=0\\ 0, & k\neq 0\end{cases}$$



- 对应的谱密度为：

$$S_w(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}R_w(k)e^{-j\omega k}=\sigma^2$$

白噪声序列的产生方法

- 如何在计算机上比较经济地产生理想的各种不同分布的白噪声序列是辨识仿真研究中的一个重要问题. 目前，已有大量成熟的计算方法和应用程序可供查询和调用。
- 白噪声序列 —— 随机数
  - (0, 1) 均匀分布的随机数是最简单、最基本的一种, 常作为产生其他分布的基础
  - 正态分布（高斯分布）的随机数是我们最关心的一种. 因为根据概率论中的大数定律，当样本数据足够大时，许多其他分布的随机序列常可近似看作正态分布随机序列.
- 理论上，只要有了一种具有连续分布的随机数，通过函数变换，就可产生其他任意分布的随机数.

例：

- n个均匀分布随机变量相加得到的新的随机变量大致符合高斯分布（中心极限定理），当$n \to \infty$时符合高斯分布。
- 生成两个独立的正态分布变量Z_1, Z_2, 则$\frac{\arctan\left(\frac{Z_0}{Z_1}\right)}{2\pi} + 0.5$ 服从（0，1）均匀分布

真随机数：物理现象产生的，如掷钱币、骰子、转轮、核裂变等

- 物理性随机数发生器 ，结果不可预测，“绝对公平”
- 缺点：技术要求较高

伪随机数

计算机中的随机函数是按照一定算法模拟产生的，结果确定、可预测

- 产生 (0, 1) 均匀分布随机数常用递推算法：$\xi_{i+1} = f(\xi_i, \xi_{i-1}, \ldots, \xi_1)$
  - 每一个 (0, 1) 均匀分布的随机数总是前面各时刻随机数的函数.

可预见的结果其出现的概率是100%。所以用计算机随机函数所产生的“随机数”并不随机，是伪随机数。“有规律的”

产生伪随机数的数学方法很多，最常用的是乘同余法和混合同余法。

所产生的随机数循环周期长，统计性质好

（分布的均匀性、抽样的随机性、试验的独立性、前后的一致性）

乘同余法：用于产生均匀分布的伪随机数

同余

对于两个整数a.b，如果它们除以正整数m所得的余数相同，则称a与b对于模m同余

即∃k∈Z, s.t. a-b=km

记作a≡b (mod m)

等价于b≡a (mod m)

先产生正整数序列，即

周期$T=2^{k-2}$

$$\{x_i\} = Ax_{i-1} (\bmod M), \quad i = 1,2,3,\ldots$$

式中，$M = 2^k$；k 为大于2的整数；M值和序列的周期有关

$$A \equiv 3 (\bmod 8) \quad 或 \quad A \equiv 5 (\bmod 8), \quad A不能太小$$

同余符号，A和3关于模8同余

再令 x_0 取正奇数，如 $x_0 = 1$ $\xi_i = x_i (mod\ M), i = 1,2,3 \ldots$

则 $\{\xi_i\}$ 是循环周期为 2^{k-2} 的伪随机序列。

$M=2^4=16$

例：取 $k = 4, A = 3, x_0 = 1$，得到周期为 $2^{k-2} = 4$的伪随机序列.

$$x_0 = 1, x_1 = 3x_0 (\bmod 16) = 3, x_2 = 3x_1 (\bmod 16) = 9,$$

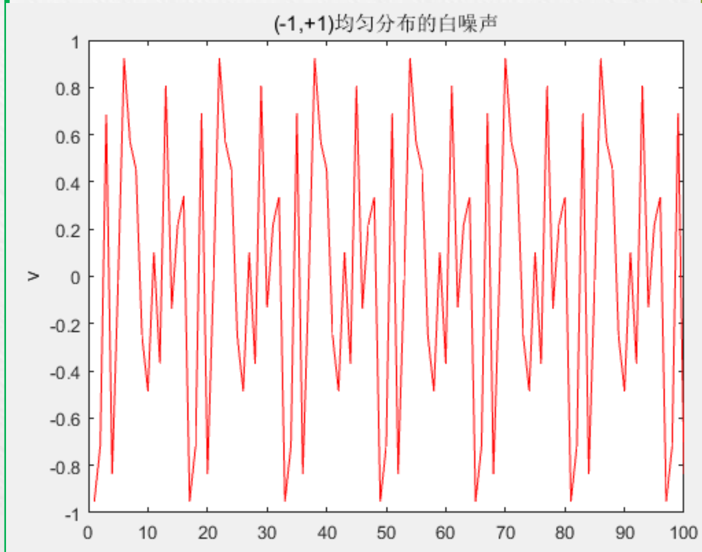
$$x_3 = 3x_2 (\bmod 16) = 11, x_4 = 3x_3 (\bmod 16) = 1$$

27

一般地，随机序列的周期$T \leq M = 2^k$, 所以 k 最好取大一些.

例：产生[-1,1）的伪白噪声序列 $x_i = Ax_{i-1} (\mathrm{mod}\, M)$

```
%白噪声产生程序   M=2^k, k=8 => T=2^(k-2)=64
A=6; x0=1; M=256; f=2; N=100;
for k=1:N
 x2=A*x0;
 x1=mod (x2,M); % x1的范围 0~M-1 (255)
 v1=x1/256; % 归一化 [0,1) 分布
 v(:,k)=(v1-0.5)*f; % [-1,1) 分布
 x0=x1;
 v0=v1;
end
v2=v;
k1=k;
%grapher
k=1:k1;
plot(k,v,'r');
xlabel('k'), ylabel('v');
title('(-1,+1)均匀分布的白噪声')
```



目的 (0, 1) 均匀分布序列生成任意分布的随机数

定理 概率积分变换定理

假设 η 为一个任意分布的随机变量，其连续分布函数为 F,则随机变量 $\xi = F(\eta)$ 服从区间[0, 1]上的均匀分布。即 $\xi \sim U(0,1)$

- 连续分布函数(概率密度函数的积分) 定义
- $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt, -\infty < x < +\infty$$

  $\eta = F^{-1}(\xi)$ $F(x) = P(X \leq x)$

- 理论基础（逆函数法）：设 ξ 是(0, 1)均匀分布的随机变量，$F(x)$ 是给定的连续分布函数，它的逆函数记做 $F^{-1}(x)$ ，则 $F^{-1}(\xi)$和η 服从相同的分布，

  即：$\eta = F^{-1}(\xi)$ 均匀分布 ➡ 给定分布

- 以此定理为基础，可以产生任意分布的随机数。
- 要求分布函数的逆函数的解析式必须存在. 但正态分布函数逆函数的解析式不存在.

(0, 1) 均匀分布序列生成正态分布的随机数

- （逆函数法）： $\eta = F^{-1}(\xi)$
- 要求分布函数的逆函数的解析式必须存在. 但正态分布函数逆函数的解析式不存在.

生成正态分布的随机数

- 中心极限定理："大量的独立随机变量之和具有近似于正态的分布"

设随机变量$x_1, x_2, \cdots, x_N$相互独立，服从同一分布且有有限的数学期望μ和方差σ，则随机变量 $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$，在$N$无限增大时，服从参数为$\mu$和 $\frac{\sigma^2}{N}$ 的正态分布即$N \to \infty$时，

$$\bar{x} \to N(a, \frac{\sigma^2}{N})$$

任意分布 ➡ 正态分布

五、一般总体的样本均值和样本方差

1.定理：设总体X的期望 $E(X)=\mu$，方差 $D(X)=\sigma^2$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体X的样本，则

样本均值的期望 $E(\bar{X})=\mu$，方差 $D(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}$

样本方差的期望 $E(S^2)=\sigma^2$

正态分布随机数的产生

"**大量的独立随机**变量之和具有近似于正态的分布"

- 统计近似抽样法：
  - 设$\{\xi_i\}$是(0, 1)均匀分布的随机数序列，$i = 1, \dots, 12$，
  - 由中心极限定理，有

$$\bar{\xi} = \frac{\sum \xi_i}{N} \sim N(\mu_\xi, \sigma_\xi^2/N)$$

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \xi \in (0,1) \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

均值 $\frac{1}{2}$ 方差 $\frac{1}{12}$

$$\begin{cases} \mu_\xi = E\{\xi_i\} = 1/2 \\ \sigma_\xi^2 = Var\{\xi_i\} = 1/12 \end{cases}$$

  - 若 $\eta \sim N(\mu_\eta, \sigma_\eta^2)$，则有 $\frac{\eta - \mu_\eta}{\sigma_\eta} \sim N(0,1)$

目标序列

  - 即

- $\{\xi_i\}$变换生成序列

x为随机变量序列约i之和的标准化变量

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{N} \xi_i - N\mu_\xi}{\sqrt{N\sigma_\xi^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \xi_i - \frac{N}{2}}{\sqrt{N/12}} \sim N(0,1)$$

$$x \Leftrightarrow \eta \Rightarrow \frac{\eta - \mu_\eta}{\sqrt{\sigma_\eta^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \xi_i - \frac{N}{2}}{\sqrt{N/12}}$$

$N = 12$

$$\eta = \mu_\eta + \sigma_\eta \frac{\sum_{i=1}^{N} \xi_i - \frac{N}{2}}{\sqrt{\frac{N}{12}}}$$

五、一般总体的样本均值和样本方差

1.定理：设总体X的期望 $E(X)=\mu$，方差 $D(X)=\sigma^2$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体X的样本，则

样本均值的期望 $E(\bar{X})=\mu$. 方差 $D(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}$

样本方差的期望 $E(S^2)=\sigma^2$

中心极限定理

1.标准化变量☆

对任意随机变量X，若 $E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2\neq0$，称 $X^*=\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$ 为X的标准化变量，

则 X^* 满足 $E(X^*)=0$，$D(X^*)=1$

2.独立同分布的中心极限定理

若随机变量序列 $\{X_n\}$ $n=1,2,\cdots$ 独立同分布，且 $E(X_i)=\mu$，$D(X_i)=\sigma^2>0$，

则随机变量之和 $\sum_{i=1}^{n}X_i$ 的 $E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=n\mu$，$D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=n\sigma^2$

其标准化变量 $Y_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-E(\sum_{i=1}^{n}X_i)}{\sqrt{D(\sum_{i=1}^{n}X_i)}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ 的分布函数记为 $F_n(x)$

对 $\forall x\in R$，满足 $\lim_{n\to\infty}F_n(x)=\Phi(x)$，即

$\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ 近似 $N(0,1)$ 标准正态分布　　公式：$\lim_{n\to\infty}P\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leq x\}=\Phi(x)$

理解：若某被研究的随机变量是大量 $(n\to\infty)$ 独立随机变量的和，其中每一个随机变量对总和只起微小作用，则可以认为这个随机变量近似服从正态分布

这个结论是**概率积分变换**（Probability Integral Transform）定理。

定理内容：

设 X 是一个随机变量，其分布函数为 $F(x)$，那么随机变量 $F(X)$ 在区间 $[0,1]$ 上服从均匀分布，即：

$$F(X) \sim U(0,1)$$

原理解释：

对于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$，$F(X)$ 的值代表的是 X 落在某个特定区间的概率。直观上，$F(X)$ 的值分布均匀于区间 $[0,1]$，这是因为 $F(X)$ 是一个累积分布函数，它的输出范围就是 $[0,1]$，而通过这个映射，任何一个值落在 $[0,1]$ 上某个位置的概率都是相同的。

更正式的解释如下：

1. 随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 满足：

   $$F(x) = P(X \leq x)$$

   表示 X 取值小于等于 x 的概率。

2. 定义随机变量 $Y = F(X)$，我们计算 Y 的分布：

   $$P(Y \leq y) = P(F(X) \leq y) = P(X \leq F^{-1}(y)) = F(F^{-1}(y)) = y$$

   其中 $F^{-1}(y)$ 是分布函数的逆。由此可见，Y 的分布函数就是 y，这正是均匀分布的定义。

因此，$F(X)$ 服从区间 $[0,1]$ 上的均匀分布。

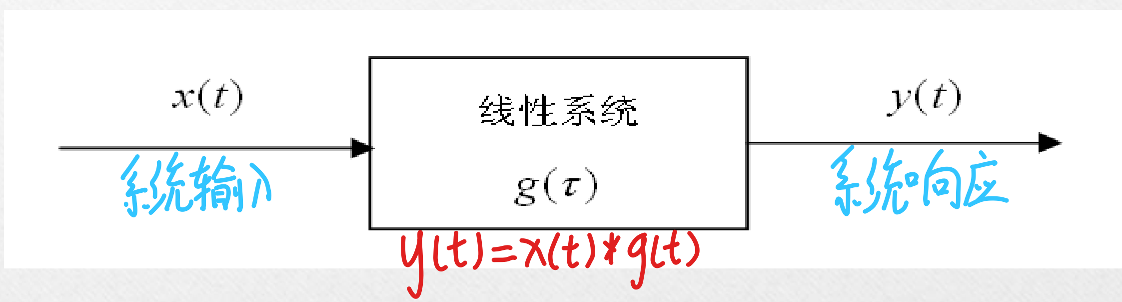
经典辨识方法之一：

相关分析法求取系统的脉冲响应

相关法的核心是维纳-霍夫方程。

（1）维纳-霍夫方程

SISO系统可由下图表示：



g(τ)为系统的脉冲响应函数，即为我们需要求解的。

依据线性系统的卷积定理有：

$$y(t)=\int_{0}^{\infty} g(\sigma)x(t-\sigma)d\sigma$$

设x(t)为均值0的平稳随机过程，则y(t)亦为均值0的平稳随机过程。任取时刻t_2，当$t=t_2$时，上式为

$$y(t_2)=\int_0^{\infty} g(\sigma)x(t_2-\sigma)d\sigma$$

任选另一时刻t_1，用$x(t_1)$乘以上式，有

$$x(t_1)y(t_2)=\int_0^{\infty} g(\sigma)x(t_1)x(t_2-\sigma)d\sigma$$

1. $x(t_1)$和σ无关
2. $g(\sigma)x(t_2-\sigma)$一致可积

两边取数学期望，有

$$E[x(t_1)y(t_2)]=\int_0^{\infty} g(\sigma)E[x(t_1)x(t_2-\sigma)]\,d\sigma$$

$g(\sigma)$为确定函数

$$\underline{R_{xy}(\tau)=\int_0^{\infty} g(\sigma)R_x(\tau-\sigma)d\sigma}$$

自相关函数&互相关函数：<u>确定关系</u>

对于平稳随机过程

式中：$\tau=t_2-t_1$。上式即为**<u>维纳-霍夫方程</u>**

$$y(t)=\int_0^{\infty} g(\sigma)x(t-\sigma)d\sigma+noise$$

输入输出：随机关系

☆总结：白噪声 -- 平稳随机过程 $w(t)$

- 均值为零，自相关函数为脉冲函数，功率谱密度为非零常数

$\mu_w = E\{w(t)\} = 0$ $R_w(\tau) = \sigma^2\delta(\tau)$ $S_w(\omega) = \sigma^2$ $(-\infty < \omega < +\infty)$

(2)由维纳霍夫方程求解脉冲响应g(τ)

重写维纳霍夫方程:

$$R_{xy}(\tau) = \int_0^{\infty} g(\sigma) R_x(\tau - \sigma) d\sigma$$

若方程中Rxy(·)及Rx(·)已知，则解上述方程可得g(τ)

一般情况下，**上述方程极难求解**。只有当**随机过程的功率谱密度是有理函数时**，维纳霍夫方程才可解。

特殊情况：当$x(t)$为白噪声信号时，较易求解

白噪声的自相关函数 $R_x(\tau) = K\delta(\tau)$ ←方差

滞后⇒ $R_x(\tau - \sigma) = K\delta(\tau - \sigma)$

$$R_{xy}(\tau)=\int_0^{\infty} g(\sigma)R_x(\tau-\sigma)d\sigma$$

$$R_x(\tau-\sigma)=K\delta(\tau-\sigma)$$

代入维纳霍夫方程后，可得

$g(\tau)K\int_0^{\infty}\delta(t-\sigma)d\sigma$ 利用了δ的筛选性

$$R_{xy}(\tau)=\boxed{\int_0^{\infty} g(\sigma)K\delta(\tau-\sigma)d\sigma}=Kg(\tau)$$

$$\underline{g(\tau)=R_{xy}(\tau)/K}$$

互相关函数 $R_{xy}(\tau)\overset{\Delta}{=}E\{x(t)y(t+\tau)\}$

可见，$g(\tau)$的求解，只需计算$R_{xy}(\cdot)$即可。

若观测时间T_m充分大，则有

$$R_{xy}(\tau)=\frac{1}{T_m}\int_0^{T_m} x(t)y(t+\tau)dt$$

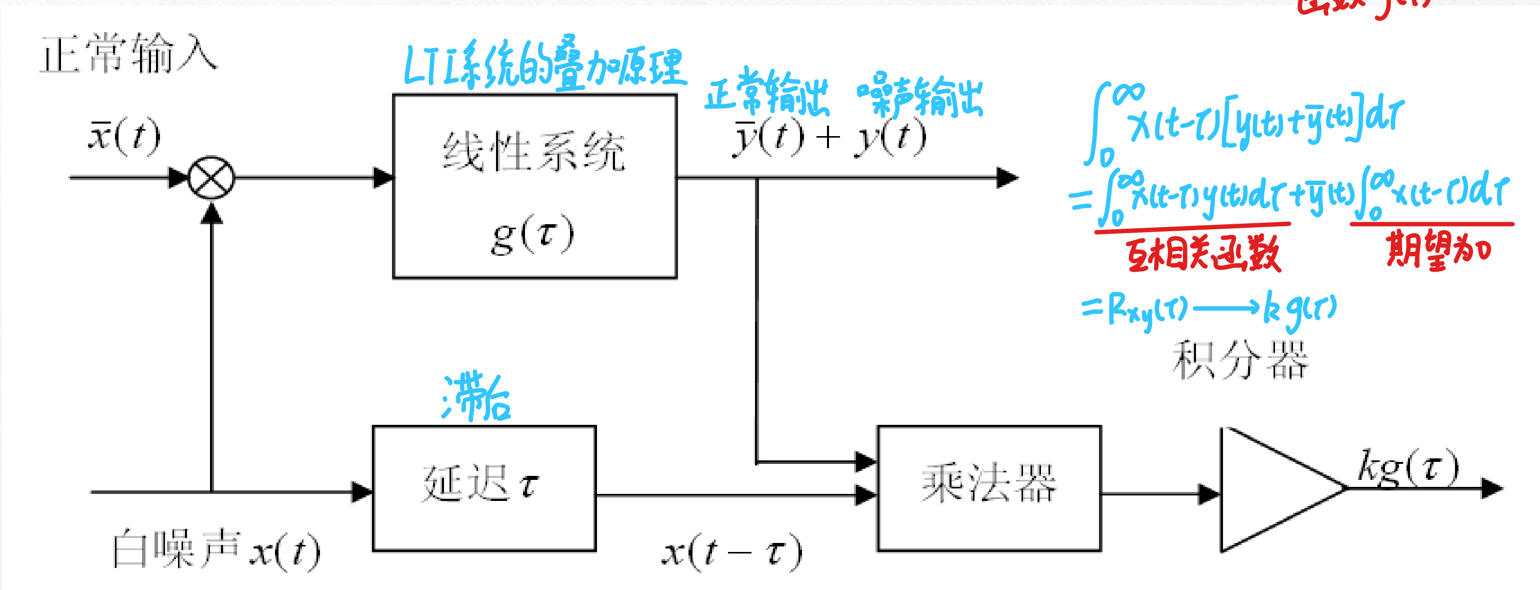
时间平均计算互相关函数

由于X,Y是记录的数据序列，则有

$$R_{xy}(\tau)=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}x_i y_{i+\tau}$$

4.采用白噪声为输入时的辨识结构图

⇒ 目的：辨识系统的脉冲响应函数 g(τ)



5.M序列输入信号的由来(工程中的问题)

(1)白噪声在工程上人为不可产生；

(2)上述方法只是理论层面上；

(3)实际工程上，常用M序列来代替白噪声输入信号。

伪随机数序列

总结：白噪声 -- 平稳随机过程 $w(t)$

- 均值为零，自相关函数为脉冲函数，功率谱密度为非零常数

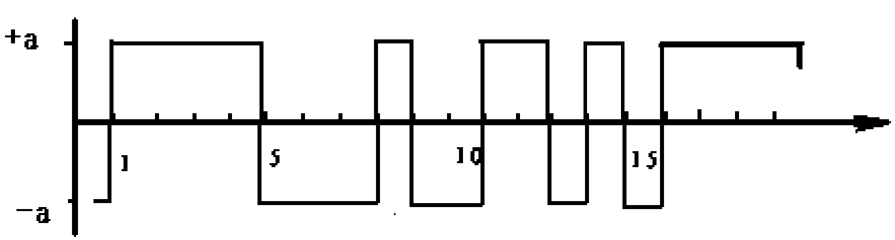
$\mu_w=E\{w(t)\}=0$ $R_w(\tau)=\sigma^2\delta(\tau)$ $S_w(w)=\sigma^2$ $(-\infty<w<+\infty)$

伪随机二位式噪声序列

M序列的产生及其性质

- 理论分析表明，选用白噪声作为辨识输入信号可以保证获得较好的辨识效果，但工程上不易实现.
- 最长线性移位寄存器序列（M序列）具有近似白噪声的性质，工程上又易实现.
- M序列是二进制伪随机码序列（PRBS, Pseudo Random Binary Sequences ）的一种形式，其自相关函数接近脉冲函数：

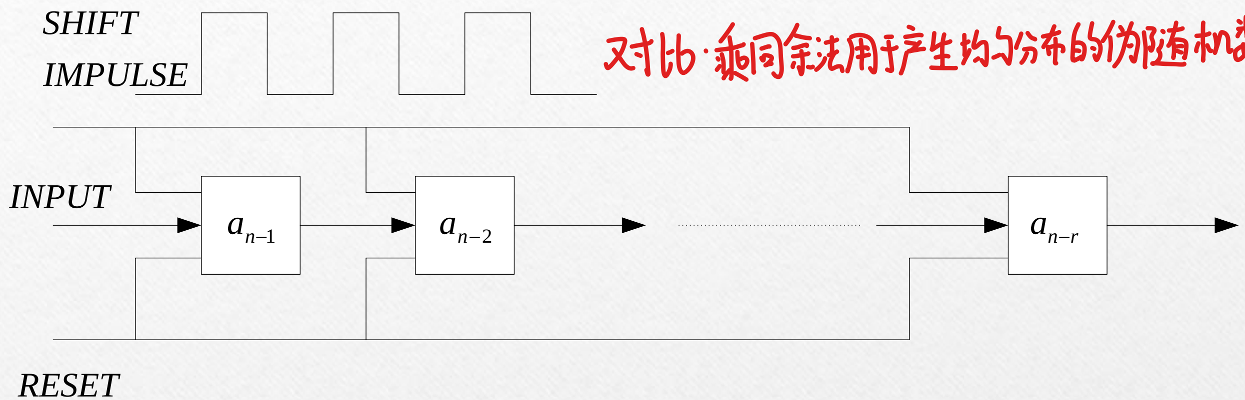
$$R_M(\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T M(t)M(t+\tau)dt \approx \begin{cases} \text{Const}, & \tau=0 \\ 0, & \tau\neq 0 \end{cases}$$



M序列波形（周期为15）

M序列的产生 周期$T=2^r-1$

对比·乘同余法用于产生均匀分布的伪随机数. $T=2^{k-2}$

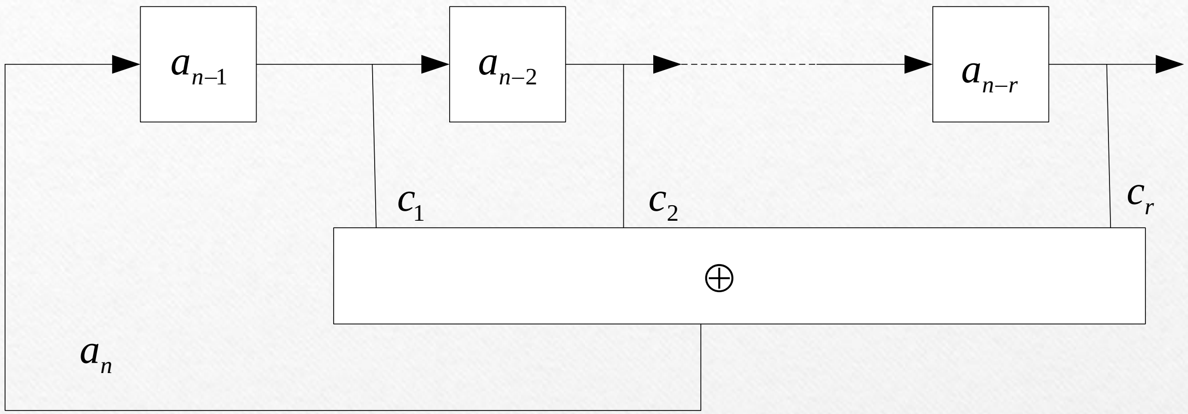


移位寄存器由 r 个具有移位功能的触发器串联而成；

$(a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_{n-r})$构成一个状态；

每个方框表示一个触发器，方框内的数码表示该触发器的当前状态为0或1，初始状态可任意设定；

在移位脉冲下，触发器的新的状态将等于原来的输入移位寄存器就将数码向右平移一位。



反馈系数

将各级状态中的一部分状态进行模2加，反馈到第一级的输入端 a_n

就是异或

在移位时钟脉冲的作用下，得到一个二值序列（最长周期2^r-1）.

r为移位寄存器的个数

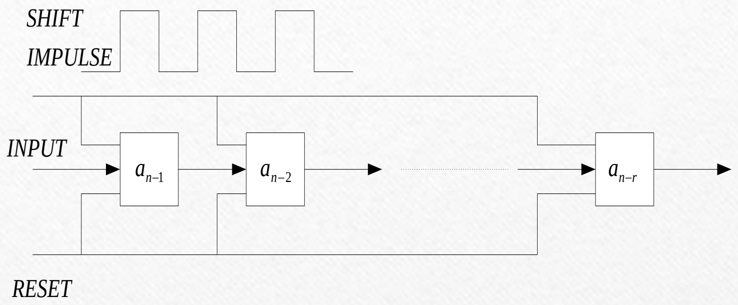
反馈系数 $c_i = 0$ 或 1 ，分别表示第 i 阶参与或不参与逻辑组合.

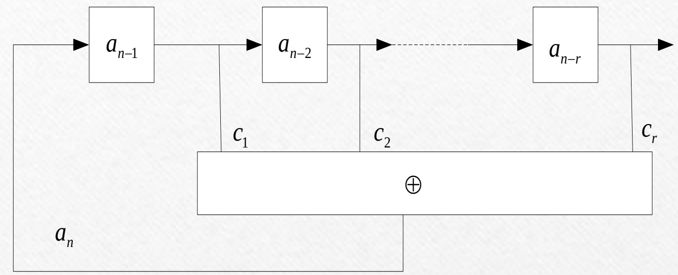
$$a_n = c_1 a_{n-1} \oplus c_2 a_{n-2} \oplus \cdots \oplus c_r a_{n-r} = \sum_{i=1}^{r} \oplus\, c_i a_{n-i}$$

给到第一个寄存器

其中 $\oplus$ 表示模2加， $\sum\oplus$ 表示模2累加。

就是异或





例：设有一个四级移位寄存器， $c_1=c_2=0$， $c_3=c_4=1$ 即反馈逻辑为 $a_n=a_{n-3}\oplus a_{n-4}$. 试写出输出序列 $\{a_{n-4}\}$

- 若初始状态为 $(a_{n-1},a_{n-2},a_{n-3},a_{n-4})=(0,0,0,0)$

  输出为全零序列。

- 若初始状态为 （1， 1， 1， 1），则输出序列为 a_{n-4}：

  a_{n-1} a_{n-4}

  1 1 1 1 0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 1 1 ，周期为15.

  $T=2^r-1$

- 若初始状态为（0 0 0 1），则输出为

  0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 1 1……

  只不过是前一种序列的平移而已。

注：

- 移位寄存器任一级的输出均可为M序列.
- 出现全零状态，移位寄存器的各级输出将永远是0.
- 要适当选择反馈通道才能产生M序列.

```
% 移位寄存器排序: M(1),M(2),M(3),...,M(9),
% output: M(9)
% feedback logic: c5=1, c9=1, others are zeros
clc
clear
```

反馈 $a_n = a_{n-5} \oplus a_{n-9}$

$T=2^k-1,\ k=9$ 不能全为0！

```
M = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]; % 设置初始状态，9级移位寄存器
Np = 2^9-1;       % M序列的周期
u = zeros(1, Np);
for i = 1 : Np
    u(i) = M(9);    % 周期循环
    m = xor(M(9), M(5));      % 输入的反馈逻辑运算
```

异或=模2运算

```
    for  j = 9 : -1 : 2
        M(j) = M(j-1);           % 移位
    end
    M(1) = m;
end
a = 5;
for i=1:Np
    u(i)=(1-2*u(i))*a;     % 由逻辑值到物理值: u(i)=1 -> -a; u(i)=0 -> a
end
```

M序列的性质

- 由 r 级线性反馈移位寄存器产生的M序列，周期为 $N_p = 2^r - 1$
- 移位相加特性：M序列 $\{a_n\}$ 与它的移位 τ 后的序列 $\{a_n\}$ 按位模2加后，仍为同样的M序列（的某个移位）.

例： 一个四级M序列

1 1 0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 1 1 0 0

与其延迟6bit的序列

0 0 1 1 0 1 0 1 1 1 1 0 0 0 1 0 0 1 1

按位模2加，得到新的序列

1 1 1 1 0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 1 1

也是M序列，不过比原M序列延迟了13bit，它们是移位等价的.

r即这一项中的n, n=4

$N_p = 2^r - 1$

M序列的性质

1 1 1 1 0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0

- M序列中，状态“0”或“1”连续出现的段称为游程。游程中“0”或“1”的个数称为游程长度。

并且长度为1的游程占总数的1/2，有2^{n-2}个;

并且长度为2的游程占总数的1/4，有2^{n-3}个;

以此类推，长度为i（1≤i≤n-2）的游程占总数的$1/2^i$，有2^{n-i-1}个;

长度为n-1的游程只有1个，为“0”的游程;

长度为n的游程只有1个，为“1”的游程;

- 一个循环周期内“0”出现（Np-1）/2,”1”出现（Np+1）/2

用M序列辨识线性系统的脉冲响应

- 自相关函数：$R_M(\tau) = \dfrac{1}{N_P \Delta t}\int_0^{N_P \Delta t} M(t)M(t+\tau)dt$

$$R_M(\tau) = \frac{1}{N_P}\sum_{k=0}^{N_P-1} M(k)M(k+\tau)$$

不用记

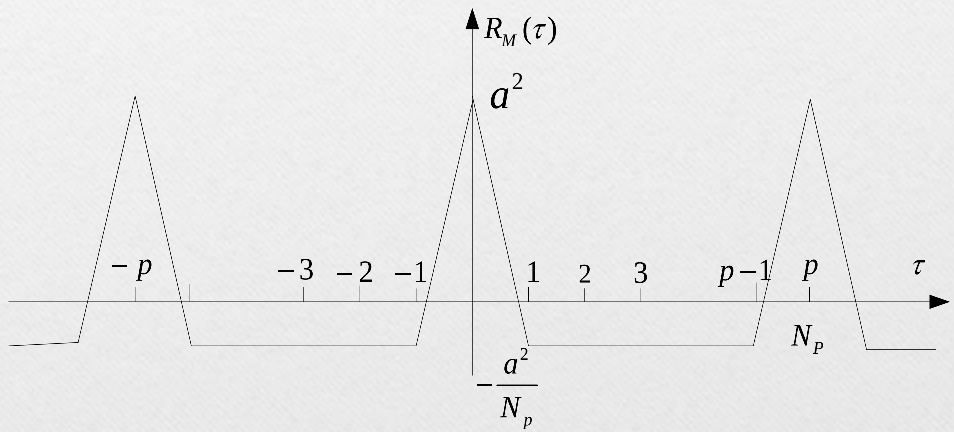
$$R_M(\tau) = \begin{cases} a^2\left(1-\dfrac{N_P+1}{N_P}\dfrac{|\tau|}{\Delta t}\right), & -\Delta t \le \tau \le \Delta t \\ -\dfrac{a^2}{N_P}, & \Delta t < \tau < (N_P-1)\Delta t \end{cases}$$

需要记

离散化情形：

$$R_M(\tau) = \begin{cases} a^2 & \tau = 0 \\ -\dfrac{a^2}{N_p}, & 0 < \tau < N_p - 1 \end{cases}$$

$\rightarrow 0, as\ N_p \rightarrow \infty$



M序列的自相关函数 N_p为M序列的周期

- 由维纳-霍夫方程

$$R_{xy}(\tau)=\int_0^{\infty} g(\sigma)R_x(\tau-\sigma)d\sigma$$ 积分至时间∞

- 输入伪随机数信号（近似白噪声，周期性 T）

$$x(t)=x(t+T)$$

$$R_x(\tau+T)=E[x(t)x(t+\tau+T)]=E[x(t)x(t+\tau)]=R_x(\tau)$$

x的自相关函数 R_x周期性 T

$$R_x(\tau)=\lim_{T'\to\infty}\frac{1}{T'}\int_0^{T'} x(t)x(t+\tau)dt$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{kT}\int_0^{kT} x(t)x(t+\tau)dt=\lim_{k\to\infty}\frac{k}{kT}\int_0^{T} x(t)x(t+\tau)dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^{T} x(t)x(t+\tau)dt$$

同理， $R_{xy}(\tau)=\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{T} x(t)y(t+\tau)dt$

- M序列辨识线性系统的脉冲响应函数
- 连续-维纳霍夫方程

$$R_{xy}(\tau)=\int_0^{\infty} g(\sigma)R_x(\tau-\sigma)d\sigma$$

连续时间：积分求解难

离散时间：有限项叠加

- 可得离散维纳-霍夫方程

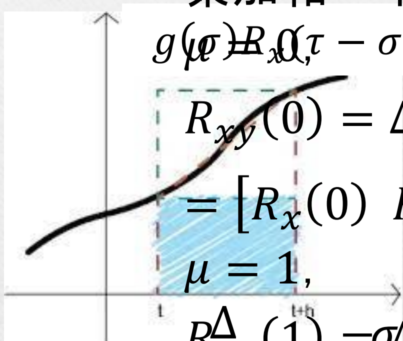
$$R_{xy}(\tau)=R_{xy}(\mu\Delta)=\sum_{k=0}^{N_p-1}\boxed{\Delta}\, g(k\Delta)R_x(\mu\Delta-k\Delta)$$

Δ: 时间离散化精度

即斜伟的步长

$\tau \to \mu\Delta, \sigma \to k\Delta$

累加和 → 向量相乘



$g(\sigma)R_x(\tau-\sigma)$

$\mu = 0,$

$$R_{xy}(0)=\Delta\Big(g(0)R_x(0)+g(1)R_x(-1)+\cdots g(N_p-1)R_x(1-N_p)\Big)$$

$$=\begin{bmatrix}R_x(0) & R_x(-1) & \cdots & R_x(1-N_p)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g(0) & g(1) & \cdots & g(N_p-1)\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$

$\mu = 1,$

Δ σ

$$R_{xy}(1)=\Delta\Big(g(0)R_x(1)+g(1)R_x(0)+\cdots g(N_p-1)R_x(2-N_p)\Big)$$

前向欧拉法：

$$=\begin{bmatrix}R_x(1) & R_x(0) & \cdots & R_x(2-N_p)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g(0) & g(1) & \cdots & g(N_p-1)\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$

离散维纳-霍夫方程 $R_{xy}(\tau)=R_{xy}(\mu\Delta)=\sum_{k=0}^{N_p-1}\Delta g(k\Delta)R_x(\mu\Delta-k\Delta)$

累加和 → 向量相乘

$$R_{xy}=\Delta R g,$$

$$R_{xy}=\begin{bmatrix} R_{xy}(0) \\ R_{xy}(1) \\ \vdots \\ R_{xy}(N_p-1) \end{bmatrix}\quad R=\begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(-1) & \cdots & R_x(-N_p+1) \\ R_x(1) & R_x(0) & \cdots & R_x(-N_p+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_x(N_p-1) & R_x(N_p-2) & \cdots & R_x(0) \end{bmatrix}\quad g=\begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ \vdots \\ g(N_p-1) \end{bmatrix}$$

$$g=\frac{1}{\Delta}R^{-1}R_{xy}$$

记忆

$$R_x(k)=\begin{cases} a^2, k=0 \\ -\dfrac{a^2}{N_p}, 1\le k\le N_p-1 \end{cases} \xrightarrow{\text{计算}} R=a^2\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{N_p} & \cdots & -\frac{1}{N_p} \\ -\frac{1}{N_p} & 1 & \cdots & -\frac{1}{N_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{N_p} & -\frac{1}{N_p} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$g=\underbrace{\frac{N_p}{a^2(N_p+1)\Delta}\begin{bmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{bmatrix}}_{R^{-1}}R_{xy}$$

在外面

$$R_{xy}(\tau)=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}x(i)y(i+\tau)$$

$$R_{xy}(\mu)=\frac{1}{rN_p}\begin{bmatrix}x(-\mu) & x(1-\mu) & \dots & x(rN_p-1-\mu)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y(0)\\ y(1)\\ \vdots \\ y(rN_p-1)\end{bmatrix}$$

互相关函数序列

$$R_{xy}=\frac{1}{rN_p}XY$$

$$Y=\begin{bmatrix}y(0)\\ y(1)\\ \vdots \\ y(rN_p-1)\end{bmatrix}\quad R_{xy}=\begin{bmatrix}R_{xy}(0)\\ R_{xy}(1)\\ \vdots \\ R_{xy}(N_p-1)\end{bmatrix}\quad X=\begin{bmatrix}x(0) & x(1) & \cdots & x(rN_p-1)\\ x(-1) & x(0) & \cdots & x(rN_p-2)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(-N_p+1) & x(-N_p+2) & & x(rN_p-N_p)\end{bmatrix}$$

$$\text{g}=\frac{1}{a^2r(N_p+1)\Delta}\begin{bmatrix}2 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 2\end{bmatrix}XY \Rightarrow \hat{g}=\begin{bmatrix}\hat{g}(0)\\ \hat{g}(1)\\ \vdots \\ \hat{g}(N-1)\end{bmatrix}$$

相关分析法：

xy之间关系 ⇒自相关函数、互相关函数关系⇒ 脉冲响应序列$g(\tau)$

用脉冲响应求传递函数

- 假设脉冲响应函数可以用n阶差分方程表示

$$g(t_0)+a_1 g(t+\Delta)+\cdots+a_n g(t_0+n\Delta)=0$$

$a_1, a_2, \cdots a_n$ 为待定系数

脉冲响应序列

$$g(0),g(\Delta)\cdots g(t_0),g(t_0+\Delta),g(t_0+2\Delta),g(t_0+n\Delta),g(t_0+(n+1)\Delta)\cdots$$

$$a_1 g(t_0+\Delta)+a_2 g(t_0+2\Delta)+\cdots+a_n g(t+n\Delta)=-g(t_0)$$

$$a_1 g(t_0+2\Delta)+a_2 g(t_0+3\Delta)+\cdots+a_n g(t+(n+1)\Delta)=-g(t_0+\Delta)$$

$$\vdots$$

$$a_1 g(t_0+n\Delta)+a_2 g(t_0+(n+1)\Delta)+\ldots+a_n g(t+2n\Delta)=-g(t_0+(n-1)\Delta)$$

联立求解n个方程，可得系数 $a_1, a_2, \cdots a_n$

任何一个n阶线性定常系统，如果其传递函数G(s)的特征根为$s_1 s_2 \ldots s_n$，则其传递函数可以表示为：

$$G(s)=\frac{c_1}{s-s_1}+\frac{c_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{c_n}{s-s_n}$$

等式中$s_1, s_2 \ldots, s_n$和$c_1, c_2, \ldots, c_n$为待求的2n个未知数。对上式求Laplace反变换，得到脉冲响应函数：

$$g(t)=c_1 e^{s_1 t}+c_2 e^{s_2 t}+\cdots+c_n e^{s_n t}$$

$$\begin{cases} g(t+\Delta)=c_1 e^{s_1(t+\Delta)}+c_2 e^{s_2(t+\Delta)}+\cdots+c_n e^{s_n(t+\Delta)} \\ g(t+2\Delta)=c_1 e^{s_1(t+2\Delta)}+c_2 e^{s_2(t+2\Delta)}+\cdots+c_n e^{s_n(t+2\Delta)} \\ \quad\vdots \\ g(t+n\Delta)=c_1 e^{s_1(t+n\Delta)}+c_2 e^{s_2(t+n\Delta)}+\cdots+c_n e^{s_n(t+n\Delta)} \end{cases}$$

将上面等式带入到下列脉冲响应的差分方程中

$$g(t)+a_1g(t+\Delta)+\cdots+a_ng(t+n\Delta)=0$$

得到：

$$c_1e^{s_1t}\left[1+a_1e^{s_1\Delta}+\cdots+a_n(e^{s_1\Delta})^n\right]+c_2e^{s_2t}\left[1+a_1e^{s_2\Delta}+\cdots+a_n(e^{s_2\Delta})^n\right]$$

$$+\cdots+c_ne^{s_nt}\left[1+a_1e^{s_n\Delta}+\cdots+a_n(e^{s_n\Delta})^n\right]=0$$

要使上式为成立，应令方括号内的值为0，即：

$$1+a_1e^{s_i\Delta}+a_2e^{s_i2\Delta}+\cdots+a_n(e^{s_i\Delta})^n=0,\quad i=1,2\cdots n$$

令 $e^{s_i\Delta}=x$，则可以得到：

一元n次线性方程

$$1+a_1x+\cdots+a_nx^n=0$$

解方程可以得到x的n个解$x_1, x_2, \ldots, x_n$。设：

$$e^{s_1\Delta} = x_1, e^{s_2\Delta} = x_2, \mathrm{L} \ , e^{s_n\Delta} = x_n$$

$$\Rightarrow s_1 = \frac{\ln x_1}{\Delta}, s_2 = \frac{\ln x_2}{\Delta}, \mathrm{L} \ , s_n = \frac{\ln x_n}{\Delta}$$

至此可以得到$s_1, s_2 \ldots s_n$，下面求解$c_1, c_2 \ldots c_n$。 $g(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + \cdots + c_n e^{s_n t}$

$$\begin{cases} g(0) = c_1 + c_2 + \cdots + c_n \\ g(\Delta) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \\ \quad \vdots \\ g((n-1)\Delta) = c_1 x_1^{n-1} + c_2 x_2^{n-1} + \cdots + c_n x_n^{n-1} \end{cases}$$

至此，求出了$c_1 \cdot c_n$与$s_1 \cdot s_n$，可以得到$G(s)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n2}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(0) \\ g(\Delta) \\ \vdots \\ g((n-1)\Delta) \end{bmatrix}$$

2024年09月27日

例1：有一个三阶系统，脉冲响应数据如下：

假设未知

$$G(s)=\frac{0.35}{(s+0.5)(s+0.7)}$$

其脉冲响应为 $g(t)=1.75(\mathrm{e}^{-0.5t}-e^{-0.7t})$

求

已知

t	0	1	2	3
g(t)	0	0.1924	0.2122	0.1762

有舍入误差

试求解该系统的线性定常脉冲传递函数 G(s)

解　根据已知条件得到

$$0.1924a_1+0.2122a_2=0$$
$$0.2122a_1+0.1762a_2=-0.1924$$

$$-g(0)=a_1g(1)+a_2g(2)$$
$$-g(1)=a_1g(2)+a_2g(3)$$

解之得

$$a_1=-3.66889,\ a_2=3.32655$$

由式(3.2.7)得

$$1-3.66889x+3.32655x^2=0$$

解之得

$$x_1=0.61055,\ x_2=0.49237$$

$$x_1=e^{s_1t},x_2=e^{s_2t}$$

相应的系统极点为

$$s_1=\ln(0.61055)=-0.49340$$
$$s_2=\ln(0.49237)=-0.70852$$

因此脉冲响应可写成

$$g(k\Delta)=c_1e^{-0.49340k\Delta}+c_2e^{-0.70852k\Delta}$$

令 $k=0,1$,可得方程组

$$c_1+c_2=0$$
$$0.61055c_1+0.49237c_2=0.1924$$

解之得

$$c_1=1.62803,\ c_2=-1.62803$$

理论值

$$G(s)=\frac{1.75}{s+0.5}+\frac{-1.75}{s+0.7}$$

缺点：易受干扰
- 计算舍入误差
- 测量噪声
- 过程噪声

2. 离散系统的脉冲传递函数

$$g(t) = g(0)\delta(t) + g(1)\delta(t-1) + \cdots$$

$$t = i\text{时}，\ \delta(t-i) \neq 0$$

设系统脉冲传递函数形式为：

$$G(z^{-1}) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \mathrm{L}\ \ + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \mathrm{L}\ \ + a_n z^{-n}}$$

根据脉冲传递函数的定义可以得到：

$$G(z^{-1}) = g(0) + g(1)z^{-1} + g(2)z^{-2} + \cdots$$

等式中 $g(i) = g(i\Delta), i = 0,1,2\ldots$。因而有

$$\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \mathrm{L}\ \ + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \mathrm{L}\ \ + a_n z^{-n}} = g(0) + g(1)z^{-1} + g(2)z^{-2} + \cdots$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n}^{\infty} c_n z^{-n}$$

$$\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_nz^{-n}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}}=g(0)+g(1)z^{-1}+g(2)z^{-2}+\cdots$$

进一步得到:

$$b_0+b_1z^{-1}+\mathrm{L}\ +b_nz^{-n}=g(0)+\left[g(1)+a_1g(0)\right]z^{-1}+\mathrm{L}\ +$$

$$\left[g(n)+\sum_{i=1}^{n}a_ig(n-i)\right]z^{-n}+\left[g(n+1)+\sum_{i=1}^{n}a_ig(n+1-i)\right]z^{-(n+1)}$$

$$+\mathrm{L}\ +\left[g(2n)+\sum_{i=1}^{n}a_ig(2n-i)\right]z^{-2n}+\mathrm{L}$$

令上式两边z^{-i}的同次项系数相等，可以得到:

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \mathrm{L} \\ b_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathrm{L} & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \mathrm{L} & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \mathrm{L} & 0 & 0 \\ & & \mathrm{L} & \mathrm{L} & & \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \mathrm{L} & a_1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \\ \mathrm{L} \\ g(n) \end{bmatrix}$$

$$b_0+b_1z^{-1}+\cdot\quad+b_nz^{-n}=g(0)+\left[g(1)+a_1g(0)\right]z^{-1}+\cdot\cdot\quad+$$

$$\left[g(n)+\sum_{i=1}^{n}a_ig(n-i)\right]z^{-n}+\left[g(n+1)+\sum_{i=1}^{n}a_ig(n+1-i)\right]z^{-(n+1)}$$

$$+\cdots+\left[g(2n)+\sum_{i=1}^{n}a_ig(2n-i)\right]z^{-2n}+\cdots$$

$$\begin{bmatrix} g(1) & g(2) & \cdot & g(n) \\ g(2) & g(3) & & g(n+1) \\ & & \cdot & \\ g(n) & g(n+1) & \cdots & g(2n\text{-}1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \cdot \\ a_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -g(n+1) \\ -g(n+2) \\ \\ -g(2n) \end{bmatrix}$$

Hankel矩阵

副对角线上的元素都相等的方阵

例2：设采样间隔时间为0.05s，系统的脉冲响应序列g(k)如下表所示，求系统的（三阶）离散传递函数。

$$G(z^{-1})=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_nz^{-n}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}}$$

t	0	0.05	0.1	0.15	0.20	0.25	0.3
k	0	1	2	3	4	5	6
g(k)	0	7.157	9.491	8.564	5.931	2.846	0.145

解 设系统的脉冲传递函数形式为

$$G(z^{-1})=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+b_3z^{-3}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+a_3z^{-3}}$$

先求a再求b

将 $g(1),g(2),\cdots,g(6)$代入式(3.2.16)得

$$\begin{bmatrix} 7.157039 & 9.491077 & 8.563839 \\ 9.491077 & 8.563839 & 5.930506 \\ 8.563839 & 5.930506 & 2.845972 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5.930506 \\ -2.845972 \\ -0.144611 \end{bmatrix}$$

解上式得

$$a_1=-2.232576, a_2=1.764088, a_3=-0.496585$$

将 $g(0)$至 $g(3)$及 a_1,a_2,a_3 代入式(3.2.15)并解之,可得

$$b_0=0, b_1=7.157309, b_2=-6.487547, b_3=0$$

于是得脉冲传递函数

$$G(z^{-1})=\frac{7.157309z^{-1}-6.487547z^{-2}}{1-2.232576z^{-1}+1.764088z^{-2}-0.496585z^{-3}}$$

相比脉冲响应法，阶跃信号在现实中是可获得的

阶跃响应法

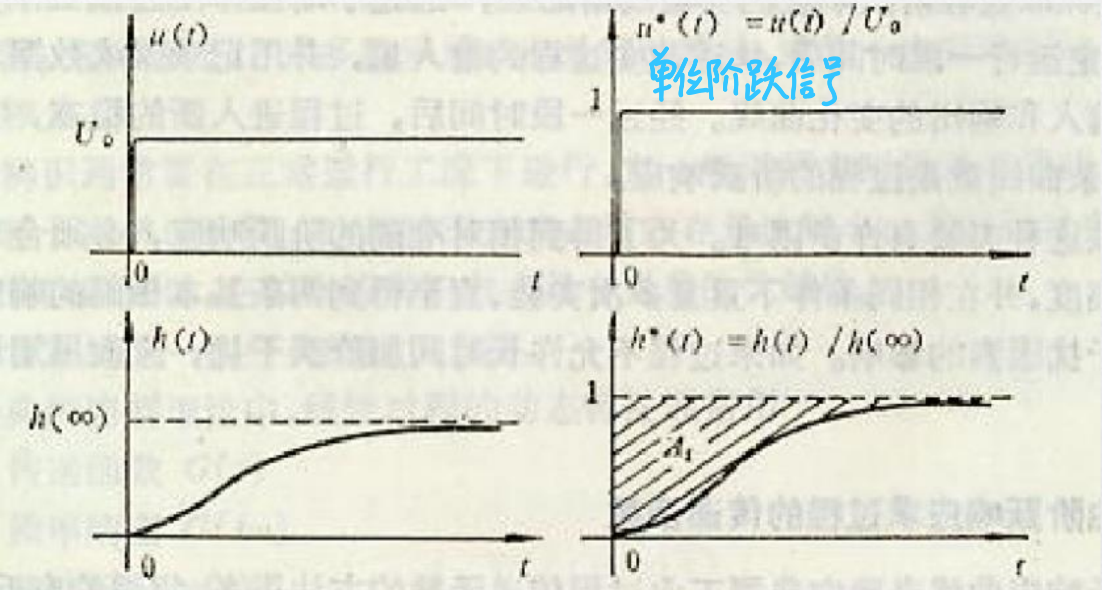
一种常用的非参数模型辨识方法

- 第一步：　测取过程的阶跃响应
- 第二步：由阶跃响应求过程的传递函数
  - 常用方法 响应曲线：非参数模型 ——> 传函：参数模型
    - 近似法，切线法、两点法、面积法，半对数法等
    - 当阶跃曲线比较规则时，用近似法、半对数法、切线法和两点法都能比较有效的求得传递函数

阶跃响应曲线的实验测定

当对象的输入量做阶跃变化时，其输出量是随时间而变化的曲线，则称为阶跃响应曲线。

(a)　过程对象



把阶跃响应转化无因次形式

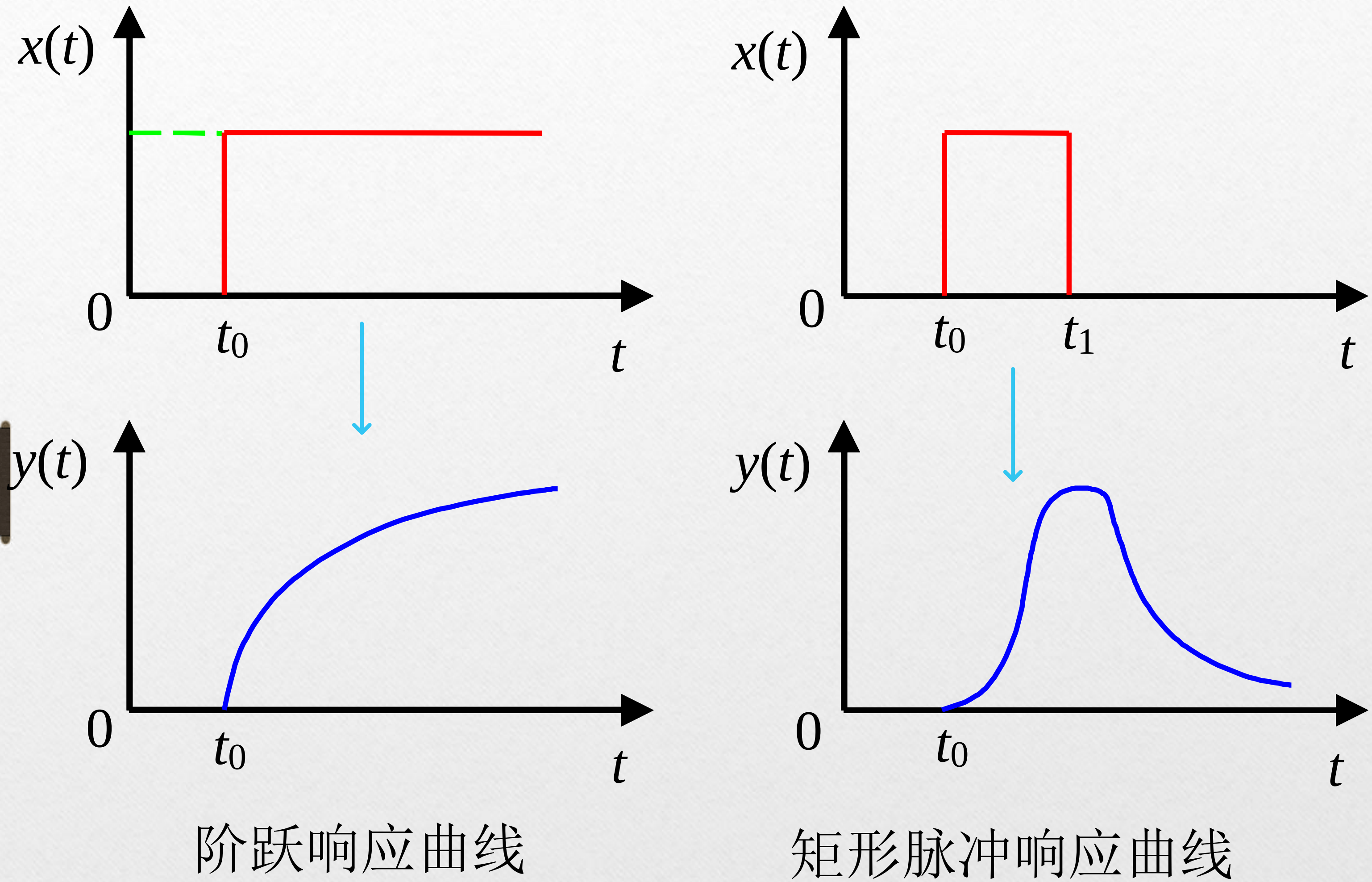
归一化

采用阶跃响应曲线的实验方法，必须注意以下事项：

①阶跃信号不能太大，以免影响正常生产。但是阶跃信号也不能太小，以防止对象特性的不真实性。在一般情况下，取阶跃信号约为正常输入信号的5%～15%。

②在输入阶跃信号前，对象必须处于平衡工况。

当对象长时间处于较大扰动量作用下，被控量的变化幅度可能超出实际生产所允许的范围。这时，就要把对象输入信号改用矩形脉冲的形式，测出对象的矩形脉冲响应曲线，如上图所示。当测到了对象的矩形脉冲响应曲线后，就可以转换成阶跃响应曲线，其转换方法如下。



图：响应曲线

从矩形脉冲响应曲线得到阶跃响应曲线 叠加原理

对象输入矩形脉冲信号的幅值为 x_0，宽度为 a 。矩形脉冲信号可以分解为两个方向相反、幅值相等的阶跃信号，如下图所示。

$$x(t) = x_1(t) - x_1(t-a) \quad (1)$$

线性系统的叠加原理

假如对象是线性的，则对象输出信号的矩形脉冲响应 $y^*(t)$ 由两个阶跃响应叠加而成。即

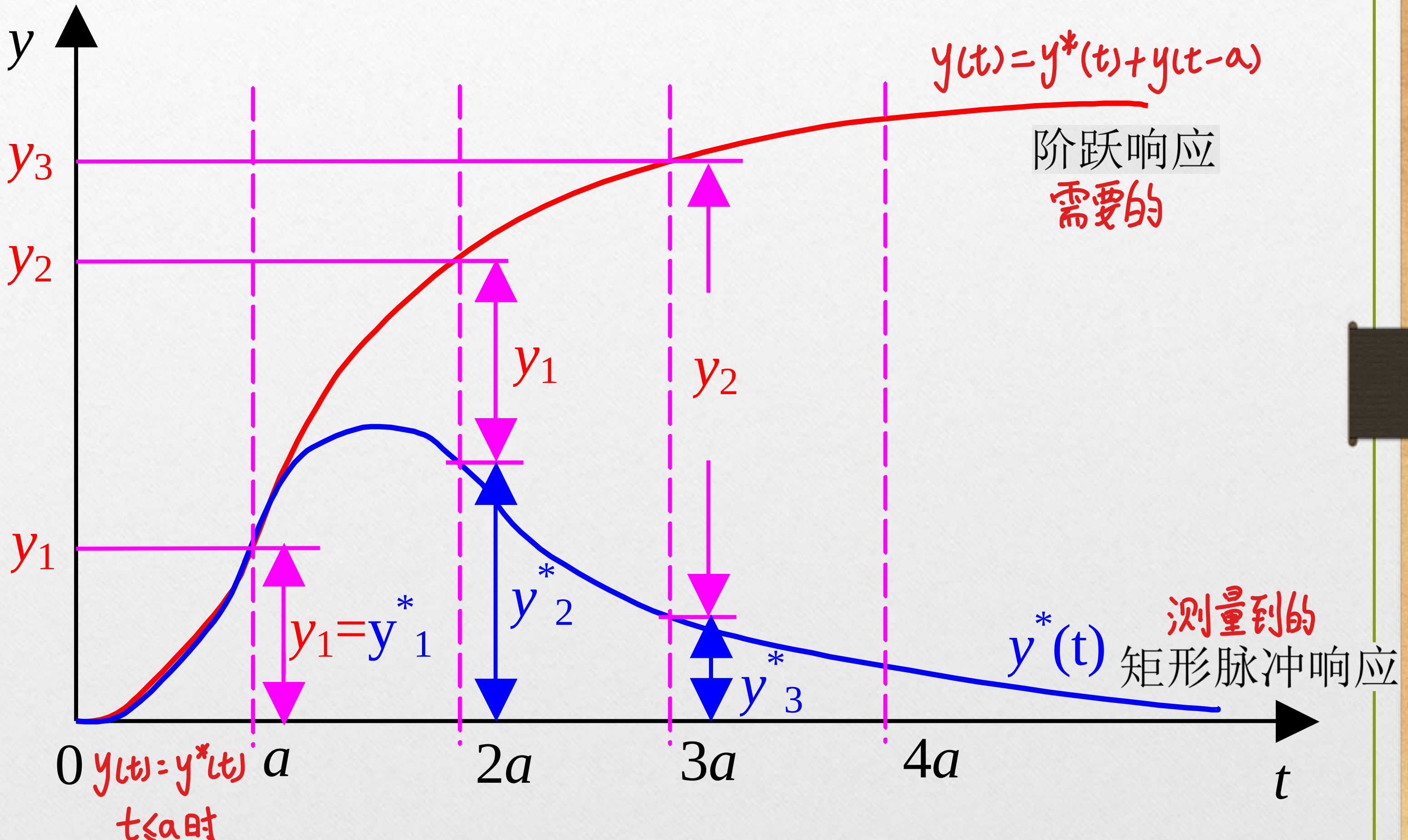
$$\begin{cases} y^*(t) = y(t) - y(t-a) \\ y(t) = y^*(t) + y(t-a) \end{cases} \quad (2)$$

式中：$y^*(t)$ ——矩形脉冲响应曲线；⟶ 测量到的

$y(t)$ ——正阶跃响应曲线；⟶ 实际需要的

$y(t-a)$ ——负阶跃响应曲线。

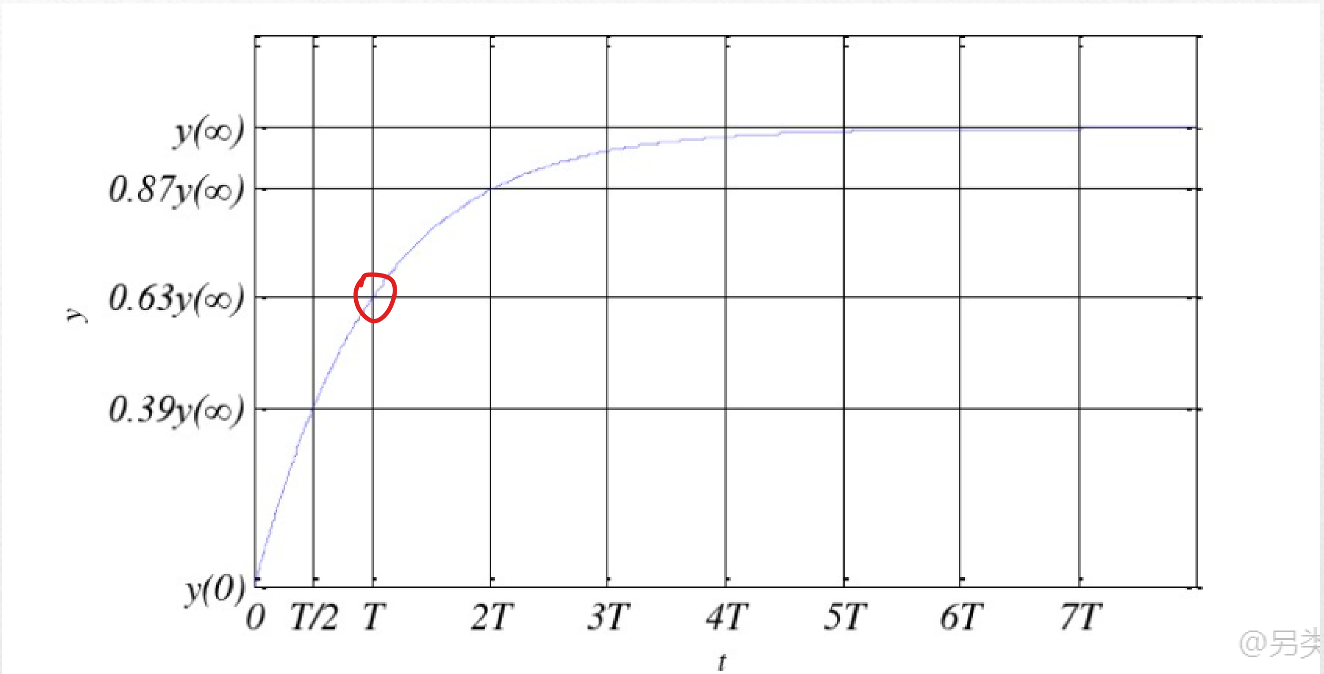
式（2）就是由矩形脉冲响应曲线 $y^*(t)$画出阶跃响应曲线 $y(t)$ 的依据。



阶跃响应曲线的分段作图法示意图

近似法 响应曲线:非参数模型 ——→ 传函:参数模型

以一阶系统为例： $W_0(s)=\dfrac{K}{Ts+1}$ T 时间常数 K 增益



一阶惯性环节的阶跃响应曲线

当 $y(t)=0.63\,y(\infty)$ 时对的t就是时间常数T

0.98

4T ⇒ 调节时间

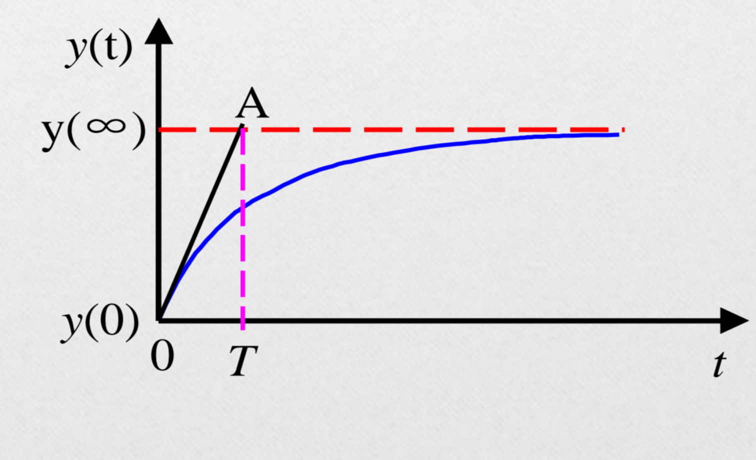
辨识K 设输入阶跃量为A,

则增益 $K=\dfrac{y(\infty)}{A}=\dfrac{\text{稳态值}}{\text{输入幅值}}$

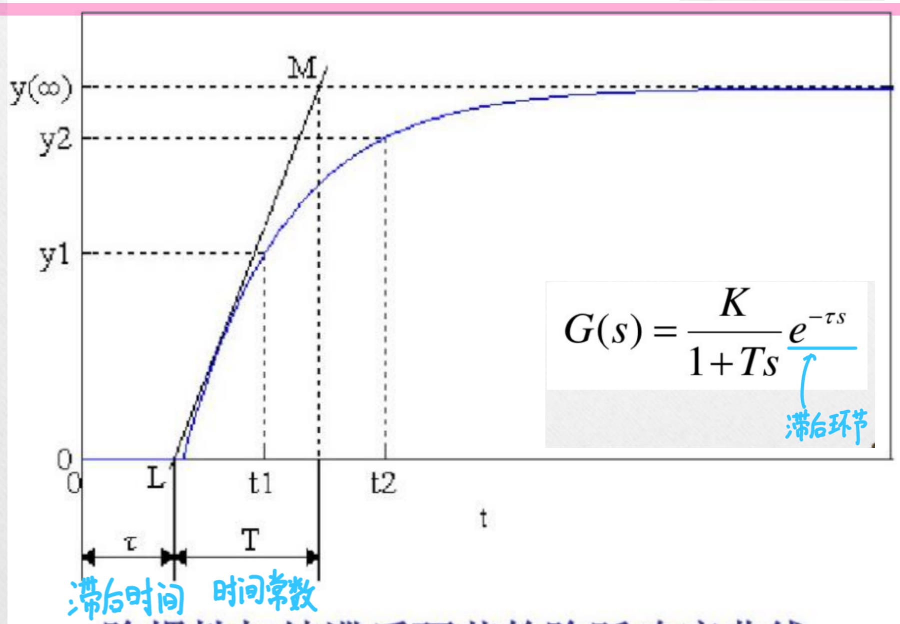
切线法

T 可以按切线法得到

通过 $t=0$ 这一点作阶跃响应曲线的切线，交稳态值的渐近线 $y(\infty)$ 于点A，则OA在时间轴上的投影即为时间常数 T。



图：求取一阶惯性环节 T 的切线法

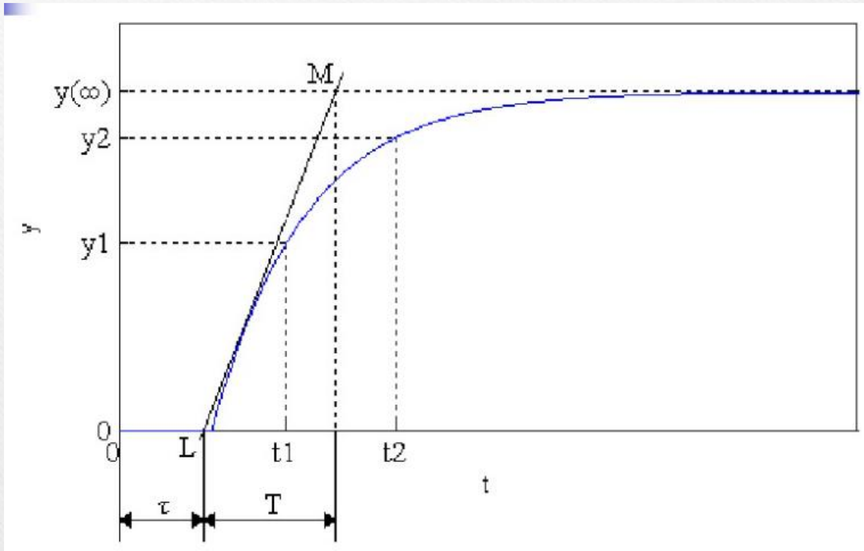


一阶惯性加纯滞后环节的阶跃响应曲线

在响应曲线的拐点处做切线，切线与时间轴交于L，与稳态值渐近线相交于M，则0L即为 τ 值，切线与ML在时间轴的投影为T

- 两点法

在响应曲线上取两点 $A(t_1, y_1)$ 和 $B(t_2, y_2)$，如上图所示，联立求解得



一阶惯性加纯滞后环节的阶跃响应曲线

$$\begin{cases} T = \dfrac{t_2 - t_1}{M_1 - M_2} \\ \tau = \dfrac{t_2 M_1 - t_1 M_2}{M_1 - M_2} \end{cases}$$

$$M_1 = \ln(1 - \frac{y_1}{K})$$

$$M_2 = \ln(1 - \frac{y_2}{K})$$

- 为什么可以这样做?

$$G(s)=\frac{K}{1+Ts}e^{-\tau s}$$

输入一个单位阶跃信号 $X(s)=\frac{1}{s}$

$$y(s)=G(s)\frac{1}{s}=\frac{K}{(1+Ts)s}e^{-\tau s}$$

$$y(t)=\ell^{-1}(y(s))=K(1-e^{-\frac{t-\tau}{T}})$$

$$\left.\begin{aligned}
y(t_1)=K(1-e^{-\frac{t_1-\tau}{T}})\Rightarrow-\frac{t_1-\tau}{T}=\ln(1-\frac{y(t_1)}{K})\overset{\text{定义}}{=}M_1\Rightarrow M_1T-\tau=-t_1\\
y(t_2)=K(1-e^{-\frac{t_2-\tau}{T}})\Rightarrow-\frac{t_2-\tau}{T}=\ln(1-\frac{y(t_2)}{K})\overset{\text{定义}}{=}M_2\Rightarrow M_2T-\tau=-t_2
\end{aligned}\right\}\begin{array}{c}\text{二元一次}\\ \Downarrow \\ T,\tau\end{array}$$

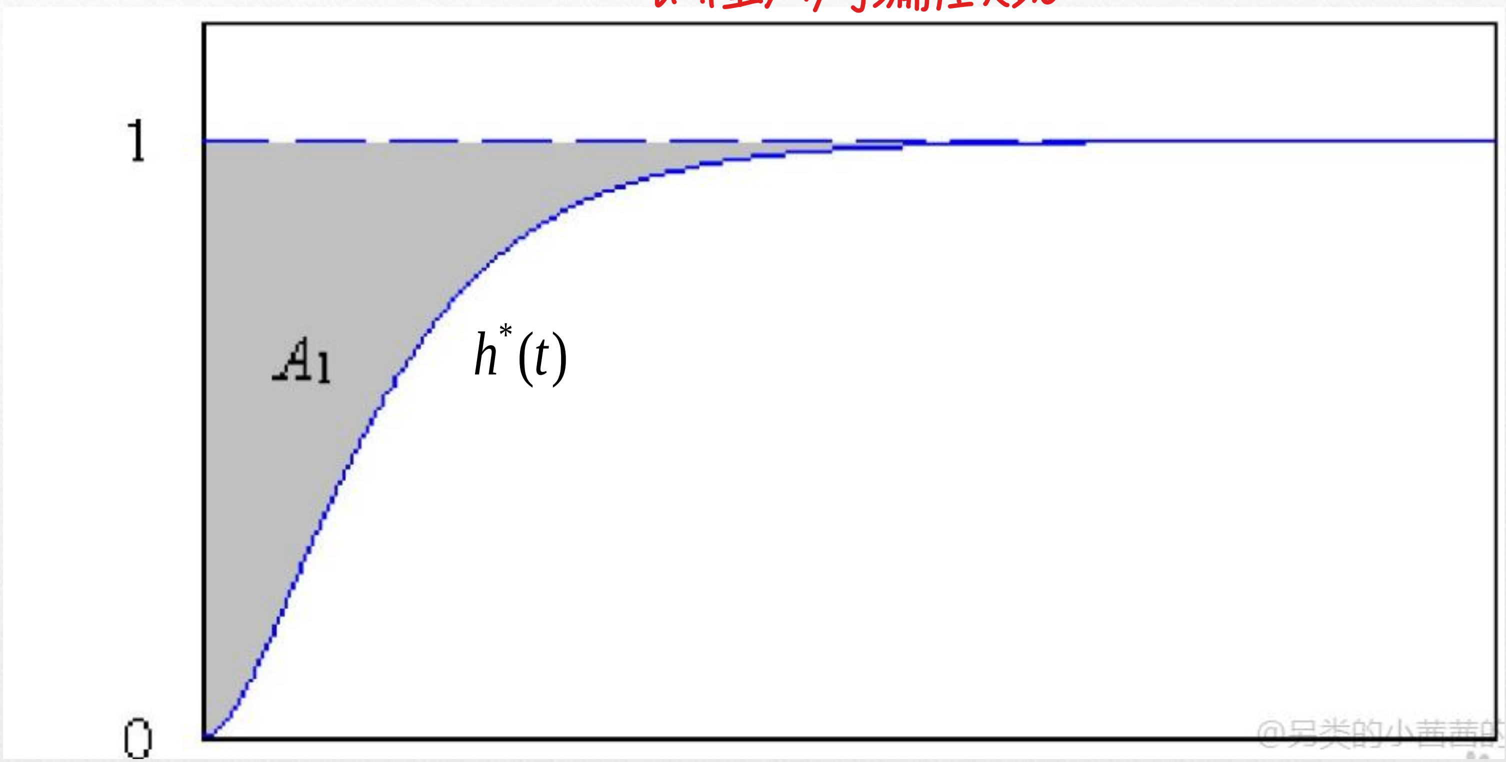
为了正确反映过程的动态特性，输出响应曲线上的两点可以如下匹配：
具有一阶惯性加纯滞后环节的常用配对点和参数计算

设$y(+\infty)=1$，有如下表，用于查表

y_1	y_2	T	τ
0.284	0.632	$1.5(t_2-t_1)$	$(3t_2-t_1)/2$
0.393	0.632	$2(t_2-t_1)$	$2t_1-t_2$
0.55	0.865	$(t_2-t_1)/1.2$	$(2.5t_1-t_2)/1.5$

面积法(不太考)

可利用阶跃响应曲线辨识任意阶次的传函
计算量大，可编程实现



阶跃响应无因次形式

一般形式的传函：

$$G(s)=K\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+1}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+1}$$

$n>m$

辨识K：

$$K=\frac{y(\infty)}{u_0}$$

辨识其它参数

定义

$$G(s)=K\frac{1}{P(s)}$$

$$P(s)=\frac{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+1}{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+1}=1+\sum_{i=1}^{\infty}c_i s^i$$

$1+c_1 s+c_2 s^2+c_3 s^3+\cdots$

$h^*(t)$ · 单位阶跃响应　　代入 $P(s)=1+\sum_{i=1}^{\infty} c_i s^i$

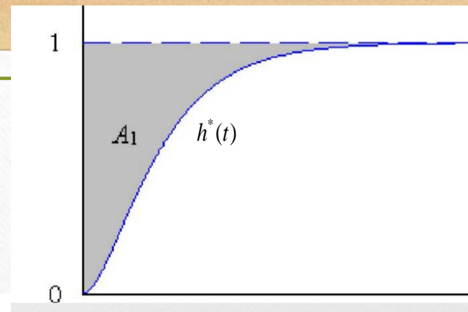
$$\ell(1-h^*(t)) = \frac{1}{s} - \frac{1}{sP(s)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} c_i s^{i-1}}{1+\sum_{i=1}^{\infty} c_i s^i}$$

拉式变换的终值定理

若$\mathcal{L}$[f(t)]=F(s)，且 $\lim_{t\to\infty} f(t)$ 存在，则

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

一阶面积



A₁的几何意义 面积

$$A_1=\int_0^{\infty}[1-h^*(t)]dt=\lim_{s\to 0}L[1-h^*(t)]$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{\sum_{i=1}^{\infty}C_i s^{i-1}}{1+\sum_{i=1}^{\infty}C_i s^{i}}=c_1$$

$\Rightarrow A_1=c_1$

$$f(t)=\int_0^t p(s)ds$$

$$L(f'(t))=sF(s)-f(0)$$

此处 $f(0)=\int_0^0=0$

$$\int_0^{\infty}p(t)dt=\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s)$$

$$=\lim_{s\to 0}L(f'(t))=\lim_{s\to 0}L(p(t))$$

$\Rightarrow \int_0^{\infty}p(t)dt=\lim_{s\to 0}\mathcal{L}[p(t)]$

再令

$$\ell\{h_1^*(t)\}=\frac{1}{s(1+c_1 s)}$$

$\frac{1}{s}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\frac{1}{1+c_1 s}}$ $\longrightarrow$ $h_1^*(t)$

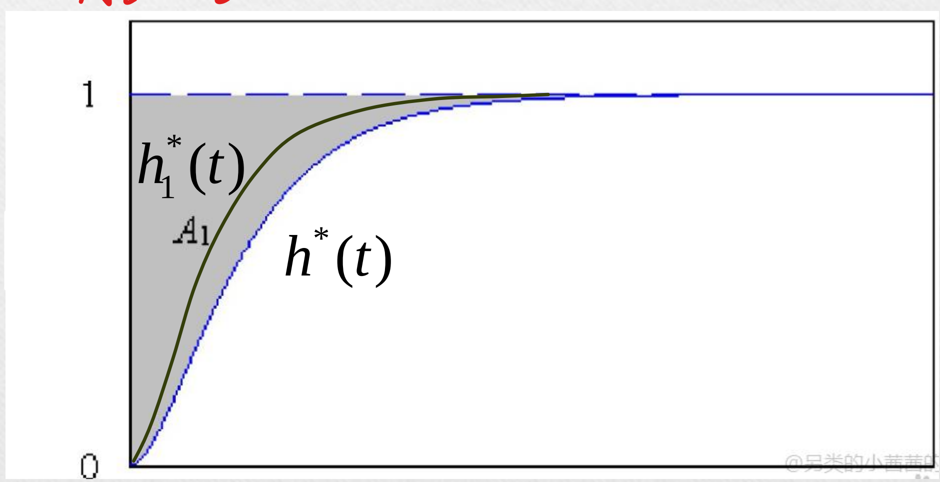
单位阶跃　　一阶系统　　单位阶跃响应

$$\int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^t f(u)du\right]dt = \frac{-1}{s}e^{-st}\left[\int_0^t f(u)du\right]\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

$$A_2 = \underbrace{\int_0^\infty \int_0^t [h_1^*(\tau)-h^*(\tau)]d\tau dt}_{\text{当作 p(t) 利用结论}} = \lim_{s\to 0} \ell\left\{\int_0^t [h_1^*(t)-h^*(t)]dt\right\} = \lim_{s\to 0}\frac{\ell\{h_1^*(t)\}-\ell\{h^*(t)\}}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0}\frac{\sum_{i=1}^{\infty} c_i s^{i-2}}{(1+c_1 s)(1+\sum_{i=1}^{\infty} c_i s^i)} = c_2$$ 定义二阶面积

$\Rightarrow A_2 = c_2$



再令：$\ell\{h_2^*(t)\} = \dfrac{1}{s(1+c_1 s \ \ +c_2 s^2)}$

定义：$A_3 = \int_0^\infty \int_0^t \int_0^\tau [h_2^*(\tau) - h^*(\tau)] d\tau^2 dt = c_3$

其中：$\ell\{h_{i-1}^*(t)\} = \dfrac{1}{s(1+c_1 s \ \ +c_2 s^2 + \cdots + c_{i-1} s^{i-1})}$

$$\because e^{-st} \overset{\text{展开}}{=} 1 + \frac{s}{1!}(-t) + \frac{s^2}{2!}(-t)^2 + \cdots + \frac{s^i}{i!}(-t)^i + \cdots$$

$$\therefore \ell(1-h^*(t)) \overset{\text{定义}}{=} \int_0^\infty [1-h^*(t)] e^{-st} dt \overset{\text{展开}}{=} \sum_{i=0}^\infty M_i s^i$$

计算 Ai 需要連積分,太复杂　　　可以利用Mi得到Ai,是一种计算Ai的简便方法

$$M_i = \int_0^\infty [1-h^*(t)] \frac{(-t)^i}{i!} dt$$

$$\ell(1-h^*(t)) = \frac{1}{s} - \frac{1}{sP(s)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} c_i s^{i-1}}{1+\sum_{i=1}^{\infty} c_i s^i}$$

$$c_i = A_i$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{\infty} A_i s^{i-1}}{1+\sum_{i=1}^{\infty} A_i s^i} = \sum_{i=0}^{\infty} M_i s^i$$

两边乘以s

$$\frac{\sum_{i=1}^{\infty} A_i s^i}{1+\sum_{i=1}^{\infty} A_i s^i} = \sum_{i=0}^{\infty} M_i s^{i+1} \Rightarrow (1+\sum_{i=1}^{\infty} A_i s^i)(1-\sum_{i=0}^{\infty} M_i s^{i+1}) = 1$$

再将等式左侧按s的幂次展开

$$A_1 = M_0$$

$$A_2 = M_1 + A_1 M_0$$

$$A_3 = M_2 + A_1 M_1 + A_2 M_0$$

$$\vdots$$

归纳

$$A_i = M_{i-1} + \sum_{j=0}^{i-2} A_{i-j-1} M_j$$

$$A_i = \int_0^{\infty} [1-h^*(t)] \frac{(-t)^{i-1}}{(i-1)!} dt + \sum_{i=0}^{t-2} A_{i-j-1} \int_0^{\infty} [1-h^*(t)] \frac{(-t)^j}{j!} dt$$

$$A_i = \int_0^{\infty} [1-\mathrm{h}^*(\mathrm{t})] \frac{(-t)^{i-1}}{(i-1)!} dt + \sum_{k=1}^{i-1} A_{i-k} \int_0^{\infty} [1-\mathrm{h}^*(\mathrm{t})] \frac{(-t)^{k-1}}{(k-1)!} dt$$

求得A_i之后，求a_i与b_i

$$\because P(s)=\frac{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_2 s^2 + a_1 s + 1}{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_2 s^2 + b_1 s + 1} = 1+\sum_{i=1}^{\infty} A_i s^i$$

$$1+a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_{n-1}s^{n-1} + a_n s^n = (1+b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_m s^m)(1+A_1 s + A_2 s^2 + \cdots)$$

$$1+a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_{n-1}s^{n-1} + a_n s^n = 1+(A_1+b_1)s + (A_2 + b_2 + b_1 A_1)s^2 + \cdots$$

比较s的各次幂的系数，有

n+m元的线性方程组，列出n+m个等式⇒解出a_i, b_j

$$\begin{cases} a_1 = A_1 + b_1 \\ a_2 = A_2 + b_2 + b_1 A_1 \\ a_3 = A_3 + b_3 + b_2 A_1 + b_1 A_2 \\ \vdots \\ a_i = A_i + b_i + \sum_{j=1}^{i-1} b_j A_{i-j} \qquad i = 1,2,\cdots,n+m \end{cases}$$

当 $i>n$ 时

$$a_i = b_i = 0$$

后面的m个等式中只含b不含a，可先算出b再去算a

$$P(s)=\frac{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+1}{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+1}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} A_n & A_{n-1} & \cdots & A_{n-m+1} \\ A_{n+1} & A_n & \cdots & A_{n-m+2} \\ & & \ddots & \\ A_{n+m-1} & A_{n+m-2} & \cdots & A_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{n+1} \\ A_{n+2} \\ \vdots \\ A_{n+m} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ A_{n-1} & A_{n-2} & \cdots & A_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

利用面积法求系统传递函数的关键是计算各阶面积

$A_i,(i=1,2,\cdots,n+m)$