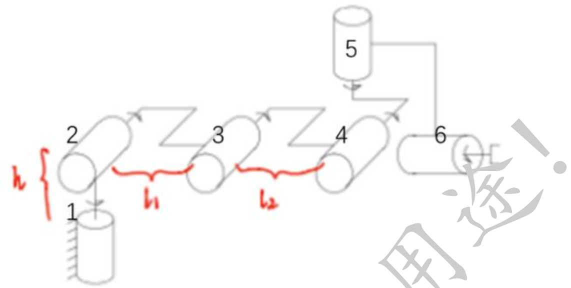
机器人学导论 作业 4

210320621 吴俊达 复习后补于 2024.5.14

第 1 题



(a) **(i) Elbow manipulator：** $\omega_1=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$，

$q_2'=q_1=\begin{bmatrix}0 & 0 & h\end{bmatrix}^T$，故 $-\omega_1\times q_1=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$。

$\omega_2'=e^{\hat{z}\theta_1}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-\cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0\end{bmatrix}^T$，

$\omega_4'=\omega_3'=\omega_2'=\begin{bmatrix}-\cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0\end{bmatrix}^T$；

$q_3'=\begin{bmatrix}0 & 0 & h\end{bmatrix}^T+e^{\hat{z}\theta_1}e^{-\hat{x}\theta_2}\begin{bmatrix}0 & l_1 & 0\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-l_1s_1c_2 & l_1c_1c_2 & h-l_1s_2\end{bmatrix}^T$；

$q_4'=q_3'+e^{\hat{z}\theta_1}e^{-\hat{x}\theta_2}e^{-\hat{x}\theta_3}\begin{bmatrix}0 & l_2 & 0\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-l_2c_{23}s_1-l_1c_2s_1 & l_2c_{23}c_1+l_1c_1c_2 & h-l_2s_{23}-l_1s_2\end{bmatrix}^T$，此为 4、5、6 轴之交点，故 $-\omega_5'\times q_4'$ 即等于 $-\omega_5'\times q_5'$，$-\omega_6'\times q_4'$ 亦即等于 $-\omega_6'\times q_6'$；

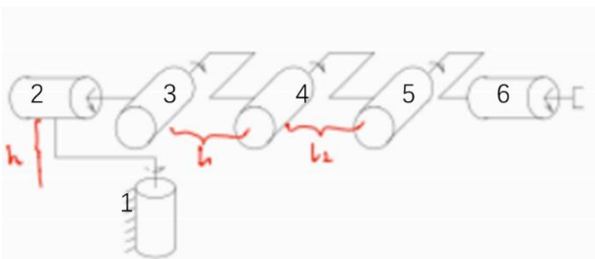
$\omega_5'=e^{\hat{z}\theta_1}e^{-\hat{x}\theta_2}e^{-\hat{x}\theta_3}e^{-\hat{x}\theta_4}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-s_{234}s_1 & s_{234}c_1 & c_{234}\end{bmatrix}^T$；

$\omega_6'=e^{\hat{z}\theta_1}e^{-\hat{x}\theta_2}e^{-\hat{x}\theta_3}e^{-\hat{x}\theta_4}e^{\hat{z}\theta_5}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-c_{234}c_5s_1-c_1s_5 & c_{234}c_1c_5-s_1s_5 & -s_{234}c_5\end{bmatrix}^T$。

综合上述各式，$J_{st}^s(\theta)=\begin{bmatrix}0 & -\omega_2'\times q_1 & -\omega_2'\times q_3' & -\omega_2'\times q_4' & -\omega_5'\times q_4' & -\omega_6'\times q_4' \\ \omega_1 & \omega_2' & \omega_2' & \omega_2' & \omega_5' & \omega_6'\end{bmatrix}_{6\times6}$

由 HW3，我们已解得前向运动学映射：$g_{st}(\theta)=e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}e^{\xi_3\theta_3}e^{\xi_4\theta_4}e^{\xi_5\theta_5}e^{\xi_6\theta_6}g(0)\triangleq\begin{bmatrix}R & p \\ 0 & 1\end{bmatrix}$，利用此前向运动学映射，并结合$Ad_{g_{st}}^{-1}=\begin{bmatrix}R^T & -R^T\hat{p} \\ 0 & R^T\end{bmatrix}$，可得$J_{st}^b=Ad_{g_{st}}^{-1}J_{st}^s$。

(ii) Inverse elbow manipulator： $\omega_1=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$，



$q_3'=q_2'=q_1=\begin{bmatrix}0 & 0 & h\end{bmatrix}^T$（前三轴交于一点），

故 $-\omega_1\times q_1=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$；

$\omega_2'=e^{\hat{z}\theta_1}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0\end{bmatrix}^T$；

$\omega_3'=\omega_4'=\omega_5'=e^{\hat{z}\theta_1}e^{\hat{y}\theta_2}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-\cos\theta_1\cos\theta_2 & -\sin\theta_1\cos\theta_2 & \sin\theta_2\end{bmatrix}^T$；

$q_4'=q_3'+e^{\hat{z}\theta_1}e^{\hat{y}\theta_2}e^{-\hat{x}\theta_3}\begin{bmatrix}0 & l_1 & 0\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-l_1c_3s_1-l_1c_1s_2s_3 & l_1c_3c_1-l_1s_1s_2s_3 & h-l_1c_2s_3\end{bmatrix}^T$；

$q_6'=q_5'=q_4'+e^{\hat{z}\theta_1}e^{\hat{y}\theta_2}e^{-\hat{x}\theta_3}e^{-\hat{x}\theta_4}\begin{bmatrix}0 & l_2 & 0\end{bmatrix}^T$

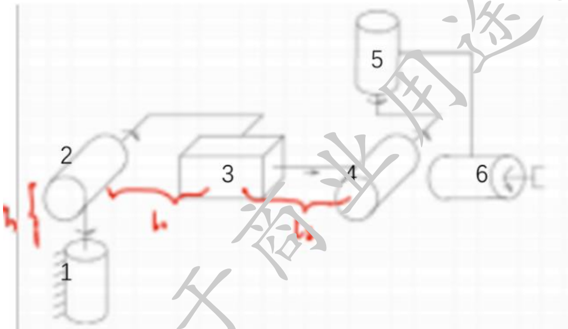
$=\begin{bmatrix}-l_1c_3s_1-l_1c_1s_2s_3-l_2c_{34}s_1-l_2s_{34}c_1s_2 & l_1c_3c_1-l_1s_1s_2s_3+l_2c_{34}c_1-l_2s_{34}s_1s_2 & h-l_1c_2s_3-l_2s_{34}c_2\end{bmatrix}^T$；

$\omega_6'=e^{\hat{z}\theta_1}e^{\hat{y}\theta_2}e^{-\hat{x}\theta_3}e^{-\hat{x}\theta_4}e^{-\hat{x}\theta_5}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T=e^{\hat{z}\theta_1}e^{\hat{y}\theta_2}e^{-\hat{x}(\theta_3+\theta_4+\theta_5)}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$

$=\begin{bmatrix}-c_{345}s_1-s_{345}c_1s_2 & c_{345}c_1-s_{345}s_1s_2 & -s_{345}c_2\end{bmatrix}^T$；

综合上述各式得 $J_{st}^{s}(\theta)=\begin{bmatrix}0 & -\omega_2'\times q_1 & -\omega_3'\times q_1 & -\omega_3'\times q_4' & -\omega_3'\times q_5' & -\omega_6'\times q_5' \\ \omega_1 & \omega_2' & \omega_3' & \omega_3' & \omega_3' & \omega_6'\end{bmatrix}_{6\times6}$

同样利用 HW3 中解得的前向运动学映射：$g_{st}(\theta)=e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}e^{\xi_3\theta_3}e^{\xi_4\theta_4}e^{\xi_5\theta_5}e^{\xi_6\theta_6}g(0)\triangleq\begin{bmatrix}R & p\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，并结合 $Ad_{g_{st}}^{-1}=\begin{bmatrix}R^T & -R^T\hat{p}\\ 0 & R^T\end{bmatrix}$，可得$J_{st}^{b}=Ad_{g_{st}}^{-1}J_{st}^{s}$。



(iii) **Stanford manipulator**：$\omega_1=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$，

$q_2'=q_1=\begin{bmatrix}0 & 0 & h\end{bmatrix}^T$，故 $-\omega_1\times q_1=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$；

$v_3=e^{\hat{z}\theta_1}e^{-\hat{x}\theta_2}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-s_1c_2 & c_1c_2 & -s_2\end{bmatrix}^T$；

$\omega_4'=\omega_2'=e^{\hat{z}\theta_1}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-\cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0\end{bmatrix}^T$，

$\omega_5'=e^{\hat{z}\theta_1}e^{-\hat{x}\theta_2}e^{-\hat{x}\theta_4}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-s_{24}s_1 & s_{24}c_1 & c_{24}\end{bmatrix}^T$

$\omega_6'=e^{\hat{z}\theta_1}e^{-\hat{x}\theta_2}e^{-\hat{x}\theta_4}e^{\hat{z}\theta_5}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-c_{24}c_5s_1-c_1s_5 & c_{24}c_1c_5-s_1s_5 & -s_{24}c_5\end{bmatrix}^T$；

$q_4'=\begin{bmatrix}0 & 0 & h\end{bmatrix}^T+e^{\hat{z}\theta_1}e^{-\hat{x}\theta_2}\begin{bmatrix}0 & l_1+\theta_3 & 0\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-(l_1+\theta_3)s_1c_2 & (l_1+\theta_3)c_1c_2 & -(l_1+\theta_3)s_2+h\end{bmatrix}^T$，此为 4、5、6 轴之交点，故 $-\omega_5'\times q_4'$ 即等于 $-\omega_5'\times q_5'$，$-\omega_6'\times q_4'$ 亦即等于 $-\omega_6'\times q_6'$。

结合上述各式得 $J_{st}^{s}(\theta)=\begin{bmatrix}0 & -\omega_2'\times q_1 & v_3 & -\omega_2'\times q_4' & -\omega_5'\times q_4' & -\omega_6'\times q_4' \\ \omega_1 & \omega_2' & 0_{1\times3} & \omega_2' & \omega_5' & \omega_6'\end{bmatrix}_{6\times6}$

同样利用 HW3 中解得的前向运动学映射：$g_{st}(\theta)=e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}e^{\xi_3\theta_3}e^{\xi_4\theta_4}e^{\xi_5\theta_5}e^{\xi_6\theta_6}g(0)\triangleq\begin{bmatrix}R & p\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，并结合 $Ad_{g_{st}}^{-1}=\begin{bmatrix}R^T & -R^T\hat{p}\\ 0 & R^T\end{bmatrix}$，可得$J_{st}^{b}=Ad_{g_{st}}^{-1}J_{st}^{s}$。

(b) Elbow manipulator：其在该初始位姿即有 3 个平行且共面的旋转轴，则初始位姿即为奇异位形；若从此位姿出发，保持 2、3 轴旋转角度相同并旋转它们，发现无论如何旋转，2、3、4 轴始终平行且共面，这也是奇异位形；在 1、2、3 轴任意操作的基础上，绕 5 轴逆时针旋转 90°，即发现 4、6 轴共线，此为奇异位形。

Inverse elbow manipulator：其在该初始位姿即有 3 个平行且共面的轴（且有四个轴交于一点，也有两个共线的轴），则初始位姿即为奇异位形；若从此位姿出发，保持 3、4 轴旋转角度相同并旋转它们，则发现无论如何旋转，3、4、5 轴始终平行且共面，这也是奇异位形。

Stanford manipulator：初始位姿不是奇异位形。如若在 1、2、3 轴任意操作的基础上，绕 5 轴逆时针旋转 90°，即发现 4、6 轴共线，此为奇异位形之一。

第 2 题

为只考虑转动分量，我们可以设各关节初始时刻交于原点。则各 $\xi_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_i' \end{bmatrix}$。

(a) $\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$，$\omega_2' = e^{\hat{z}\theta_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \end{bmatrix}^T$，

$\omega_3' = e^{\hat{z}\theta_1} e^{\hat{y}\theta_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = e^{\hat{z}\theta_1} \begin{bmatrix} \sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 \sin\theta_2 & \sin\theta_1 \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix}^T$

于是 $J_{st}^s(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \sin\theta_2 \\ 0 & \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \sin\theta_2 \\ 1 & 0 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ J \end{bmatrix}$，因此 $\det J = -(\sin^2\theta_1 + \cos^2\theta_1)\sin\theta_2 = -\sin\theta_2$

因此，$J_{st}^s(\theta)$ 不是列满秩（drops rank），当且仅当 $\theta_2 = 0$ 或 $\theta_2 = \pm\pi$。

(b) $\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$，$\omega_2' = e^{\hat{z}\theta_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \end{bmatrix}^T$，

$\omega_3' = e^{\hat{z}\theta_1} e^{\hat{y}\theta_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = e^{\hat{z}\theta_1} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & 0 & -\sin\theta_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 \cos\theta_2 & \sin\theta_1 \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \end{bmatrix}^T$

于是 $J_{st}^s(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \cos\theta_2 \\ 0 & \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \cos\theta_2 \\ 1 & 0 & -\sin\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ J \end{bmatrix}$，因此 $\det J = -(\sin^2\theta_1 + \cos^2\theta_1)\cos\theta_2 = -\cos\theta_2$

因此，$J_{st}^s(\theta)$ 不是列满秩（drops rank），当且仅当 $\theta_2 = \pm\pi/2$。