1.(i) 对 Elbow 机器人:

$$J_{st}^s = \left[J_{st1-3}^s, J_{st4-6}^s\right], \text{其中 } J_{st1-3}^s = \begin{bmatrix} 0 & hs_1 & s_1(h - l_1 s_2) \\ 0 & -hc_1 & c_1(-h + l_1 s_2) \\ 0 & 0 & l_1 c_2 \\ 0 & -c_1 & -c_1 \\ 0 & -s_1 & -s_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$J_{st4-6}^s = \begin{bmatrix} s_1(h - l_1 s_2) & c_1(-hs_{234} + l_1 c_{34} + l_2) & -c_1 c_5(hc_{234} + l_1 s_{34}) - s_1 s_5(-h + l_1 s_2 + l_2 s_{234}) \\ c_1(-h + l_1 s_2) & s_1(-hs_{234} + l_1 c_{34} + l_2) & -s_1 s_5(hc_{234} + l_1 s_{34}) + c_1 s_5(-h + l_1 s_2 + l_2 s_{234}) \\ l_1 c_2 & 0 & s_5(l_1 c_2 + l_2 c_{234}) \\ -c_1 & -s_1 s_{234} & -s_1 c_5 c_{234} - c_1 s_5 \\ -s_1 & c_1 s_{234} & c_1 c_5 c_{234} - s_1 s_5 \\ 0 & c_{234} & -c_5 s_{234} \end{bmatrix},$$

$$J_{st}^b = \begin{bmatrix} (l_1 c_2 + l_2 c_{234}) c_5 s_6 & l_1(c_6 c_{34} - s_5 s_6 s_{34}) + l_2 c_6 & l_2 c_6 & l_2 c_6 & 0 & 0 \\ (l_1 c_2 + l_2 c_{234}) s_5 & l_1 s_{34} c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(l_1 c_2 + l_2 c_{234}) c_5 c_6 & l_1(s_6 c_{34} - s_5 c_6 s_{34}) + l_2 s_6 & l_2 s_6 & l_2 s_6 & 0 & 0 \\ s_5 s_6 s_{234} - c_6 c_{234} & c_5 s_6 & c_5 s_6 & c_5 s_6 & -c_6 & 0 \\ -s_{234} c_5 & s_5 & s_5 & s_5 & 0 & 1 \\ -s_5 s_{234} c_6 - s_6 c_{234} & -c_5 c_6 & -c_5 c_6 & -c_5 c_6 & -s_6 & 0 \end{bmatrix}$$

(ii) 对 Inverse elbow 机器人:

$$J_{st}^s = \left[J_{st1-3}^s, J_{st4-6}^s\right], \text{其中 } J_{st1-3}^s = \begin{bmatrix} 0 & -hc_1 & hs_1 c_2 \\ 0 & -hs_1 & -hc_1 c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_1 & -c_1 c_2 \\ 0 & c_1 & -s_1 c_2 \\ 1 & 0 & s_2 \end{bmatrix},$$

$$J_{st4-6}^s = \begin{bmatrix} l_1 c_1 s_2 c_3 + (hc_2 - l_1 s_3) s_1 & (l_1 c_3 + l_2 c_{34}) s_2 c_1 - (l_1 s_3 + l_2 s_{34} - hc_2) s_1 & hs_1 s_2 s_{345} - (hc_{345} + l_1 c_2 s_{45} + l_2 c_2 s_5) c_1 \\ l_1 s_1 s_2 c_3 - (hc_2 - l_1 s_3) c_1 & (l_1 c_3 + l_2 c_{34}) s_1 s_2 + (l_1 s_3 + l_2 s_{34} - hc_2) c_1 & -hc_1 s_2 s_{345} - (hc_{345} + l_1 c_2 s_{45} + l_2 c_2 s_5) s_1 \\ l_1 c_2 c_3 & (l_1 c_3 + l_2 c_{34}) c_2 & (l_1 s_{45} + l_2 s_5) s_2 \\ -c_1 c_2 & -c_1 c_2 & -s_1 c_{345} - c_1 s_2 s_{345} \\ -s_1 c_2 & -s_1 c_2 & -s_1 s_2 s_{345} + c_1 c_{345} \\ s_2 & s_2 & -c_2 s_{345} \end{bmatrix}$$

$$J_{st}^b = \begin{bmatrix} l_1(s_2 c_6 c_{45} + c_2 c_3 s_6) + l_2(s_2 c_5 c_6 + c_2 s_6 c_{34}) & (l_1 s_3 + l_2 s_{34}) s_6 & (l_1 c_{45} + l_2 c_5) c_6 & l_2 c_5 c_6 & 0 & 0 \\ (l_1 s_{45} + l_2 s_5) s_2 & 0 & l_1 s_{45} + l_2 s_5 & l_2 s_5 & 0 & 0 \\ l_1(s_2 s_6 c_{45} - c_2 c_3 c_6) + l_2(s_2 c_5 s_6 - c_2 c_6 c_{34}) & -(l_1 s_3 + l_2 s_{34}) c_6 & (l_1 c_{45} + l_2 c_5) s_6 & l_2 c_5 s_6 & 0 & 0 \\ s_2 s_6 - c_2 c_6 c_{345} & -c_6 s_{345} & s_6 & s_6 & s_6 & 0 \\ -s_{345} c_2 & c_{345} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -s_2 c_6 - c_2 s_6 c_{345} & -s_6 s_{345} & -c_6 & -c_6 & -c_6 & 0 \end{bmatrix}$$

(ii) 对 Stanford 机器人:

$$J_{st}^s = \left[J_{st1-3}^s, J_{st4-6}^s\right], \text{其中 } J_{st1-3}^s = \begin{bmatrix} 0 & hs_1 & -s_1 s_2 \\ 0 & -hc_1 & c_1 s_2 \\ 0 & 0 & c_2 \\ 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & -s_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$J_{st4-6}^s = \begin{bmatrix} (h - l_1 s_2 - l_2 s_2 + \theta_3 c_2) s_1 & (-hs_{24} + l_1 c_4 + l_2 c_4 - \theta_3 s_4) c_1 & (h - l_1 s_2 - l_2 s_2 + \theta_3 c_2) s_1 s_5 - (hc_{24} + l_1 s_4 + l_2 s_4 + \theta_3 c_4) c_1 c_5 \\ (-h + l_1 s_2 + l_2 s_2 - \theta_3 c_2) c_1 & (-hs_{24} + l_1 c_4 + l_2 c_4 - \theta_3 s_4) s_1 & -(h - l_1 s_2 - l_2 s_2 + \theta_3 c_2) c_1 s_5 - (hc_{24} + l_1 s_4 + l_2 s_4 + \theta_3 c_4) s_1 c_5 \\ l_1 c_2 + l_2 c_2 + \theta_3 s_2 & 0 & (l_1 c_2 + l_2 c_2 + \theta_3 s_2) s_5 \\ -c_1 & -s_1 s_{24} & -s_1 c_5 c_{24} - s_5 c_1 \\ -s_1 & c_1 s_{24} & c_1 c_5 c_{24} - s_1 s_5 \\ 0 & c_{24} & -s_{24} c_5 \end{bmatrix}$$

$$J_{st}^b = \left[J_{st1-3}^b, J_{st4-6}^b\right], \text{其中 } J_{st1-3}^b =$$

$$\begin{bmatrix} (l_1c_2 + l_2c_2 + \theta_3 s_2)c_5 s_6 & l_1(c_4c_6 - s_4s_5s_6) + l_2(c_4c_6 - s_4s_5s_6) - \theta_3(s_4c_6 + c_4s_5s_6) & s_4s_5s_6 - c_4c_6 \\ (l_1c_2 + l_2c_2 + \theta_3 s_2)s_5 & (l_1s_4 + l_2s_4 + \theta_3c_4)c_5 & -s_4c_5 \\ -(l_1c_2 + l_2c_2 + \theta_3 s_2)c_5c_6 & l_1(c_4s_6 + s_4s_5c_6) + l_2(c_4s_6 + s_4s_5c_6) - \theta_3(s_4s_6 - c_4s_5c_6) & -s_4s_5c_6 - c_4s_6 \\ s_5s_6s_{24} - c_6c_{24} & s_6c_5 & 0 \\ -c_5s_{24} & s_5 & 0 \\ -s_5s_{24}c_6 - s_6c_{24} & -c_5c_6 & 0 \end{bmatrix},$$

$$J_{st4-6}^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c_5s_6 & -c_6 & 0 \\ s_5 & 0 & 1 \\ -c_5c_6 & -s_6 & 0 \end{bmatrix}$$

对 Elbow 机器人, 图 1给出了部分奇异姿态。如 (a) 所示, 若 $\theta_2 = -90°, \theta_3 = 0, \theta_4 = 90°$, 此时 ξ_1 与 ξ_5 同轴, 且 $\xi_1, \xi_4, \xi_5, \xi_6$ 交于一点。

如 (b) 若 $\theta_2 = -90°, \theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = 0$, 则 ξ_1 与 ξ_6 同轴, 且 $\xi_1, \xi_4, \xi_5, \xi_6$ 交于一点。

如 (c), 当 $\theta_3 = 0$ 时, ξ_2, ξ_3, ξ_4 平行且在同一平面上。

图 2给出了 Inverse elbow 的部分奇异姿态。如 (a) 所示, 若 $l_1 s_3 + l_2 s_{34} = 0, \theta_5 = 0$, 则 ξ_2, ξ_6 同轴。对于 $\theta_3 = \theta_4 = 0$ 的情形, 此时 ξ_3, ξ_4, ξ_5 平行且共面。

如 (b) 若 $\theta_2 = \theta_4 = 0, \theta_3 = -90°\ \theta_5 = 90°$, 则 ξ_1 与 ξ_6 同轴, 且 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_6$ 交于一点。

如 (c), 当 $\theta_2 = \pm 90°$ 时, 会使 ξ_1, ξ_3 同轴。

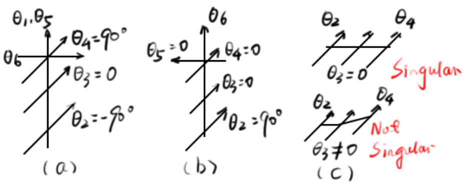

图 1: Elbow 的奇异姿态

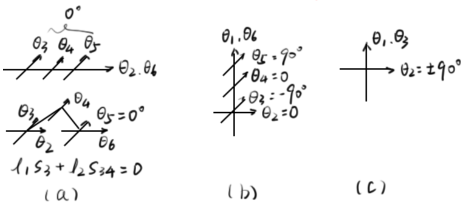

图 2: Inverse elbow 的奇异姿态

对 Stanford 机器人, 其结构相当于将 Elbow 的第 3 关节换成平移关节, 因此同样会出现图 1中 (a)(b) 奇异姿态, 奇异条件即 Elbow 对应条件去掉 $\theta_3 = 0$。

2. 设本题中均为动轴欧拉角。

(a) 考虑一 3 轴机器人, 满足 $\begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \xi_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$, 三轴旋转角度依次为 α, β, γ, 则 $J_{st}^s = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&-s_\alpha&c_\alpha s_\beta\\0&c_\alpha&s_\alpha s_\beta\\1&0&-s_\beta\end{bmatrix}$。当 $Rank(J_{st}^s) < 3$ 时姿态奇异, 此时有 $det(\begin{bmatrix}0&-s_\alpha&c_\alpha s_\beta\\0&c_\alpha&s_\alpha s_\beta\\1&0&c_\beta\end{bmatrix}) = 0$, 即 ZYZ 欧拉角奇异条件为 $\beta = 0, \pm\pi$。

(b) 考虑一 3 轴机器人, 满足 $\begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \xi_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$, 三轴旋转角度依

次为 α, β, γ, 则 $J_{st}^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_\alpha & c_\alpha c_\beta \\ 0 & c_\alpha & s_\alpha c_\beta \\ 1 & 0 & -s_\beta \end{bmatrix}$。当 $Rank(J_{st}^s) < 3$ 时姿态奇异, 此时有 $det(\begin{bmatrix} 0 & -s_\alpha & c_\alpha c_\beta \\ 0 & c_\alpha & s_\alpha c_\beta \\ 1 & 0 & -s_\beta \end{bmatrix}) = 0$, 即 ZYX 欧拉角奇异条件为 $\beta = \pm\frac{\pi}{2}$。