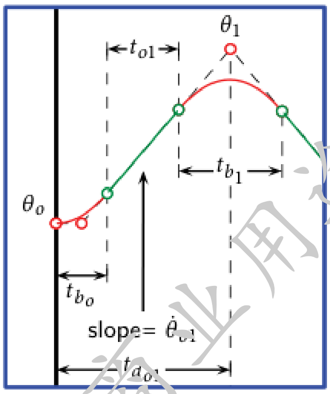
机器人学导论 作业 5

210320621 吴俊达

第 1 题



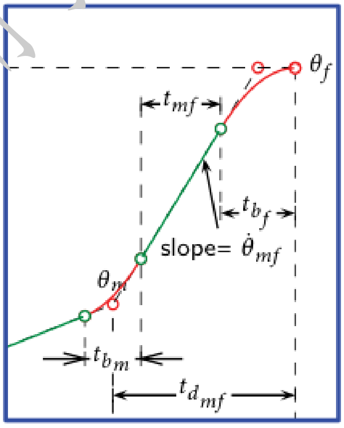
先设计第一段：$t_{b1}=t_{d12}-\sqrt{t_{d12}^2-\dfrac{2(\theta_2-\theta_1)}{\ddot{\theta}_{12}}}$，其中 $\ddot{\theta}_{12}=80\,\mathrm{deg/s^2}$，

$\theta_2=15\,\mathrm{deg}$，$\theta_1=5\,\mathrm{deg}$，$t_{d12}=1\mathrm{s}$，则 $t_{b1}=1-\sqrt{1-\dfrac{20}{80}}=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{s}$

（右图是示意图，本题是从 θ_1 到 θ_2，所以下标有所不同）

直线段的速度 $\dot{\theta}_{12}=\dfrac{15-5}{1-\dfrac{1}{2}\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{40}{2+\sqrt{3}}\,\mathrm{deg/s}\approx 10.718\,\mathrm{deg/s}$

过渡段时间要结合第二段设计结果来定。



第二段的设计：$t_{bf}=t_{d23}-\sqrt{t_{d23}^2+\dfrac{2(\theta_3-\theta_2)}{\ddot{\theta}_{23}}}$，其中 $\ddot{\theta}_{23}=-80\,\mathrm{deg/s^2}$，

$\theta_3=40\,\mathrm{deg}$，$\theta_2=15\,\mathrm{deg}$，$t_{d23}=1\mathrm{s}$，则 $t_{bf}=1-\sqrt{1-\dfrac{50}{80}}=1-\dfrac{\sqrt{6}}{4}\mathrm{s}$

（右图是示意图，本题是从 θ_2 到 θ_3，所以下标有所不同）

直线段的速度 $\dot{\theta}_{23}=\dfrac{40-15}{1-\dfrac{1}{2}\dfrac{4-\sqrt{6}}{4}}=\dfrac{200}{4+\sqrt{6}}\,\mathrm{deg/s}\approx 31.010\,\mathrm{deg/s}$

利用抛物线将两段连接起来，确保抛物线首、尾的速度是相同的：设过渡段方程为 $\theta(t)=at^2+bt+c$。则由于使用的加速度是 $80\,\mathrm{deg/s^2}$，则 $a=40$。$\dot{\theta}(t)=2at+b=80t+b$，则过渡段持续时间 $\Delta t=\dfrac{31.010-10.718}{80}=0.254\mathrm{s}$。此持续时间应平分给两段，则第一段的直线终止于时刻 $1-\Delta t/2$，第二段的直线从 $1+\Delta t/2$ 开始，并由此解出过渡段方程为 $\theta(t)=40t^2-59.136t+34.779$。

因此，设计出的运动规律是：
$$\theta(t)=\begin{cases}5+40t^2, 0<t<1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{s}\\ 5+\dfrac{40}{2+\sqrt{3}}\left(t-\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}\right), 1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{s}<t<0.8732\mathrm{s}\\ 40t^2-59.136t+34.779, 0.8732\mathrm{s}<t<1.1268\mathrm{s}\\ \dfrac{200}{4+\sqrt{6}}\left[t-\left(\dfrac{12+\sqrt{6}}{8}\right)\right]+40, 1.1268\mathrm{s}<t<1+\dfrac{\sqrt{6}}{4}\mathrm{s}\\ 40-40(2-t)^2, 1+\dfrac{\sqrt{6}}{4}\mathrm{s}<t<2\mathrm{s}\end{cases}$$

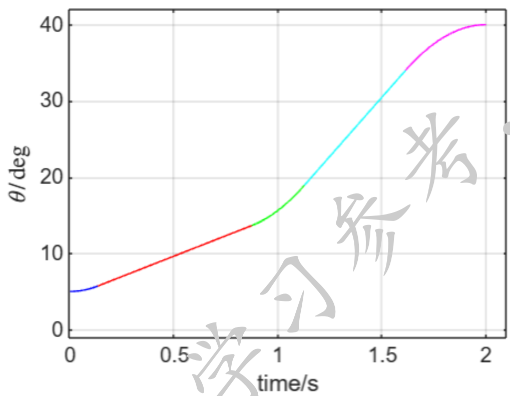
代码:

```
tblend1 = 1-sqrt(3)/2; % 第一段初始加速时间
VEL1 = 40/(2+sqrt(3)); % 第一段直线速度
tblend2 = 1-sqrt(6)/4; % 第二段结尾减速时间
VEL2 = 200/(4+sqrt(6)); % 第二段直线速度
delta_t = (VEL2-VEL1)/80; % 第一二段过渡时间
linear1_t_end = 1 - delta_t/2; % 第一段直线结束时间
linear2_t_start = 1 + delta_t/2; % 第二段直线开始时间
linear1_t_duration = linear1_t_end - tblend1; % 第一段直线持续时间

offset = 5; % 初始角度
theta1_blend = 40*(tblend1)^2;
theta1_linear =  linear1_t_duration*VEL1;

a = 40; % 过渡段二次项系数
b = VEL1 - 2*a*(tblend1+linear1_t_duration);% 过渡段一次项系数
% 过渡段常数项
c = offset + theta1_blend + theta1_linear - a*(linear1_t_end)^2- b*(linear1_t_end);

syms t
theta(t) = piecewise((0 <= t) & (t < tblend1),5+40*t.^2,...
    (tblend1 <= t) & (t < linear1_t_end),5+VEL1.*(t-tblend1/2),...
    (t>=linear1_t_end) & (t<linear2_t_start),a*t.^2+b.*t+c,...
    (t>=linear2_t_start) & (t<2-tblend2),40+VEL2.*(t-(2-tblend2/2)),...
    (t>=2-tblend2) & (t<=2),40-40.*(2-t).^2);
figure(1)
fplot(@(t) theta(t),[0 tblend1],'b')
hold on
fplot(@(t) theta(t),[tblend1 linear1_t_end],'r')
fplot(@(t) theta(t),[linear1_t_end linear2_t_start],'g')
fplot(@(t) theta(t),[linear2_t_start 2-tblend2],'cyan')
fplot(@(t) theta(t),[2-tblend2 2],'magenta')
hold off
grid on
axis([0 2.1 -1 42]);
xlabel('time/s');
ylabel('$\theta/\deg$','interpreter','latex');

velocity = diff(theta);
figure(2)
fplot(@(t) velocity(t),[0 tblend1],'b')
hold on
fplot(@(t) velocity(t),[tblend1 linear1_t_end],'r')
fplot(@(t) velocity(t),[linear1_t_end linear2_t_start],'g')
```

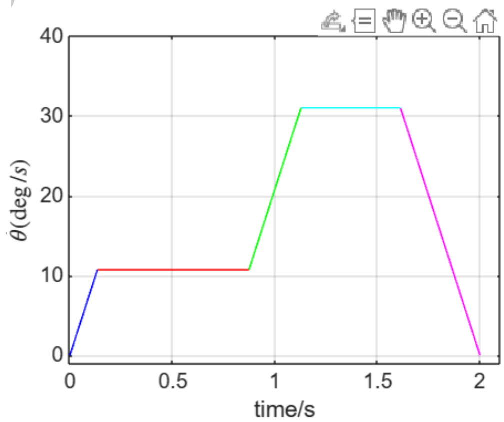
```
fplot(@(t) velocity(t),[linear2_t_start 2-tblend2],'cyan')
fplot(@(t) velocity(t),[2-tblend2 2],'magenta')
hold off
grid on
axis([0 2.1 -1 40]);
acceleration = diff(velocity);
xlabel('time/s');
ylabel('$\dot\theta(\deg/s)$','interpreter','latex');
figure(3)
% +0.001 是为了让图像能连接起来
fplot(@(t) acceleration(t),[0 tblend1+0.001],'b')
hold on
fplot(@(t) acceleration(t),[tblend1 linear1_t_end+0.001],'r')
fplot(@(t) acceleration(t),[linear1_t_end linear2_t_start+0.001],'g')
fplot(@(t) acceleration(t),[linear2_t_start 2-tblend2+0.001],'cyan')
fplot(@(t) acceleration(t),[2-tblend2 2+0.001],'magenta')
hold off
grid on
axis([0 2.1 -90 90]);
xlabel('time/s');
ylabel('$\ddot\theta(\deg/s^2)$','interpreter','latex');
```

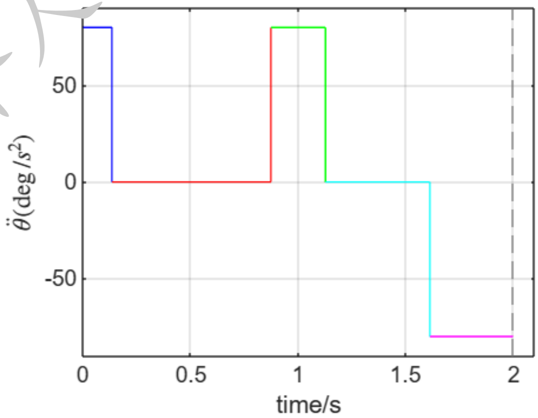
图形如下：

位置：



速度：





加速度：

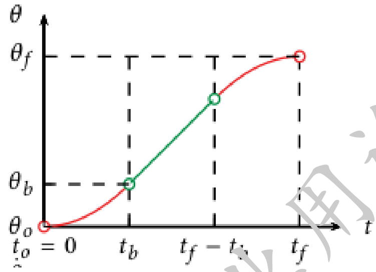
在 t=1s 时的位移约为 15.6434。

附：（尝试分两段设计，失败，只能按照带 via point 的情况设计）

尝试过程：

先设计第一段：取 $t_0=0$，则 $t_f=1\text{s}$。下面推导 blend 段时间 t_b。

取时间中点 t_h，可知角度也位于中点 θ_h：



$$\ddot{\theta}_b t_b=\frac{\theta_h-\theta_b}{t_h-t_b}=\frac{\dfrac{\theta_f+\theta_0}{2}-\theta_b}{\dfrac{t_f+t_0}{2}-t_b}=\frac{\theta_f+\theta_0-2\theta_b}{t_f+t_0-2t_b}$$

又知 $\theta_b=\theta_0+\dfrac{1}{2}\ddot{\theta}_b t_b^2$，代入得 $\ddot{\theta}_b t_b(t_f+t_0-2t_b)=\theta_f-\theta_0-\ddot{\theta}_b t_b^2$

代入数据：$80t_b(1-2t_b)=10-80t_b^2\Rightarrow 80t_b^2-80t_b+10=0$

得 $t_b=\dfrac{8-4\sqrt{2}}{16}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}\text{s}$

设计第二段：同样利用 $\ddot{\theta}_b t_b(t_f+t_0-2t_b)=\theta_f-\theta_0-\ddot{\theta}_b t_b^2$，

代入数据：$80t_b(1-2t_b)=25-80t_b^2\Rightarrow 80t_b^2-80t_b+25=0$，发现 t_b 无解？？

第 2 题

运动规律共分两段，函数形式为 $\theta(t)=\begin{cases}a_{01}+a_{11}t+a_{21}t^2+a_{31}t^3, 0<t\le 2\text{s}\\ a_{02}+a_{12}(t-2)+a_{22}(t-2)^2+a_{32}(t-2)^3, 2\text{s}\le t<4\text{s}\end{cases}$

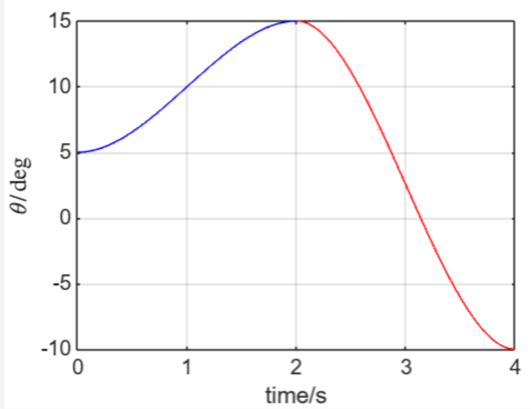
第一段各参数：
$$\begin{cases}a_{01}=\theta_0=5,\\ a_{11}=\dot{\theta}_0,\\ a_{21}=\dfrac{3h-(2\dot{\theta}_0+\dot{\theta}_1)t_d}{t_d^2}=\dfrac{3\times 10-4\dot{\theta}_0}{2^2}=7.5-\dot{\theta}_0,\\ a_{31}=\dfrac{-2h+(\dot{\theta}_0+\dot{\theta}_1)t_d}{t_d^3}=\dfrac{-2\times 10+2\dot{\theta}_0}{2^3}=-2.5+0.25\dot{\theta}_0\end{cases}$$

第二段各参数：
$$\begin{cases}a_{02}=\theta_1=15,\\ a_{12}=\dot{\theta}_1=0,\\ a_{22}=\dfrac{3h-(\dot{\theta}_2+2\dot{\theta}_1)t_d}{t_d^2}=\dfrac{-3\times 25-2\dot{\theta}_2}{2^2}=-\dfrac{75}{4}-\dfrac{\dot{\theta}_2}{2},\\ a_{32}=\dfrac{-2h+(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_1)t_d}{t_d^3}=\dfrac{2\times 25+2\dot{\theta}_2}{2^3}=\dfrac{25+\dot{\theta}_2}{4}\end{cases}$$

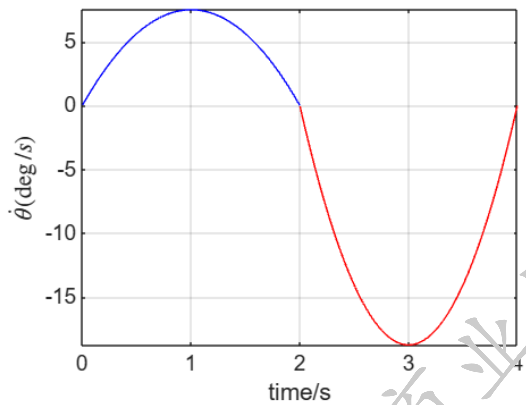
首先，假定 $\dot{\theta}_0=\dot{\theta}_2=0$，由此出发设计出的运动规律是：$\theta(t)=\begin{cases}5+7.5t^2-2.5t^3, 0<t<2\text{s}\\ 15-\dfrac{75}{4}(t-2)^2+\dfrac{25}{4}(t-2)^3, 2\text{s}<t<4\text{s}\end{cases}$

绘制出图像：

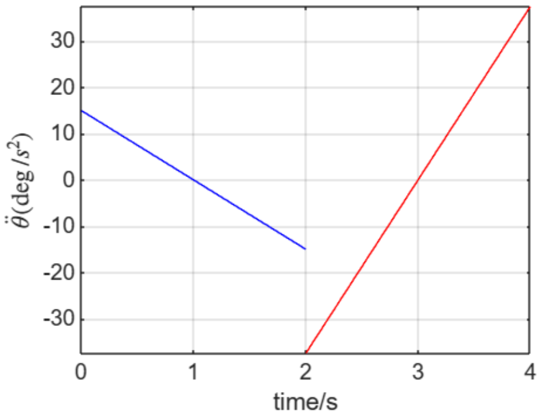
位置：



速度：



在途经点的速度的确为 0。加速度：



但是，我们注意到，加速度在途经点发生了突变。

为使加速度不发生突变，考虑使上述运动规律的二阶导数连续。

$$\ddot{\theta}(t)=\begin{cases}2a_{21}+6a_{31}t, 0<t\le 2\text{s}\\ 2a_{22}+6a_{32}(t-2), 2\text{s}<t\le 4\text{s}\end{cases}$$，则 $\ddot{\theta}(2)=2a_{21}+12a_{31}=2a_{22}$，

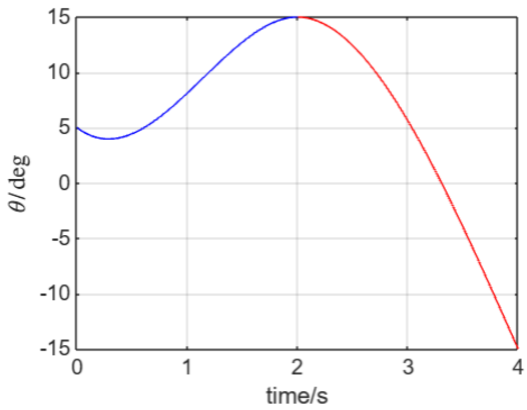
即 $15-2\dot{\theta}_0-30+3\dot{\theta}_0=-37.5-\dot{\theta}_2$，整理得 $22.5+\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_0=0$。不妨取 $\dot{\theta}_0=-7.5, \dot{\theta}_2=-15$，则各参数

$$\begin{cases}a_{01}=\theta_0=5,\\ a_{11}=\dot{\theta}_0=-7.5,\\ a_{21}=15,\\ a_{31}=-4.375\end{cases}, \begin{cases}a_{02}=\theta_1=15,\\ a_{12}=\dot{\theta}_1=0,\\ a_{22}=-11.25,\\ a_{32}=1.875\end{cases}$$，运动规律是：$\theta(t)=\begin{cases}5-7.5t+15t^2-4.375t^3, 0<t<2\text{s}\\ 15-11.25(t-2)^2+1.875(t-2)^3, 2\text{s}<t<4\text{s}\end{cases}$

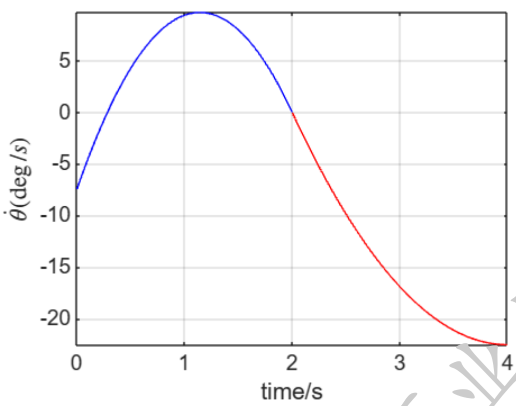
同样**绘制出图像：（见下页）**

（不发生突变与初始状态为零是矛盾的，所以这里分开考虑了。两种情况都能满足途经点速度为 0 的要求）

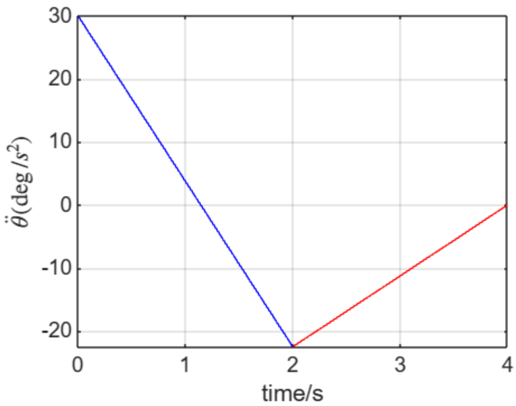
位置：



速度：



在途经点的速度的确为 0。加速度：



代码：（提供的代码可绘制出第二个运动规律的图形，绘制第一个运动规律只需更改参数即可）

```
syms t
theta(t) = piecewise((0 <= t) & (t < 2),5-7.5*t+15*t.^2-4.375*t.^3,...
    (2 <= t) & (t <= 4),15-11.25*(t-2).^2+1.875*(t-2).^3);
figure(1)
% fplot(theta);
fplot(@(t) theta(t),[0 2],'b')
hold on
fplot(@(t) theta(t),[2 4],'r')
hold off
grid on
% axis([0 2.1 -1 42]);
xlabel('time/s');
ylabel('$\theta/\deg$','interpreter','latex');

velocity = diff(theta);
figure(2)
fplot(@(t) velocity(t),[0 2],'b')
hold on
fplot(@(t) velocity(t),[2 4],'r')
```

```
hold off
grid on

acceleration = diff(velocity);
xlabel('time/s');
ylabel('$\dot\theta(\deg/s)$','interpreter','latex');
figure(3)
fplot(@(t) acceleration(t),[0 2],'b')
hold on
fplot(@(t) acceleration(t),[2 4],'r')
hold off
grid on
xlabel('time/s');
ylabel('$\ddot\theta(\deg/s^2)$','interpreter','latex');
```

第 3 题（更正）

起始时刻位置 $\theta(0)=10$，终止时刻位置 $\theta(1)=10+90-60=40$；

$\theta'(t)=180t-180t^2$，则起始时刻速度 $\theta'(0)=0$，终止时刻速度 $\theta'(1)=0$；

$\theta''(t)=180-360t$，则起始时刻加速度 $\theta''(0)=180$，终止时刻加速度 $\theta''(1)=-180$。

第 4 题

对 x,y 分开设计。首先设计 x 随 t 的变化规律。先设计第一段：$t_{b1}=t_{d12}-\sqrt{t_{d12}^2-\frac{2(x_2-x_1)}{\ddot{x}}}$，其中 $\ddot{x}=6$，$x_2=2$，$x_1=0$，$t_{d12}=1\text{s}$，则 $t_{b1}=1-\sqrt{1-\frac{4}{6}}=1-\frac{\sqrt{3}}{3}\text{s}$，直线段的速度 $\dot{x}_{12}=\frac{2-0}{1-\frac{1}{2}\frac{3-\sqrt{3}}{3}}=\frac{12}{3+\sqrt{3}}$

第二段的设计：$t_{bf}=t_{d23}-\sqrt{t_{d23}^2+\frac{2(x_3-x_2)}{\ddot{x}}}$，其中 $\ddot{x}=-6$，$x_3=3$，$x_2=2$，$t_{d23}=1\text{s}$，则 $t_{bf}=1-\sqrt{1-\frac{1}{3}}=1-\frac{\sqrt{6}}{3}\text{s}$，直线段的速度 $\dot{x}_{23}=\frac{3-2}{1-\frac{1}{2}\frac{3-\sqrt{6}}{3}}=\frac{6}{3+\sqrt{6}}$

利用抛物线将两段连接起来，确保抛物线首、尾的速度是相同的：设过渡段方程为 $x(t)=at^2+bt+c$。在过渡段使用加速度 -6，则 $a=-3$。$\dot{x}(t)=2at+b=-6t+b$，则过渡段持续时间 $\Delta t=\frac{\dot{x}_{23}-\dot{x}_{12}}{-6}=0.239\text{s}$。此持续时间应平分给两段，则第一段的直线终止于时刻 $1-\Delta t/2$，第二段的直线从 $1+\Delta t/2$ 时刻开始，并由此解出过渡段方程为 $x(t)=-3t^2+7.8185t-2.8614$。

因此，设计出的运动规律是：
$$x(t)=\begin{cases}3t^2,0<t<1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\text{s}\\ \dfrac{12}{3+\sqrt{3}}\left(t-\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}\right),1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\text{s}<t<0.8804\text{s}\\ -3t^2+7.8185t-2.8614,0.8804\text{s}<t<1.1196\text{s}\\ \dfrac{6}{3+\sqrt{6}}\left[t-\left(\dfrac{9+\sqrt{6}}{6}\right)\right]+3,1.1196\text{s}<t<1+\dfrac{\sqrt{6}}{3}\text{s}\\ 3-3(2-t)^2,1+\dfrac{\sqrt{6}}{3}\text{s}<t<2\text{s}\end{cases}$$

同理，设计 y 随 t 的变化规律。

第一段：$t_{b1}=1-\sqrt{1-\dfrac{1}{3}}=1-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\text{s}$，直线段的速度 $\dot{x}_{12}=\dfrac{1-0}{1-\dfrac{1}{2}\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}}=\dfrac{6}{3+\sqrt{6}}$；

第二段：$t_{bf}=1-\sqrt{1-\dfrac{4}{6}}=1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\text{s}$，直线段的速度 $\dot{x}_{23}=\dfrac{3-1}{1-\dfrac{1}{2}\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}}=\dfrac{12}{3+\sqrt{3}}$

类似上面步骤，解出过渡段方程为 $y(t)=3t^2-4.1815t+2.2244$。最后，设计出的运动规律是：

$$y(t)=\begin{cases}3t^2,0<t<1-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\text{s}\\ \dfrac{6}{3+\sqrt{6}}\left(t-\dfrac{3-\sqrt{6}}{6}\right),1-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\text{s}<t<0.8804\text{s}\\ 3t^2-4.1815t+2.2244,0.8804\text{s}<t<1.1196\text{s}\\ \dfrac{12}{3+\sqrt{3}}\left[t-\left(\dfrac{9+\sqrt{3}}{6}\right)\right]+3,1.1196\text{s}<t<1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\text{s}\\ 3-3(2-t)^2,1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\text{s}<t<2\text{s}\end{cases}$$

代码

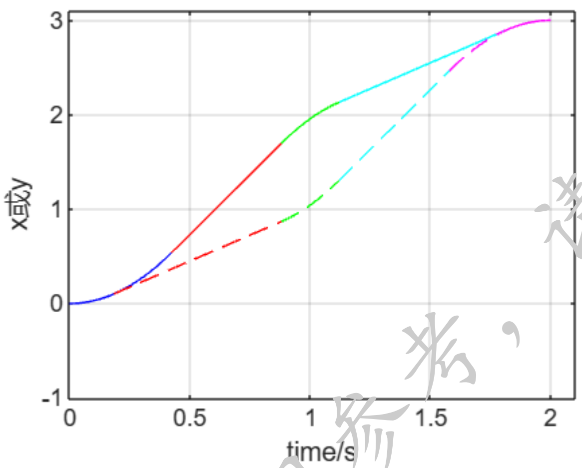
```
xtblend1 = 1-sqrt(3)/3; % 第一段初始加速时间
xVEL1 = 12/(3+sqrt(3)); % 第一段直线速度
xtblend2 = 1-sqrt(6)/3; % 第二段结尾减速时间
xVEL2 = 6/(3+sqrt(6)); % 第二段直线速度
xdelta_t = (xVEL2-xVEL1)/(-6); % 第一二段过渡时间
xlinear1_t_end = 1 - xdelta_t/2; % 第一段直线结束时间
xlinear2_t_start = 1 + xdelta_t/2; % 第二段直线开始时间
xlinear1_t_duration = xlinear1_t_end - xtblend1; % 第一段直线持续时间
```

```
xoffset = 0;
xtheta1_blend = 3*(xtblend1)^2;
xtheta1_linear =  xlinear1_t_duration*xVEL1;

xa = -3; % 过渡段二次项系数
xb = xVEL1 - 2*xa*(xtblend1+xlinear1_t_duration);% 过渡段一次项系数
% 过渡段常数项
xc = xoffset + xtheta1_blend + xtheta1_linear - xa*(xlinear1_t_end)^2- xb*(xlinear1_t_end);

ytblend1 = 1-sqrt(6)/3; % 第一段初始加速时间
yVEL1 = 6/(3+sqrt(6));  % 第一段直线速度
ytblend2 = 1-sqrt(3)/3; % 第二段结尾减速时间
yVEL2 = 12/(3+sqrt(3)); % 第二段直线速度
ydelta_t = (yVEL2-yVEL1)/6; % 第一二段过渡时间
ylinear1_t_end = 1 - ydelta_t/2; % 第一段直线结束时间
ylinear2_t_start = 1 + ydelta_t/2; % 第二段直线开始时间
ylinear1_t_duration = ylinear1_t_end - ytblend1; % 第一段直线持续时间

yoffset = 0;
ytheta1_blend = 3*(ytblend1)^2;
ytheta1_linear =  ylinear1_t_duration*yVEL1;

ya = 3; % 过渡段二次项系数
yb = yVEL1 - 2*ya*(ytblend1+ylinear1_t_duration);% 过渡段一次项系数
% 过渡段常数项
yc = yoffset + ytheta1_blend + ytheta1_linear - ya*(ylinear1_t_end)^2- yb*(ylinear1_t_end);

syms t
xtheta(t) = piecewise((0 <= t) & (t < xtblend1),3*t.^2,...
    (xtblend1 <= t) & (t < xlinear1_t_end),xVEL1.*(t-xtblend1/2),...
    (t>=xlinear1_t_end) & (t<xlinear2_t_start),xa*t.^2+xb.*t+xc,...
    (t>=xlinear2_t_start) & (t<2-xtblend2),3+xVEL2.*(t-(2-xtblend2/2)),...
    (t>=2-xtblend2) & (t<=2),3-3.*(2-t).^2);
ytheta(t) = piecewise((0 <= t) & (t < ytblend1),3*t.^2,...
    (ytblend1 <= t) & (t < ylinear1_t_end),yVEL1.*(t-ytblend1/2),...
    (t>=ylinear1_t_end) & (t<ylinear2_t_start),ya*t.^2+yb.*t+yc,...
    (t>=ylinear2_t_start) & (t<2-ytblend2),3+yVEL2.*(t-(2-ytblend2/2)),...
    (t>=2-ytblend2) & (t<=2),3-3.*(2-t).^2);
figure(1)
fplot(@(t) xtheta(t),[0 xtblend1],'b')
hold on
fplot(@(t) xtheta(t),[xtblend1 xlinear1_t_end],'r')
fplot(@(t) xtheta(t),[xlinear1_t_end xlinear2_t_start],'g')
fplot(@(t) xtheta(t),[xlinear2_t_start 2-xtblend2],'cyan')
```

```
fplot(@(t) xtheta(t),[2-xtblend2 2],'magenta')
fplot(@(t) ytheta(t),[0 ytblend1],'--b')
fplot(@(t) ytheta(t),[ytblend1 ylinear1_t_end],'--r')
fplot(@(t) ytheta(t),[ylinear1_t_end ylinear2_t_start],'--g')
fplot(@(t) ytheta(t),[ylinear2_t_start 2-ytblend2],'--cyan')
fplot(@(t) ytheta(t),[2-ytblend2 2],'--magenta')
hold off
grid on
axis([0 2.1 -1 3.1]);
xlabel('time/s');
ylabel('x 或 y');
figure(2)
fplot(@(t) xtheta(t),@(t) ytheta(t))
xlabel('x');
ylabel('y');
```

图形如下：

x 和 *y* 随时间变化的曲线（实线为 *x*，虚线为 *y*）：



(*x*, *y*)曲线：