2024.3.28

1、证明：$R\in SO(3)$，$v,w\in\mathbb{R}^3$.

(1) 先证 $R(v\times w)=(Rv)\times(Rw)$. 将 R、v、w 写为

$$R=\begin{bmatrix} x & y & z\end{bmatrix},\quad v=\begin{bmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\end{bmatrix},\quad w=\begin{bmatrix} w_1\\ w_2\\ w_3\end{bmatrix},$$

(x,y,z 均为列向量)

则待证等式左侧 $=R\begin{bmatrix} v_2w_3-v_3w_2\\ v_3w_1-v_1w_3\\ v_1w_2-v_2w_1\end{bmatrix}=(v_2w_3-v_3w_2)x+(v_3w_1-v_1w_3)y+(v_1w_2-v_2w_1)z$

待证等式右侧 $=(v_1x+v_2y+v_3z)\times(w_1x+w_2y+w_3z)$

$$\begin{aligned}&=v_1w_1\,\overset{=0}{x\times x}+v_1w_2\,\overset{=z}{x\times y}+v_1w_3\,\overset{=-y}{x\times z}\\&+v_2w_1\,\overset{=-z}{y\times x}+v_2w_2\,\overset{=0}{y\times y}+v_2w_3\,\overset{=x}{y\times z}\\&+v_3w_1\,\overset{=y}{z\times x}+v_3w_2\,\overset{=-x}{z\times y}+v_3w_3\,\overset{=0}{z\times z}\\&=(v_1w_2-v_2w_1)z+(v_2w_3-v_3w_2)x+(v_3w_1-v_1w_3)y\end{aligned}$$

左式中用到 $\begin{cases}x\times y=z\\ x\times z=-y\\ y\times z=x\end{cases}$

现择其一，给出证明如下：

因 $x^{T}(y\times z)=\det R=1$

且 $x^{T}x=1$ （$\langle,\rangle$ 表示内积）

$\Rightarrow\langle x,x-y\times z\rangle=0$

$\Rightarrow x=y\times z$.

则待证等式的左侧等于右侧，得证。

第（2）问证明改为如下：

再证 $R(w)^{\wedge}R^{\mathrm{T}}=(Rw)^{\wedge}$。考虑如下方程组

$$\left(R(w)^{\wedge}R^{\mathrm{T}}-(Rw)^{\wedge}\right)Rv=0\ \text{（其中 } v,w\in\mathbb{R}^3\text{）}\qquad(*)$$

对于所有 $v,w\in\mathbb{R}^3$，都有

$$R(w)^{\wedge}R^{\mathrm{T}}Rv-(Rw)^{\wedge}Rv=R(w)^{\wedge}v-(Rw)^{\wedge}Rv=R(w\times v)-(Rw)\times(Rv),$$

由（1）问结论得上式右侧等于 0，因此对于所有 $v,w\in\mathbb{R}^3$，$\left(R(w)^{\wedge}R^{\mathrm{T}}-(Rw)^{\wedge}\right)Rv=0$ 都成立。又由于 R 可逆，因此满足该方程的 Rv 构成的向量空间与全体 v 构成的向量空间相同，即 $\mathbb{R}^3$。其维数为 3，根据齐次线性方程组解空间的维数等于系数矩阵的列数减系数矩阵的秩，得 $\operatorname{rank}\left(R(w)^{\wedge}R^{\mathrm{T}}-(Rw)^{\wedge}\right)=3-3=0$，即 $R(w)^{\wedge}R^{\mathrm{T}}-(Rw)^{\wedge}=0$，从而 $R(w)^{\wedge}R^{\mathrm{T}}=(Rw)^{\wedge}$，得证。