一级倒立摆的建模与LQR控制

倒立摆建模会考
LQR不考

李衍杰

倒立摆建模仿真及控制问题

M 小车质量

m 摆杆质量

b 小车摩擦系数

l 摆杆转动轴心到杆质心的长度

J 摆杆惯量

F 加在小车上的力

x 小车位置

θ 摆杆与垂直向上方向的夹角

3 系统建模

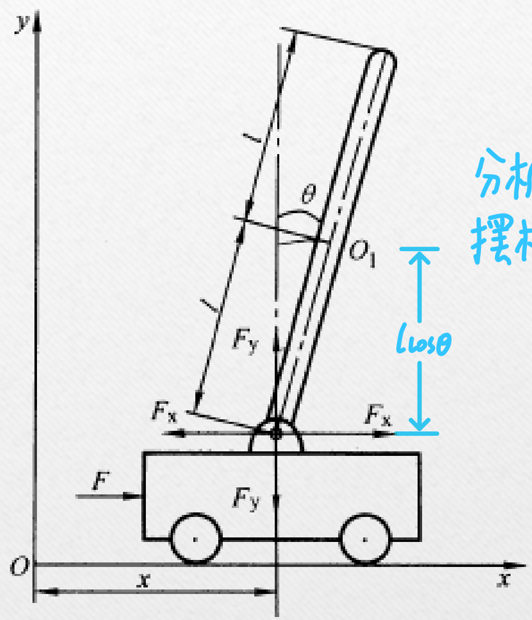


图 2-7 一阶倒立摆的物理模型

分析摆杆

点O，设顺时针方向为正

1)摆杆绕其中心的转动方程为

$$J\ddot{\theta}=F_y l\sin\theta-F_x l\cos\theta$$ (重力矩)

2)摆杆重心的水平运动可能描述为

$$F_x=m\frac{d^2}{dt^2}(x+l\sin\theta)$$

3)摆杆中心在垂直方向上的运动可描述为

$$F_y-mg=m\frac{d^2}{dt^2}(l\cos\theta)$$

4)小车水平方向运动可描述为

$$F-F_x\underline{-b\dot{x}}=M\frac{d^2x}{dt^2}$$

摩擦力

$f=-bv$

化简

(1) $J\ddot{\theta} = F_y l\sin\theta - F_x l\cos\theta$

(2) $F_x = m\dfrac{d^2}{dt^2}(x + l\sin\theta) = m[\ddot{x} + l(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)] = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta$

(3) $F_y - mg = m\dfrac{d^2}{dt^2}l(\cos\theta) = -ml(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) \Rightarrow F_y = m(g - l\ddot{\theta}\sin\theta - l\dot{\theta}^2\cos\theta)$

(4) $F - F_x - b\dot{x} = M\ddot{x}$

① 将(2)(3)代入(1),有

$$J\ddot{\theta} = lm(g - l\ddot{\theta}\sin\theta - l\dot{\theta}^2\cos\theta)\sin\theta - m\ddot{x}l\cos\theta - ml^2\ddot{\theta}\cos^2\theta + ml^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta$$

$$= mgl\sin\theta \underline{- ml^2\ddot{\theta}\sin^2\theta} \underline{- ml^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta} - m\ddot{x}l\cos\theta \underline{- ml^2\ddot{\theta}\cos^2\theta} \underline{+ ml^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta}$$

$$= mgl\sin\theta - ml^2\ddot{\theta} - m\ddot{x}l\cos\theta$$

$$\Rightarrow (J + ml^2)\ddot{\theta} - mgl\sin\theta = -ml\ddot{x}\cos\theta \quad \checkmark$$

② 将(2)代入(4),有

$$F - (m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta) - b\dot{x} = M\ddot{x}$$

$$\Rightarrow (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = F \quad \checkmark$$

采用牛顿动力学方法可建立单级倒立摆系统的微分方程

$$\begin{cases}(M+m)\ddot{x}+b\dot{x}+ml\ddot{\theta}\cos\theta-ml\dot{\theta}^2\sin\theta=F\\(J+ml^2)\ddot{\theta}-mgl\sin\theta=-ml\ddot{x}\cos\theta\end{cases}$$

倒立摆的平衡是使倒立摆的摆杆垂直于水平方向倒立，可近似处理得: $\dot{\theta}\approx 0 \qquad \cos\theta\approx 1 \qquad \sin\theta\approx\theta$

用u来代表被控对象的输入力F，线性化后两个方程

$$\begin{cases}(J+ml^2)\ddot{\theta}-mgl\theta=-ml\ddot{x}\\(M+m)\ddot{x}+b\dot{x}+ml\ddot{\theta}=u\end{cases}$$

可以视为关于变量$\ddot{\theta}$、$\ddot{x}$的线性方程组⇒$\ddot{\theta}$、$\ddot{x}$

取状态变量 :

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\theta\\\dot{\theta}\\x\\\dot{x}\end{bmatrix}$$

忽略摩擦力

已知: $\begin{cases} (J+ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta \\ ml\ddot{\theta} + (M+m)\ddot{x} = u \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} J+ml^2 & ml \\ ml & M+m \end{bmatrix}}_{A} W = \begin{bmatrix} mgl\theta \\ u \end{bmatrix}$

$$|A| = J(M+m) + ml^2(M+m) - m^2l^2 = J(M+m) + Mml^2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} M+m & -ml \\ -ml & J+ml^2 \end{bmatrix} \Rightarrow W = A^{-1}\begin{bmatrix} mgl\theta \\ u \end{bmatrix} = \frac{1}{J(M+m)+Mml^2}\begin{bmatrix} (M+m)mgl\theta - mlu \\ -m^2gl^2\theta + (J+ml^2)u \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta} = \dfrac{(M+m)mgl\theta - mlu}{J(M+m)+Mml^2} \\[2ex] \ddot{x} = \dfrac{-m^2gl^2\theta + (J+ml^2)u}{J(M+m)+Mml^2} \end{cases}$$

即摆杆的角度和角速度以及小车的位移和速度四个状态变量，忽略摩擦力，则系统的状态方程为：

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_2 \\
\dot{x}_2 = \dfrac{mgl(M+m)}{J(M+m)+Mml^2}\overset{\theta}{x_1} + \dfrac{-ml}{J(M+m)+Mml^2}u \\
\dot{x}_3 = x_4 \\
\dot{x}_4 = \dfrac{-m^2gl^2}{J(M+m)+Mml^2}\overset{\theta}{x_1} + \dfrac{J+ml^2}{J(M+m)+Mml^2}u
\end{cases}
$$

将上式写成向量和矩阵的形式，就成为线性系统的状态方程：状态空间模型

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

观测方程. $y = \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} = Cx$

这里设：

$M = 1.42Kg$

$m = 0.12Kg$

$b = 0.1N/m/s$

$l = 0.188m$

$J = 0.0014Kgm^2$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 41.6300 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.6099 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.7584 \\ 0 \\ 0.6898 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

倒立摆系统的传递函数模型

$$\ddot{\theta} = \frac{(M+m)mgl\theta - mlu}{J(M+m)+Mml^2}$$

$$\ddot{x} = \frac{-m^2gl^2\theta + (J+ml^2)u}{J(M+m)+Mml^2}$$

$\Rightarrow$

$$\ddot{\theta} = 41.63\theta - 2.7584F$$

$$\ddot{x} = -0.60999\theta + 0.6898F$$

$\Rightarrow \frac{F(s)}{\theta(s)}$

上两式联立，消去F：

$$\ddot{\theta} - 39.1911\theta = 3.9988\ddot{x}$$

$$s^2\theta(s) - 39.1911\theta(s) = 3.9988s^2x(s)$$

$$\frac{\theta(s)}{x(s)} = \frac{3.9988s^2}{s^2 - 39.1911}$$

$$\frac{F(s)}{x(s)} = \frac{F(s)}{\theta(s)}\frac{\theta(s)}{x(s)}$$

一级倒立摆LQR控制

目的：利用LQR设计的控制器对倒立摆进行在线控制，可以使倒立摆达到稳定。

什么是LQR?

- LQ（linear quadratic）问题——对于线性系统的控制器设计问题，如果其性能指标是状态变量和(或)控制变量的二次型函数的积分，则这种动态系统的最优化问题称为**线性系统二次型性能指标的最优控制问题（即LQ问题）**，简称为线性二次型最优控制问题或线性二次问题。

- LQR (linear quadratic regulator)即线性二次型调节器，其对象是现代控制理论中以状态空间形式给出的线性系统，而目标函数为对象状态和控制输入的二次型函数。
- LQR最优设计是指设计出的状态反馈控制器 K要使二次型目标函数J 取最小值, 而 K由权矩阵Q 与 R 唯一决定, 故此 Q、 R 的选择尤为重要。

LQR控制

线性二次型是指系统的状态方程是线性的，指标函数是状态变量和控制变量的二次型。考虑线性系统的状态方程为：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- 找一状态反馈控制律：

LQR控制器

$$u(t) = -Kx(t)$$

使得二次型性能指标最小化：

$$J=\frac{1}{2}x^T(t_f)Sx(t_f)+\frac{1}{2}\int_{t0}^{tf}[x^T(t)Qx(t)+u^TRu(t)]dt$$

其中，x(t)为系统的状态变量； t_f 、 t_0 为起始时间与终止时间；S为终态约束矩阵；Q为运动约束矩阵；R为约束控制矩阵。其中Q、R决定了系统误差与控制能量消耗之间的相对重要性。

$$J=\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}[x^T(t)Qx(t)+u^TRu(t)]dt$$

为使J最小，由最优值原理得到最优控制为：Q、R为自己指定的正定矩阵

$$K = R^{-1} B^T P$$

LQR控制器

则 $$u^*(t) = -R^{-1} B^T P x(t)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

式中，矩阵 P 为微分**Riccatti**方程

$$-PA - A^T P + PBR^{-1} B^T P - Q = 0$$

的解。

对于最优反馈系数矩阵，使用Matlab中专门的求解工具lqr()来求取。

[K,P]=lqr(A,B,Q,R)

用Matlab求解lqr(A, B, Q, R)可以求出最优反馈系数矩阵的值。lqr函数需要选择两个参数R和Q，这两个参数是用来平衡输入量和状态量的权重。其中,$Q_{1,1}$代表摆杆角度的权重，而 $Q_{3,3}$ 是小车位置的权重。这里选择：

$$Q=\begin{bmatrix}250 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 10 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$R=0.1$$

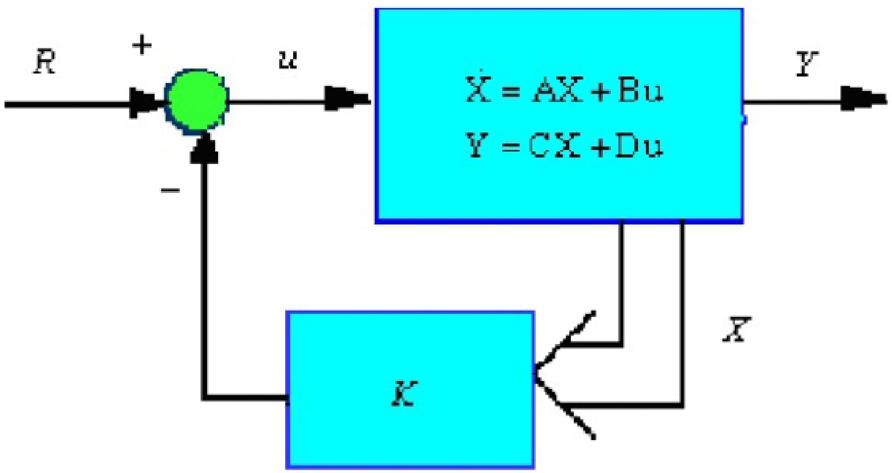
通过matlab求得：K乘以x作为输入给倒立摆

K = [-82.4246 -10.7034 -10.0000 -11.8512]

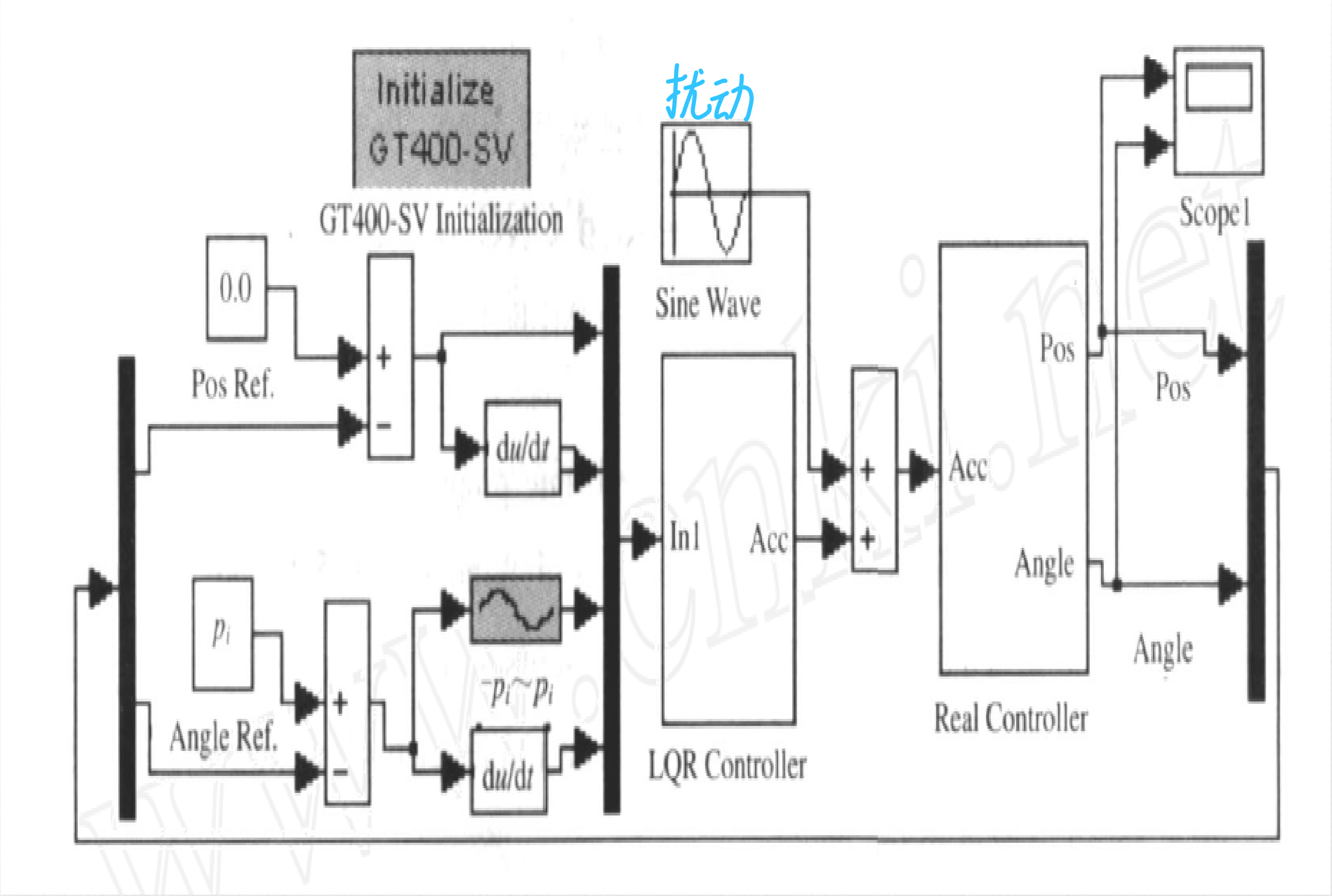
系统仿真

LQR控制器的设计

- 使用完全状态反馈设计控制器



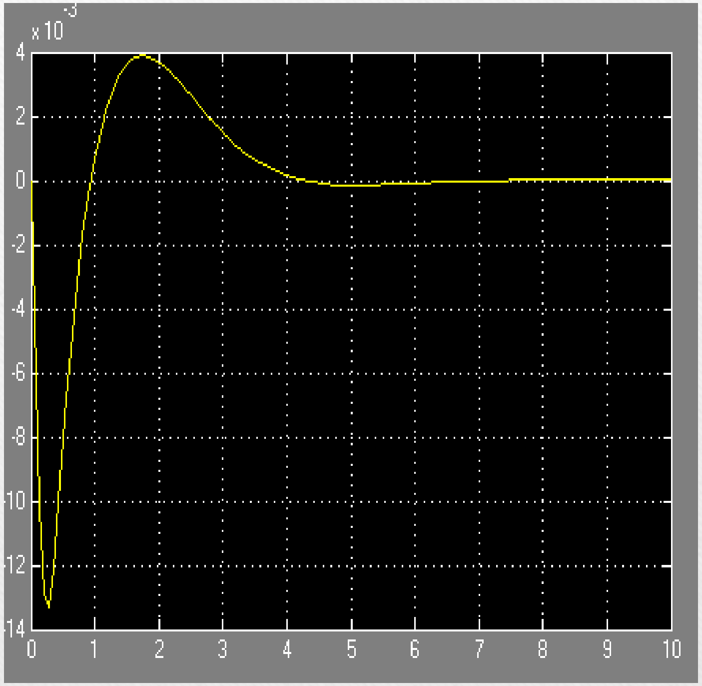
系统仿真框图



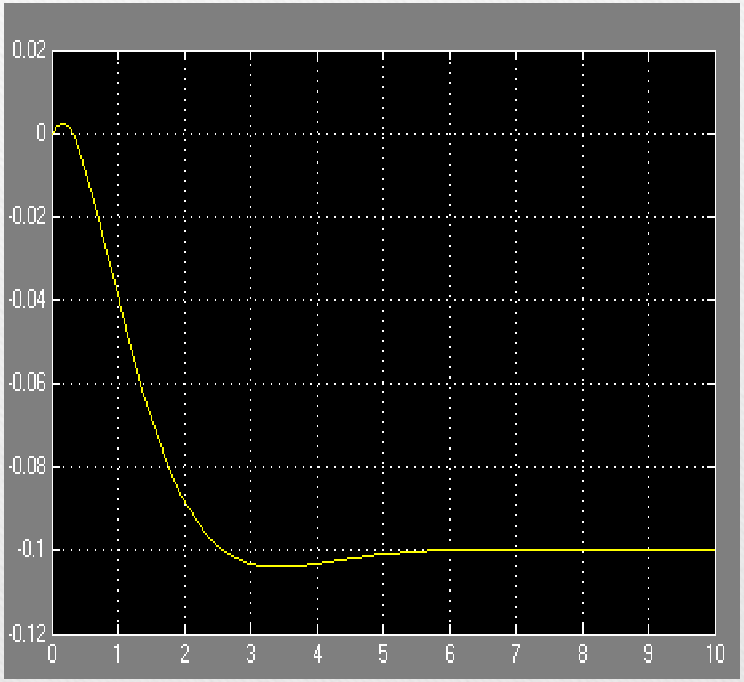
Initialize
GT400-SV
GT400-SV Initialization
扰动
Sine Wave
Scope1
0.0
Pos Ref.
+
−
du/dt
In1
Acc
LQR Controller
+
+
Acc
Pos
Angle
Real Controller
Pos
Angle
p_i
Angle Ref.
$-p_i \sim p_i$
du/dt

MATLAB仿真结果

倒立摆摆角（ θ ）



小车位移（x）



结论

- 从图中可以看出,在给定外界干扰后,小车能迅速调整,使整个系统在很短的时间（ 5 s ）内恢复平衡，达到了较好的控制效果。
- 实验证明,设计的LQR控制器能够对直线一级倒立摆系统进行有效的实时控制。