

(a) 对杆件分析,  $v_1^2 = (r_1\dot{\theta}_1)^2, \omega_1 = \dot{\theta}_1,$   
 $v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = \left[\frac{d}{dt}(l_1c_1 + r_2c_{12})\right]^2 + \left[\frac{d}{dt}(l_1s_1 + r_2s_{12})\right]^2$   
 $= l_1^2\dot{\theta}_1^2 + r_2^2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2l_1r_2c_2\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2),$   
 $\omega_2 = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2$   
 $T = \frac{1}{2}(m_1v_1^2 + m_2v_2^2 + I_{zz1}\omega_1^2 + I_{zz2}\omega_2^2)$   
 $V = 0$   
 则  $L = T - V$   
 $= \frac{1}{2}(m_1r_1^2\dot{\theta}_1^2 + m_2l_1^2\dot{\theta}_1^2 + m_2r_2^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + 2m_2l_1r_2c_2\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + I_{zz1}\dot{\theta}_1^2 + I_{zz2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2)$   
 $= (6c_2 + 10.02)\dot{\theta}_1^2 + (6c_2 + 4.01)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + 2.005\dot{\theta}_2^2$   
 $= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20.04 + 12c_2 & 4.01 + 6c_2 \\ 4.01 + 6c_2 & 4.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix},$   
 $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = (12c_2 + 20.04)\ddot{\theta}_1 + (6c_2 + 4.01)\ddot{\theta}_2 - 12s_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - 6s_2\dot{\theta}_2^2 = \tau_1,$   
 $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = (6c_2 + 4.01)\ddot{\theta}_1 + 4.01\ddot{\theta}_2 - 6s_2\dot{\theta}_1^2 = \tau_2$   
 矩阵形式可表示为  
 $\begin{bmatrix} 20.04 + 12c_2 & 4.01 + 6c_2 \\ 4.01 + 6c_2 & 4.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6s_2\dot{\theta}_2 & -6s_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 6s_2\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$

(b) 对两杆有  $M_1 = M_2 = \begin{bmatrix} 12 & & & & & \\ & 12 & & & & \\ & & 12 & & & \\ & & & 0.0125 & & \\ & & & & 1.0025 & \\ & & & & & 1.01 \end{bmatrix}$

$\xi_1 = \xi_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, g_{s1} = \begin{bmatrix} 1 & & 0.5 \\ & 1 & \\ & & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}, g_{s2} = \begin{bmatrix} 1 & & 1.5 \\ & 1 & \\ & & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

则  $J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, J_2 = \begin{bmatrix} s_2 & 0 \\ c_2 + 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, M = J_1^T M_1 J_1 + J_2^T M_2 J_2 =$

$\begin{bmatrix} 20.04 + 12c_2 & 4.01 + 6c_2 \\ 4.01 + 6c_2 & 4.01 \end{bmatrix},$  此时  $V = 0, L = T = \frac{1}{2}\dot{\theta}^T M \dot{\theta}$

求得  $\Gamma_{111} = 0, \Gamma_{112} = -6s_2, \Gamma_{121} = -6s_2, \Gamma_{122} = -6s_2, \Gamma_{211} = 6s_2, \Gamma_{212} = 0, \Gamma_{221} = 0, \Gamma_{222} = 0, C = \begin{bmatrix} -6s_2\dot{\theta}_2 & -6s_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 6s_2\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}$

$M\ddot{\theta} + C\dot{\theta} = \tau$ , 即

$$\begin{bmatrix} 20.04 + 12c_2 & 4.01 + 6c_2 \\ 4.01 + 6c_2 & 4.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6s_2\dot{\theta}_2 & -6s_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 6s_2\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

(c)(i) 计算力矩控制: 使用 Simulink 进行仿真, 总体结构如图 1, 主要由目标轨迹生成, 控制器 (图 2), 仿真机械臂 (图??) 以及结果输出部分组成。

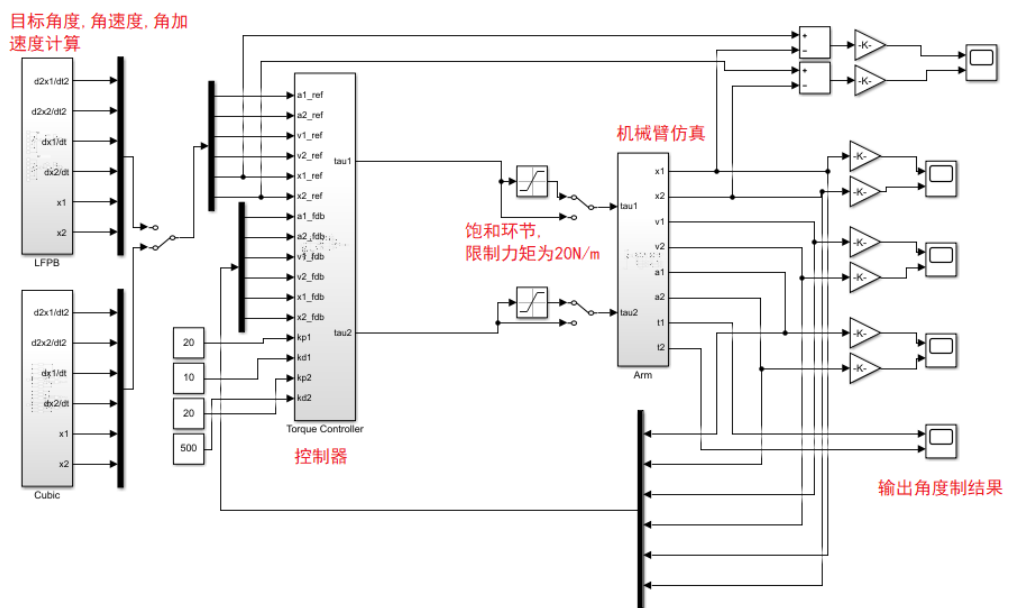


图 1: Simulink 仿真系统结构图

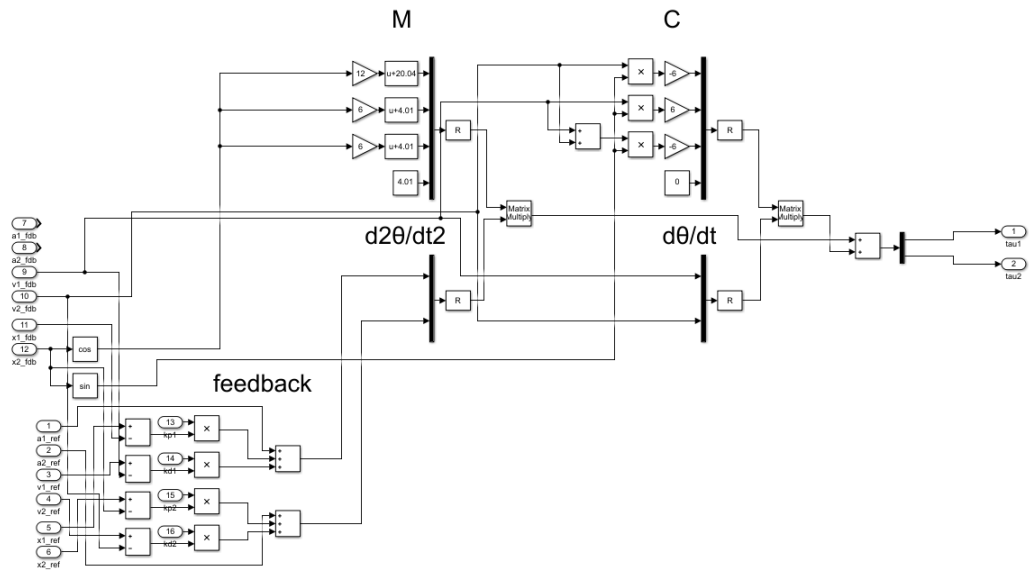


图 2: 使用拉格朗日方程进行力矩计算

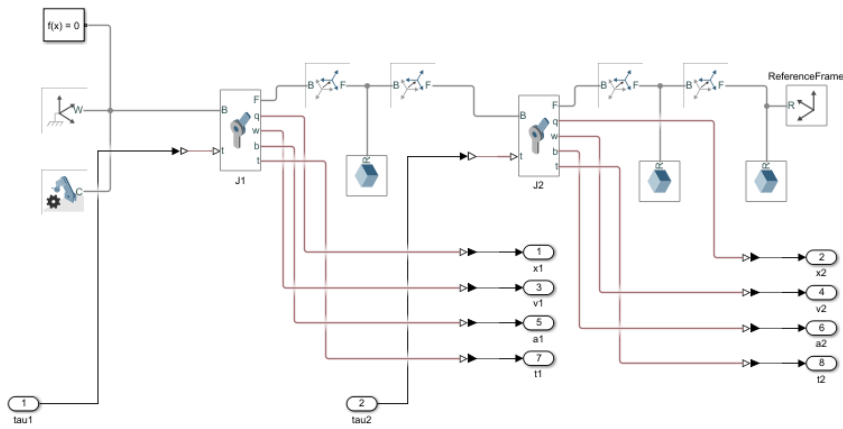


图 3: 仿真机械臂

对 HW5 中 LFPB 与三次轨迹, 由于直接使用开环计算力矩会使得期望输出力矩大于 20N/m, 因此引入状态反馈进行跟随。两轨迹均取  $K_{P1} = 20, K_{D1} = 10, K_{P2} = 20, K_{D2} = 1000$ 。对 LFPB 与三次轨迹, 图 4与图 5分别为机械臂实际角度, 角速度, 输出力矩与角度误差。

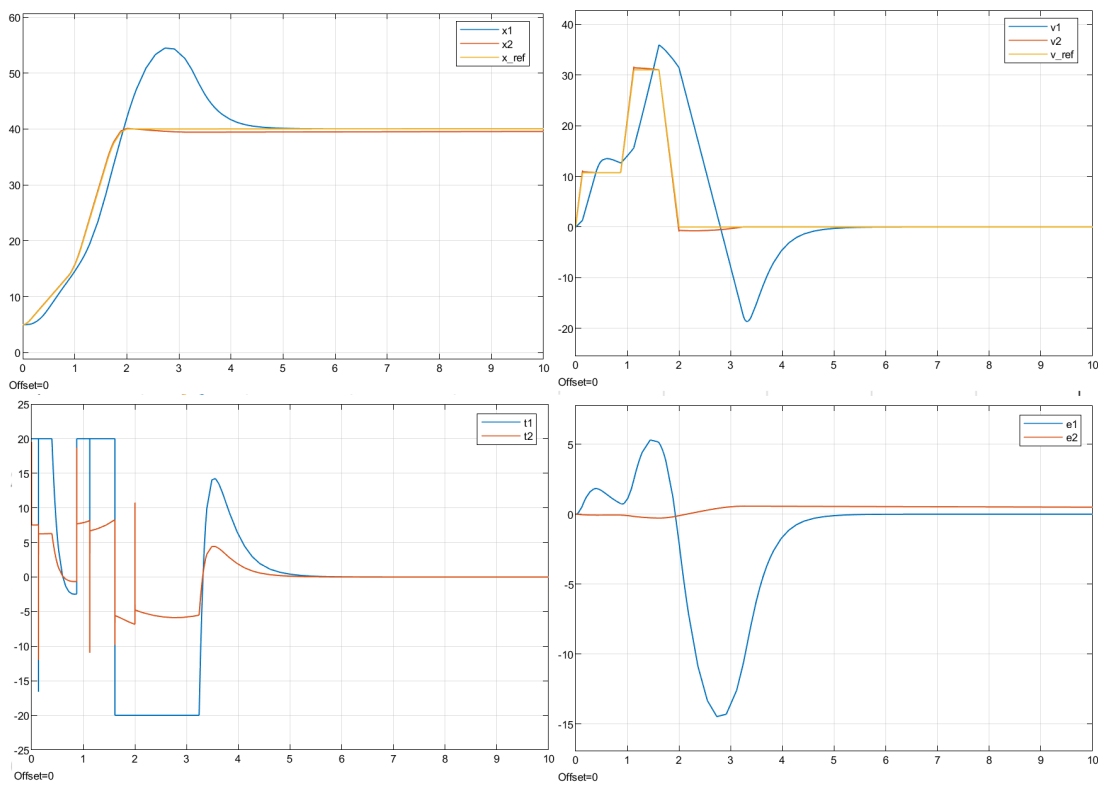


图 4: 计算力矩对 LFPB 的跟踪结果

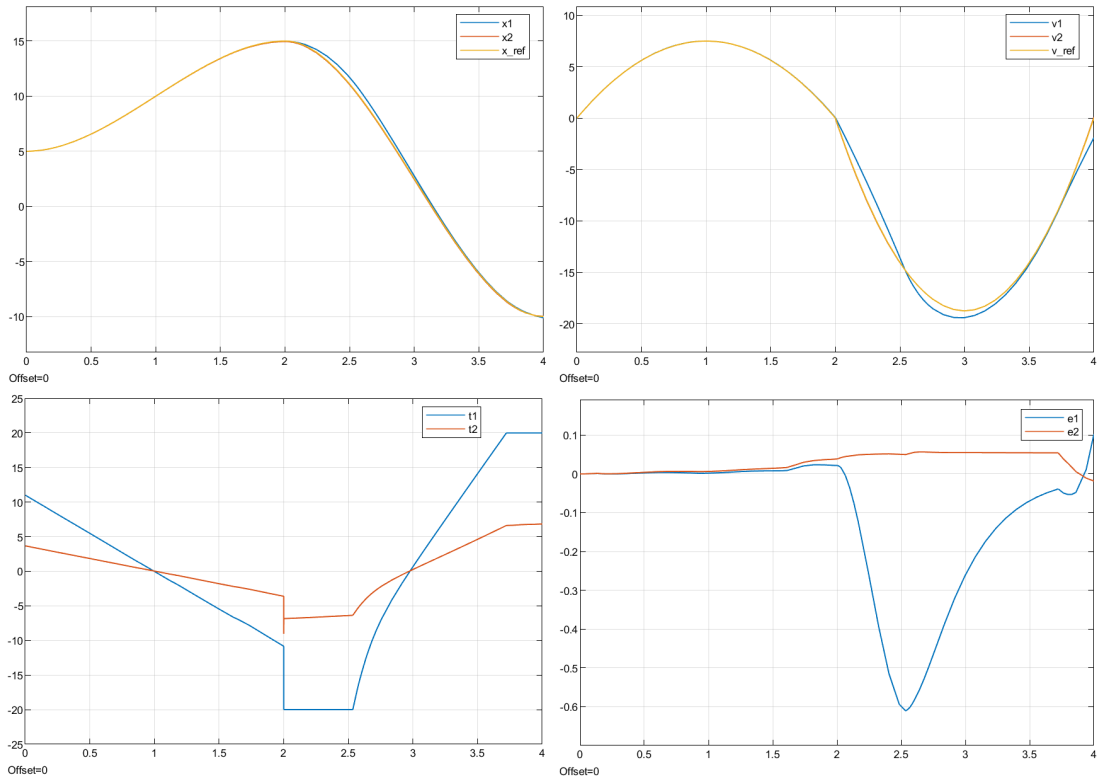


图 5: 计算力矩对三次轨迹的跟踪结果

(ii) PD 控制器图如图 6 所示。

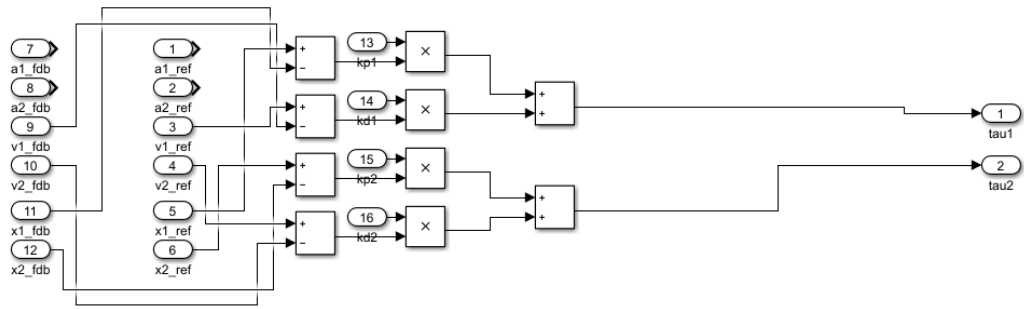


图 6: PD 控制器

图 7 与图 8 分别为 PD 控制器执行 LFPB 与三次轨迹的实际角度, 角速度, 输出力矩与角度误差。跟随 LFPB 时,  $K_{P1} = 1, K_{D1} = 40, K_{P2} = 20, K_{D2} = 1000$ ; 跟随三次轨迹时,  $K_{P1} = 50, K_{D1} = 1000, K_{P2} = 20, K_{D2} = 1000$ 。

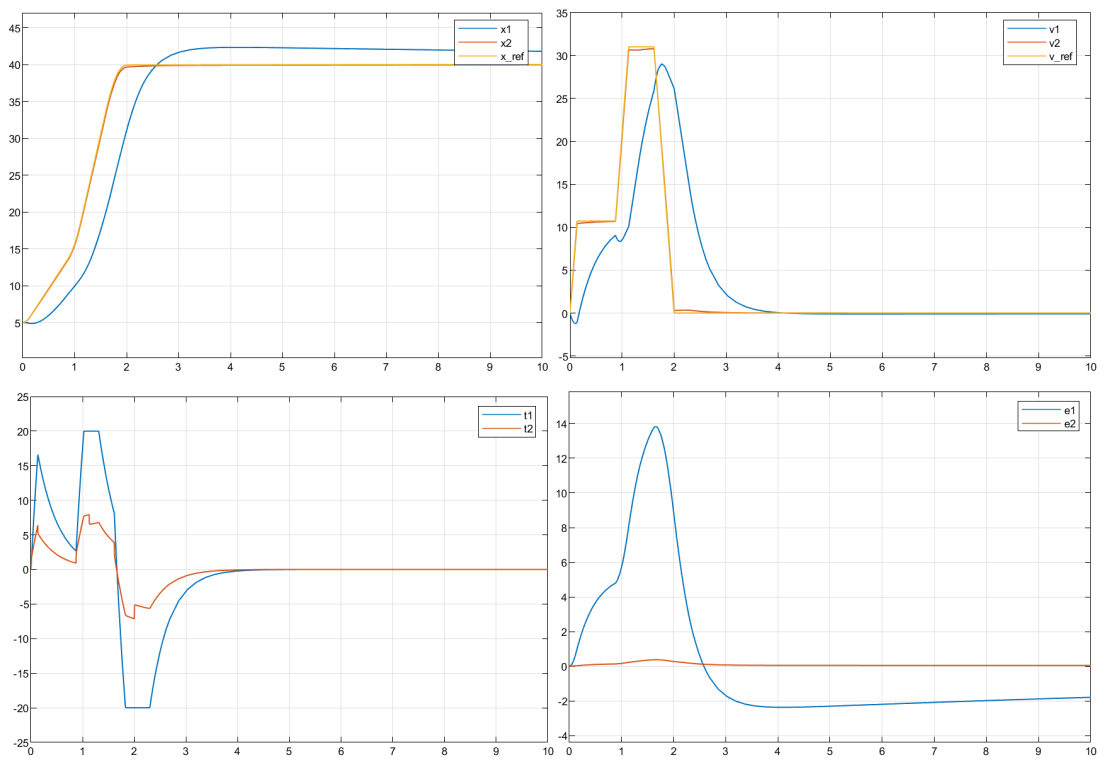


图 7: KP 控制对 LFPB 的跟踪结果

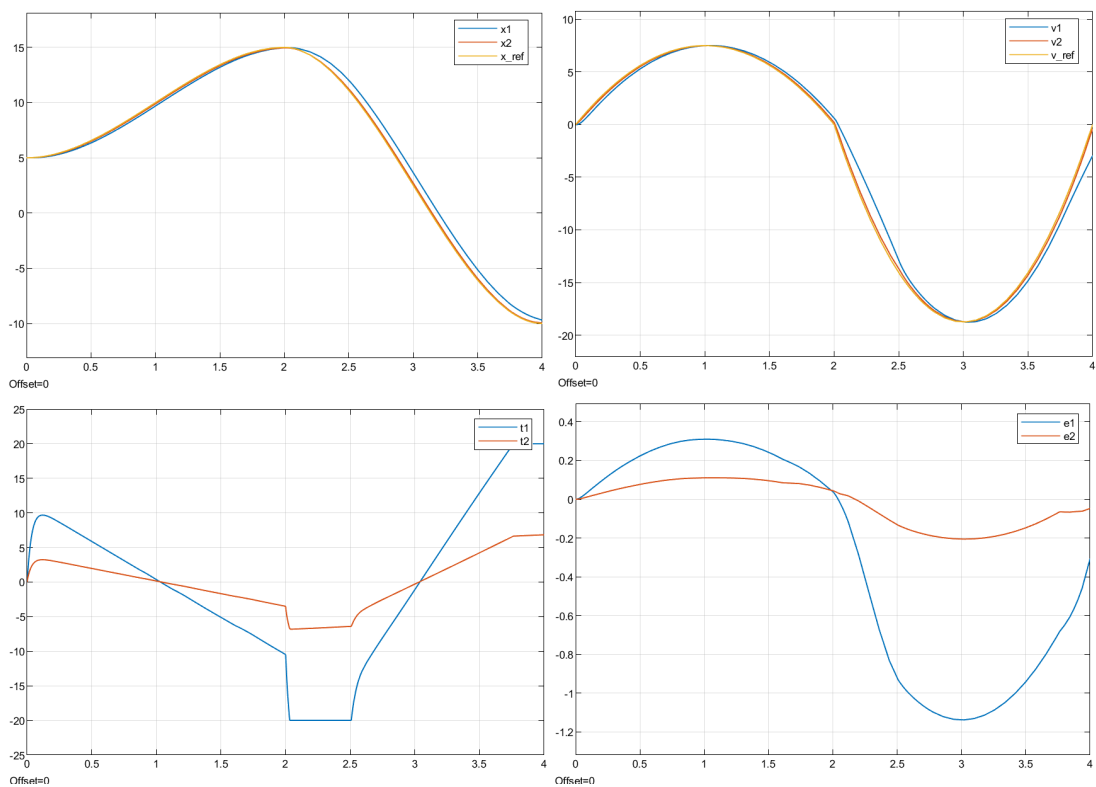


图 8: KP 控制对三次轨迹的跟踪结果

(iii) 放大 PD 控制器图如图 9所示。

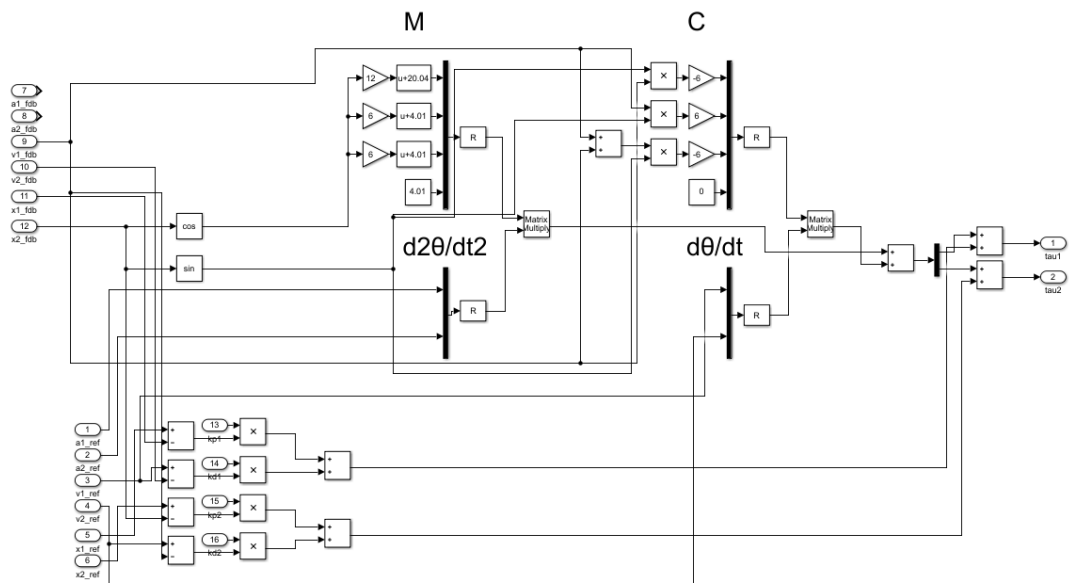


图 9: 放大 PD 控制器

图 10与图 11分别为放大 PD 控制器执行为 LFPB 与三次轨迹的实际角度, 角速度, 输出力矩与角度误差。其中,  $K_{P1} = 80, K_{D1} = 90, K_{P2} = 10, K_{D2} = 500$ ;



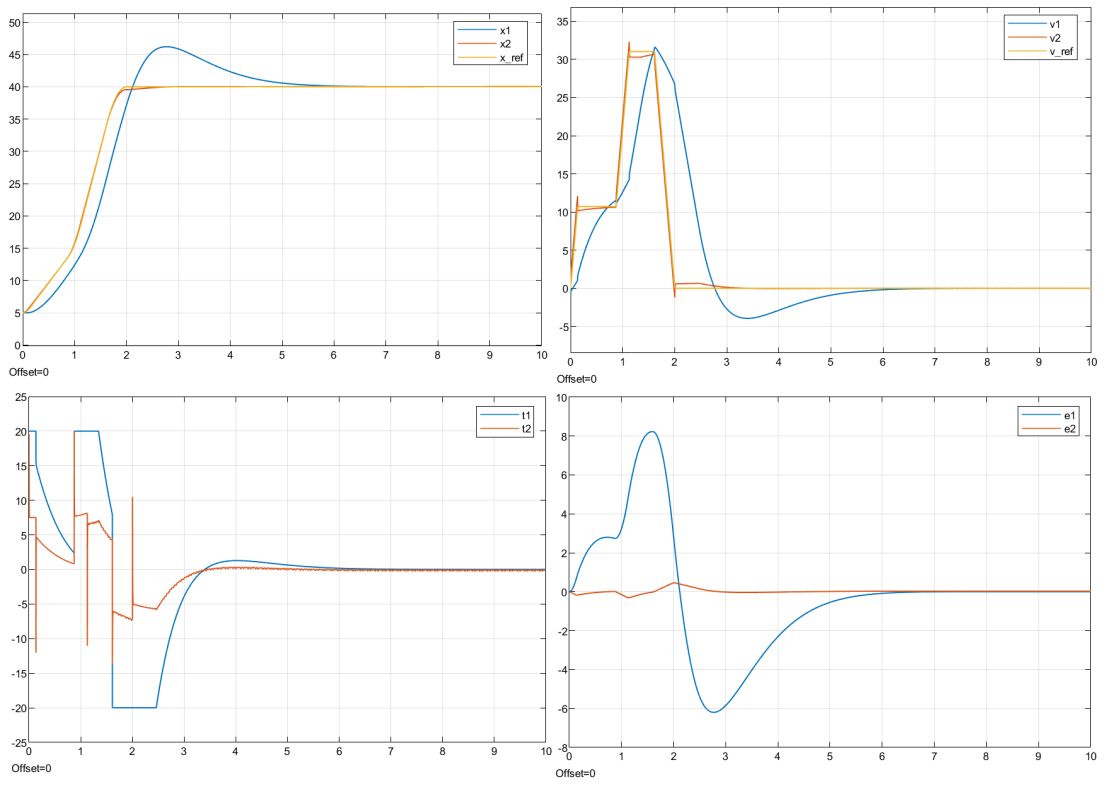


图 10: 放大 KP 控制对 LFPB 的跟踪结果

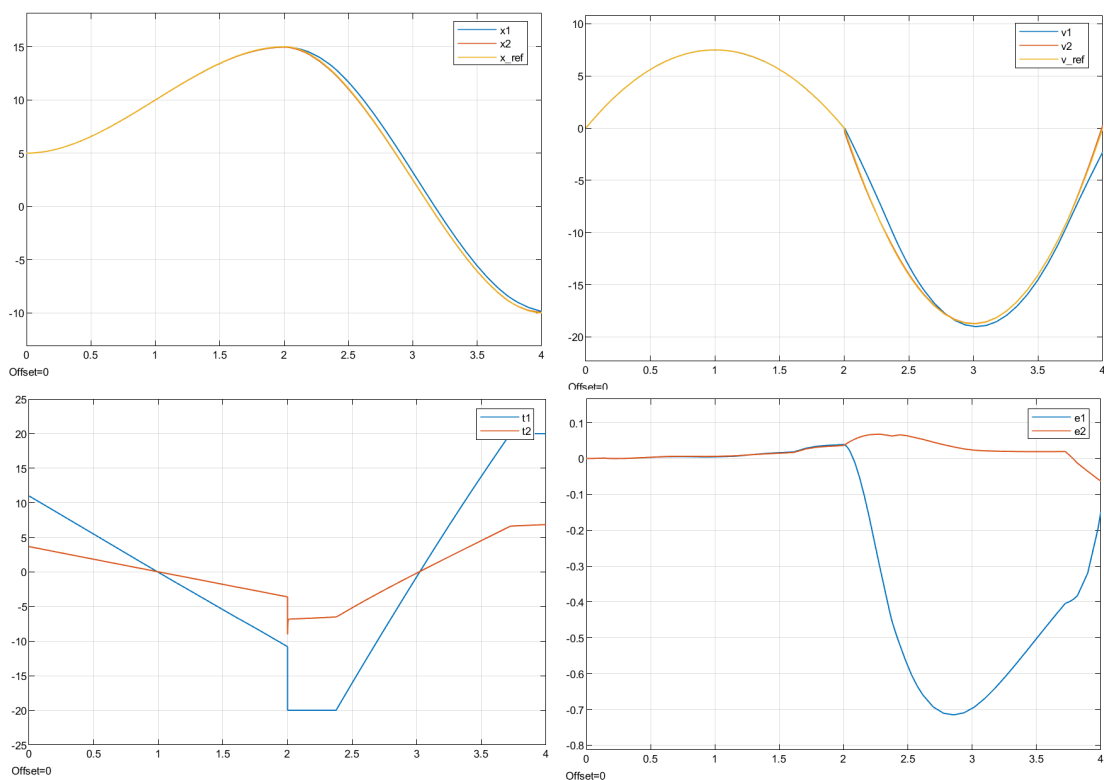


图 11: 放大 KP 控制对三次轨迹的跟踪结果

以跟随三次轨迹为例，增大  $K_{P1}$  时， $|e_1|_{max}$  逐渐减小，调节时间减小。但当  $K_{P1}$  大于一定值时， $e_1$  在  $t$  较小时会围绕 0 上下波动。若增大  $K_{D1}$ ， $\theta_1$  对预期轨迹的滞后将逐渐减小， $|e_1|_{max}$  在  $K_{D1}$  趋于无穷时接近 0.55。对  $K_{D2}$  与  $\theta_2$  有类似结论，但  $K_{D2}$  大于一定值时， $\theta_2$  的误差接近于 0，而  $K_{P2}$  在  $K_{D2} \neq 0$  时对  $\theta_2$  无明显影响。

对计算力矩、放大 PD 控制，也有类似的结论，控制效果：放大 PD > PD > 计算力矩。