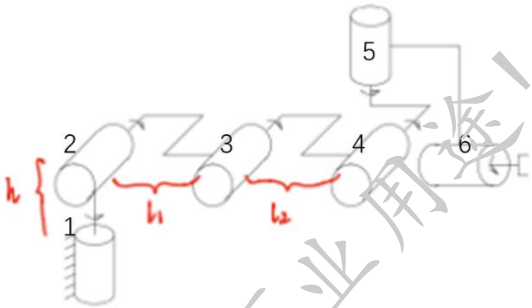
机器人学导论 作业 3 第 4、5 题（2024.5.22 更正，2024.7.4 上传版本）

第 4 题（正运动学）

建立坐标系均为右手系，垂直纸面向外为 x 轴，向右为 y 轴，竖直向上为 z 轴。

(a) 由指数积公式，$g = e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}e^{\xi_3\theta_3}e^{\xi_4\theta_4}e^{\xi_5\theta_5}e^{\xi_6\theta_6}g(0)$（这里将工具坐标系建在腕点上）



其中 $g(0)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&l_1+l_2\\0&0&1&h\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，

$$\xi_1=\begin{bmatrix}-\omega\times q\\ \omega\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}^T$$

$$\xi_2=\begin{bmatrix}-\omega_2\times q_2\\ \omega_2\end{bmatrix},\ \omega_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix},q_2=\begin{bmatrix}0\\0\\h\end{bmatrix}，因此\ \xi_2=\begin{bmatrix}0&-h&0&-1&0&0\end{bmatrix}^T$$

$$\xi_3=\begin{bmatrix}-\omega_3\times q_3\\ \omega_3\end{bmatrix},\ \omega_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix},q_3=\begin{bmatrix}0\\l_1\\h\end{bmatrix}，因此\ \xi_3=\begin{bmatrix}0&-h&l_1&-1&0&0\end{bmatrix}^T$$

$$\xi_4=\begin{bmatrix}-\omega_4\times q_4\\ \omega_4\end{bmatrix},\ \omega_4=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix},q_4=\begin{bmatrix}0\\l_1+l_2\\h\end{bmatrix}，因此\ \xi_4=\begin{bmatrix}0&-h&l_1+l_2&-1&0&0\end{bmatrix}^T$$

$$\xi_5=\begin{bmatrix}-\omega_5\times q_5\\ \omega_5\end{bmatrix},\ \omega_5=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},q_5=\begin{bmatrix}0\\l_1+l_2\\h\end{bmatrix}，因此\ \xi_5=\begin{bmatrix}l_1+l_2&0&0&0&0&1\end{bmatrix}^T$$

$$\xi_6=\begin{bmatrix}-\omega_6\times q_6\\ \omega_6\end{bmatrix},\ \omega_6=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},q_6=\begin{bmatrix}0\\l_1+l_2\\h\end{bmatrix}，因此\ \xi_6=\begin{bmatrix}-h&0&0&0&1&0\end{bmatrix}^T$$

计算出上述 $e^{\xi_1\theta_1},e^{\xi_2\theta_2},e^{\xi_3\theta_3},e^{\xi_4\theta_4},e^{\xi_5\theta_5},e^{\xi_6\theta_6}$，再代入指数积公式即可得解。计算过程很繁杂，用 MATLAB 实现如下：

主代码：(此处代码有更改)

```
syms theta1 theta2 theta3 theta4 theta5 theta6 l1 l2 h real
q1 = [0;0;0];
q2 = [0;0;h];
q3 = [0;l1;h];
q4 = [0;l1+l2;h];
q5 = [0;l1+l2;h];
q6 = [0;l1+l2;h];

w1 = [0;0;1];
w2 = [-1;0;0];
```

```
w3 = [-1;0;0];
w4 = [-1;0;0];
w5 = [0;0;1];
w6 = [0;1;0];

xi1 = [-cross(w1,q1); w1];
xi2 = [-cross(w2,q2); w2];
xi3 = [-cross(w3,q3); w3];
xi4 = [-cross(w4,q4); w4];
xi5 = [-cross(w5,q5); w5];
xi6 = [-cross(w6,q6); w6];
xi = [xi1 xi2 xi3 xi4 xi5 xi6];

theta = [theta1 theta2 theta3 theta4 theta5 theta6];

g_init = [1,0,0,0;
         0,1,0,l1+l2;
         0,0,1,h;
         0,0,0,1];

% forward
g_temp = Transformationsym(xi1,theta1) * Transformationsym(xi2,theta2) *
Transformationsym(xi3,theta3)...
    *Transformationsym(xi4,theta4) * Transformationsym(xi5,theta5) *
Transformationsym(xi6,theta6)* g_init;
g_st = simplify(g_temp, 'Steps', 100);
% this method helps to get more simplified form
disp(g_st)
```

这个函数中调用了 **Transformationsym** 函数，其定义为：

```
function g = Transformationsym(xi, theta)
    xi_wedge = mywedge(xi).*theta;
    exp_xi = expm(xi_wedge);
    g = simplify(exp_xi,'Criterion','preferReal', 'Steps', 30)
end
```

其中又调用了函数 mywedge，其定义为（兼有 6 维向量的 wedge 功能和 3 维向量的 hat 功能）

```
function b=mywedge(a)

if size(a) == [6,1]
    b = subs(zeros(4,4));

    b(1,2) = -a(6,1);
    b(1,3) = a(5,1);
    b(2,1) = a(6,1);
    b(2,3) = -a(4,1);
```

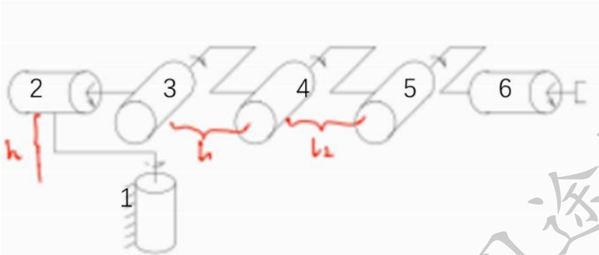
```
    b(3,1) = -a(5,1);
    b(3,2) = a(4,1);

    b(1,4) = a(1,1);
    b(2,4) = a(2,1);
    b(3,4) = a(3,1);
elseif size(a) == [3,1]
    b = subs(zeros(3,3));

    b(1,2) = -a(3,1);
    b(1,3) = a(2,1);
    b(2,1) = a(3,1);
    b(2,3) = -a(1,1);
    b(3,1) = -a(2,1);
    b(3,2) = a(1,1);
end
```

求解出的各矩阵是：（倒序输出）

```
[ cos(theta6), 0, sin(theta6),       -h*sin(theta6)]
[           0, 1,           0,                    0]
[-sin(theta6), 0, cos(theta6), -h*(cos(theta6) - 1)]
[           0, 0,           0,                    1]

[cos(theta5), -sin(theta5), 0,        sin(theta5)*(l1 + l2)]
[sin(theta5),  cos(theta5), 0, -(cos(theta5) - 1)*(l1 + l2)]
[          0,            0, 1,                            0]
[          0,            0, 0,                            1]

[1,            0,           0,                                          0]
[0,  cos(theta4), sin(theta4), - 2*l1*(cos(theta4)/2 - 1/2) - 2*l2*(cos(theta4)/2 - 1/2) - 
h*sin(theta4)]
[0, -sin(theta4), cos(theta4),              l1*sin(theta4) - 2*h*(cos(theta4)/2 - 1/2) + 
l2*sin(theta4)]
[0,            0,           0,                                         1]


[1,            0,           0,                                           0]
[0,  cos(theta3), sin(theta3), - 2*l1*(cos(theta3)/2 - 1/2) - h*sin(theta3)]
[0, -sin(theta3), cos(theta3),   l1*sin(theta3) - 2*h*(cos(theta3)/2 - 1/2)]
[0,            0,           0,                                           1]


[1,            0,           0,                    0]
[0,  cos(theta2), sin(theta2),       -h*sin(theta2)]
[0, -sin(theta2), cos(theta2), -h*(cos(theta2) - 1)]
[0,            0,           0,                    1]

[cos(theta1), -sin(theta1), 0, 0]
[sin(theta1),  cos(theta1), 0, 0]
[          0,            0, 1, 0]
[          0,            0, 0, 1]
```

最终结果非常长，此处略去。

(b) 由指数积公式，$g=e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}e^{\xi_3\theta_3}e^{\xi_4\theta_4}e^{\xi_5\theta_5}e^{\xi_6\theta_6}g(0)$ <u>（这里将工具坐标系建在 5、6 轴交点上）</u>



其中 $g(0)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&l_1+l_2\\0&0&1&h\\0&0&0&1\end{bmatrix}$,

$\xi_1=\begin{bmatrix}-\omega_1\times q_1\\ \omega_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}^T$（与 a 的第①个关节相同）

$\xi_2=\begin{bmatrix}-\omega_2\times q_2\\ \omega_2\end{bmatrix}$，$\omega_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},q_2=\begin{bmatrix}0\\0\\h\end{bmatrix}$，因此 $\xi_2=\begin{bmatrix}-h&0&0&0&1&0\end{bmatrix}^T$（与 a 的第⑥个关节形式相同，后续求指数时代入的角度不同）

$\xi_3=\begin{bmatrix}-\omega_3\times q_3\\ \omega_3\end{bmatrix}$，$\omega_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix},q_3=\begin{bmatrix}0\\0\\h\end{bmatrix}$，因此 $\xi_3=\begin{bmatrix}0&-h&0&-1&0&0\end{bmatrix}^T$（与 a 的第②个关节相同）

$\xi_4=\begin{bmatrix}-\omega_4\times q_4\\ \omega_4\end{bmatrix}$，$\omega_4=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix},q_4=\begin{bmatrix}0\\l_1\\h\end{bmatrix}$，因此 $\xi_4=\begin{bmatrix}0&-h&l_1&-1&0&0\end{bmatrix}^T$（与 a 的第③个关节相同）

$\xi_5=\begin{bmatrix}-\omega_5\times q_5\\ \omega_5\end{bmatrix}$，$\omega_5=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix},q_5=\begin{bmatrix}0\\l_1+l_2\\h\end{bmatrix}$，因此 $\xi_5=\begin{bmatrix}0&-h&l_1+l_2&-1&0&0\end{bmatrix}^T$（与 a 的第④个关节相同）

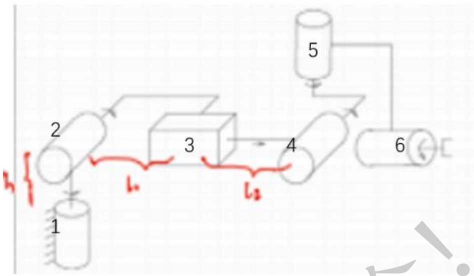
$\xi_6=\begin{bmatrix}-\omega_6\times q_6\\ \omega_6\end{bmatrix}$，$\omega_6=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},q_6=\begin{bmatrix}0\\l_1+l_2\\h\end{bmatrix}$，因此 $\xi_6=\begin{bmatrix}-h&0&0&0&1&0\end{bmatrix}^T$（与 a 的第⑥个关节相同）

计算出的各 $e^{\xi_1\theta_1},e^{\xi_2\theta_2},e^{\xi_3\theta_3},e^{\xi_4\theta_4},e^{\xi_5\theta_5},e^{\xi_6\theta_6}$ 除了 $e^{\xi_2\theta_2}$ 与上一题不同以外，其余矩阵除顺序有所不同外，没有别的差异。MATLAB 实现类似上一题。

$e^{\xi_2\theta_2}$ 的新结果：

```
[ cos(theta2), 0, sin(theta2),     -h*sin(theta2)]
[           0, 1,           0,                  0]
[-sin(theta2), 0, cos(theta2), -h*(cos(theta2) - 1)]
[           0, 0,           0,                  1]
```

(c) 由指数积公式，$g=e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}e^{\xi_3\theta_3}e^{\xi_4\theta_4}e^{\xi_5\theta_5}e^{\xi_6\theta_6}g(0)$ （这里将工具坐标系建在腕点上），其中 $g(0)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&l_1+l_2\\0&0&1&h\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，



$\xi_1=\begin{bmatrix}-\omega_1\times q_1\\\omega_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}^T$（与 a 的第①个关节相同）

$\xi_2=\begin{bmatrix}-\omega_2\times q_2\\\omega_2\end{bmatrix}$， $\omega_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix},q_2=\begin{bmatrix}0\\0\\h\end{bmatrix}$，因此 $\xi_2=\begin{bmatrix}0&-h&0&-1&0&0\end{bmatrix}^T$（与 a 中第②关节相同）

$\xi_3=\begin{bmatrix}v\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0\end{bmatrix}^T$（平移关节）

$\xi_4=\begin{bmatrix}-\omega_4\times q_4\\\omega_4\end{bmatrix}$， $\omega_4=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix},q_4=\begin{bmatrix}0\\l_1+l_2\\h\end{bmatrix}$，因此 $\xi_4=\begin{bmatrix}0&-h&l_1+l_2&-1&0&0\end{bmatrix}^T$（与 a 的第④个关节相同）

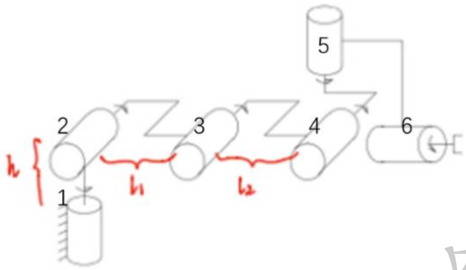
$\xi_5=\begin{bmatrix}-\omega_5\times q_5\\\omega_5\end{bmatrix}$， $\omega_5=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},q_5=\begin{bmatrix}0\\l_1+l_2\\0\end{bmatrix}$，因此 $\xi_5=\begin{bmatrix}l_1+l_2&0&0&0&0&1\end{bmatrix}^T$（与 a 的第⑤个关节相同）

$\xi_6=\begin{bmatrix}-\omega_6\times q_6\\\omega_6\end{bmatrix}$， $\omega_6=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},q_6=\begin{bmatrix}0\\0\\h\end{bmatrix}$，因此 $\xi_6=\begin{bmatrix}-h&0&0&0&1&0\end{bmatrix}^T$（与 a 的第⑥个关节相同）

计算出的各 $e^{\xi_1\theta_1},e^{\xi_2\theta_2},e^{\xi_3\theta_3},e^{\xi_4\theta_4},e^{\xi_5\theta_5},e^{\xi_6\theta_6}$ 除了 $e^{\xi_3\theta_3}$ 与(a)不同以外，其余矩阵除顺序有所不同外，没有别的差异。MATLAB 实现类似上一题。

新的 $e^{\xi_3\theta_3}$： $e^{\xi_3\theta_3}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&\theta_3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

第 5 题（逆运动学）



(a) 建立坐标系均为右手系，垂直纸面向外为 x 轴，向右为 y 轴，竖直向上为 z 轴。

(i) Elbow manipulator: 由指数积公式，

$g_{st}(\theta)=e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}e^{\xi_3\theta_3}e^{\xi_4\theta_4}e^{\xi_5\theta_5}e^{\xi_6\theta_6}g_{st}(0)$ <u>（这里将工具坐标系建在腕点上）</u>。设 $e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}e^{\xi_3\theta_3}e^{\xi_4\theta_4}e^{\xi_5\theta_5}e^{\xi_6\theta_6}=g_{st}(\theta)g^{-1}(0):=g_d$

第一步：设 4、5、6 轴交点为 p_w，则 $e^{\xi_4\theta_4}e^{\xi_5\theta_5}e^{\xi_6\theta_6}p_w=p_w$，代入上式得 $e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}e^{\xi_3\theta_3}p_w=g_dp_w$

再取 1、2 轴交点 q_w，可知 $e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}q_w=q_w$，

因此 $e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}e^{\xi_3\theta_3}p_w-q_w=e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}(e^{\xi_3\theta_3}p_w-q_w)=g_dp_w-q_w$，两边取模，得

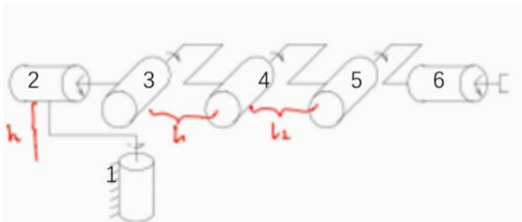
$\left\|e^{\xi_3\theta_3}p_w-q_w\right\|=\left\|g_dp_w-q_w\right\|:=\delta$，利用子问题 3 可以求解 θ_3。

第二步：然后代回 $e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}e^{\xi_3\theta_3}p_w=g_dp_w$，可得 $e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}(e^{\xi_3\theta_3}p_w):=e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}p_{w2}=g_dp_w$，利用子问题 2 可以求解 θ_1,θ_2。

第三步：现在假定 $e^{\xi_4\theta_4}e^{\xi_5\theta_5}e^{\xi_6\theta_6}=(e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}e^{\xi_3\theta_3})^{-1}g_{st}(\theta)g^{-1}(0):=g_{d2}$，将其作用于 6 轴上一点 p_{w3}（但不在 4、5 轴上），即得 $e^{\xi_4\theta_4}e^{\xi_5\theta_5}p_{w3}=g_{d2}p_{w3}$，利用子问题 2 可以求解 θ_4,θ_5。

第四步：于是 $e^{\xi_6\theta_6}=(e^{\xi_4\theta_4}e^{\xi_5\theta_5})^{-1}(e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}e^{\xi_3\theta_3})^{-1}g_{st}(\theta)g^{-1}(0):=g_{d3}$，将其作用于 6 轴外一点 p_{w4}，即得 $e^{\xi_6\theta_6}p_{w4}=g_{d3}p_{w4}$，利用子问题 1 可以求解 θ_6。

(ii) Inverse Elbow manipulator: 由指数积公式，



$g_{st}(\theta)=e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}e^{\xi_3\theta_3}e^{\xi_4\theta_4}e^{\xi_5\theta_5}e^{\xi_6\theta_6}g_{st}(0)$ <u>（这里将工具坐标系建在 5、6 轴交点上）</u>。$e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}e^{\xi_3\theta_3}e^{\xi_4\theta_4}e^{\xi_5\theta_5}e^{\xi_6\theta_6}=g_{st}(\theta)g^{-1}(0):=g_d$

第一步：取 5、6 轴交点 p_w，可知 $e^{\xi_5\theta_5}e^{\xi_6\theta_6}p_w=p_w$，因此

$e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}e^{\xi_3\theta_3}e^{\xi_4\theta_4}e^{\xi_5\theta_5}e^{\xi_6\theta_6}p_w=e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}e^{\xi_3\theta_3}e^{\xi_4\theta_4}p_w=g_dp_w$，再设 1、2、3 轴交点为 p_b，则

$e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}e^{\xi_3\theta_3}p_b=p_b$，代入上式 $e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}e^{\xi_3\theta_3}(e^{\xi_4\theta_4}p_w-p_b)=g_dp_w-p_b$，

两边取模，得 $\left\|e^{\xi_4\theta_4}p_w-p_b\right\|=\left\|g_dp_w-p_b\right\|:=\delta$，利用子问题 3 可以求解 θ_4。

第二步：由 $e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}e^{\xi_3\theta_3}e^{\xi_4\theta_4}e^{\xi_5\theta_5}e^{\xi_6\theta_6}p_b-p_b=g_dp_b-p_b$，而且 p_b 也在 6 轴轴线上，得 $e^{\xi_6\theta_6}p_b=p_b$

因此 $e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}e^{\xi_3\theta_3}e^{\xi_4\theta_4}\left[e^{\xi_5\theta_5}p_b-(e^{\xi_4\theta_4})^{-1}p_b\right]=g_dp_b-p_b$。两边取模，得

$\left\|e^{\xi_5\theta_5}p_b-(e^{\xi_4\theta_4})^{-1}p_b\right\|=\left\|g_dp_b-p_b\right\|:=\delta$，利用子问题 3 可以求解 θ_5。

第三步：取不在 6 轴上的任一点，可写出 $e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}e^{\xi_3\theta_3}e^{\xi_4\theta_4}e^{\xi_5\theta_5}e^{\xi_6\theta_6}p_{w2}-p_b=g_dp_{w2}-p_b$

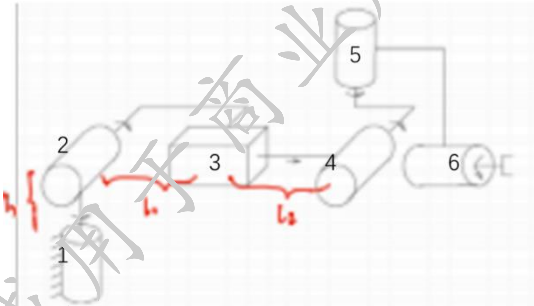
由于 $p_b=e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}e^{\xi_3\theta_3}p_b=e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}e^{\xi_3\theta_3}e^{\xi_4\theta_4}e^{\xi_5\theta_5}(e^{\xi_4\theta_4}e^{\xi_5\theta_5})^{-1}p_b$

所以上式变为$e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}e^{\xi_3\theta_3}e^{\xi_4\theta_4}e^{\xi_5\theta_5}\left[e^{\xi_6\theta_6}p_{w2}-(e^{\xi_4\theta_4}e^{\xi_5\theta_5})^{-1}p_b\right]=g_d p_{w2}-p_b$

两边取模，得$\left\|e^{\xi_6\theta_6}p_{w2}-(e^{\xi_4\theta_4}e^{\xi_5\theta_5})^{-1}p_b\right\|=\left\|g_d p_{w2}-p_b\right\|:=\delta$，利用子问题 3 可以求解$\theta_6$。

第四步：现在假定$e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}e^{\xi_3\theta_3}=g_{st}(\theta)g^{-1}(0)(e^{\xi_4\theta_4}e^{\xi_5\theta_5}e^{\xi_6\theta_6})^{-1}:=g_{d2}$，将其作用于 3 轴上一点 p_{w3}（但不与 1、2 轴相交），即得$e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}p_{w3}=g_{d2}p_{w3}$，利用子问题 2 可以求解$\theta_1,\theta_2$。

第五步：现在假定$e^{\xi_3\theta_3}=(e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2})^{-1}g_{st}(\theta)g^{-1}(0)(e^{\xi_4\theta_4}e^{\xi_5\theta_5}e^{\xi_6\theta_6})^{-1}:=g_{d3}$，将其作用于 3 轴外一点，利用子问题 1 可求得θ_3。



(iii) Stanford Arm: 由指数积公式，

$g_{st}(\theta)=e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}e^{\xi_3\theta_3}e^{\xi_4\theta_4}e^{\xi_5\theta_5}e^{\xi_6\theta_6}g(0)$（这里将工具坐标系建在腕点上），设$e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}e^{\xi_3\theta_3}e^{\xi_4\theta_4}e^{\xi_5\theta_5}e^{\xi_6\theta_6}=g_{st}(\theta)g^{-1}(0):=g_d$

第一步：取 4、5、6 轴交点 q_w，可知$e^{\xi_4\theta_4}e^{\xi_5\theta_5}e^{\xi_6\theta_6}q_w=q_w$，因此

$e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}e^{\xi_3\theta_3}e^{\xi_4\theta_4}e^{\xi_5\theta_5}e^{\xi_6\theta_6}q_w=e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}e^{\xi_3\theta_3}q_w=g_d q_w:=q_1$，

由$e^{\xi_2\theta_2}e^{\xi_3\theta_3}q_w=e^{-\xi_1\theta_1}g_d q_w:=q=e^{-\xi_1\theta_1}q_1$，又知$e^{\xi_2\theta_2}e^{\xi_3\theta_3}q_w$必在 yCz 平面内运动，所以

$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T q=0$，则$q_{1x}\cos\theta_1+q_{1y}\sin\theta_1=0$，因此$\theta_1=\operatorname{atan}2\left(-\dfrac{q_{1x}}{q_{1y}}\right)$。

第二步：取 1、2 轴交点 p_b，则$e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}p_b=p_b$。结合$e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}e^{\xi_3\theta_3}q_w=g_d q_w$，可知

$e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}(e^{\xi_3\theta_3}q_w-p_b)=g_d q_w-p_b$，两边取模，有$\left\|e^{\xi_3\theta_3}q_w-p_b\right\|=\left\|g_d q_w-p_b\right\|:=\delta$

而$\left\|e^{\xi_3\theta_3}q_w-p_b\right\|=\left\|q_{wx}-p_{bx}\quad q_{wy}+\theta_3-p_{by}\quad q_{wz}-p_{bz}\right\|$，直接求解一元二次方程即可。

第三步：令$e^{\xi_3\theta_3}q_w:=q_2$。则$e^{\xi_2\theta_2}q_2=(e^{\xi_1\theta_1})^{-1}g_d q_w$，利用子问题 1 可求出$\theta_2$。

后续解法，和(a)图机器人相同：

第四步：假定$e^{\xi_4\theta_4}e^{\xi_5\theta_5}e^{\xi_6\theta_6}=(e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}e^{\xi_3\theta_3})^{-1}g_{st}(\theta)g^{-1}(0):=g_{d2}$，将其作用于 6 轴上一点 p_{w2}（但不在 4、5 轴上），即得$e^{\xi_4\theta_4}e^{\xi_5\theta_5}p_{w2}=g_{d2}p_{w2}$，利用子问题 2 可以求解$\theta_4,\theta_5$；

第五步：于是$e^{\xi_6\theta_6}=(e^{\xi_4\theta_4}e^{\xi_5\theta_5})^{-1}(e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}e^{\xi_3\theta_3})^{-1}g_{st}(\theta)g^{-1}(0):=g_{d3}$，将其作用于 6 轴外一点 p_{w3}，即得$e^{\xi_6\theta_6}p_{w4}=g_{d3}p_{w4}$，利用子问题 1 可以求解$\theta_6$。

原求解代码有些小错，日后更新。