

机器人学导论

机构、运动学、动力学及运动规划

by 一只不吃喵的鱼 hitsz21自动化

2024.5.25

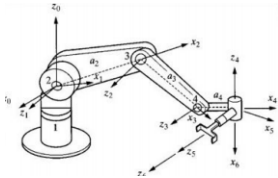
Lec1 机器人机构

机器人机构的基本元素为连杆和铰链（又称运动副）

常见的机器人由机械本体，减速器（RV减速器，谐波减速器），电机，控制器构成

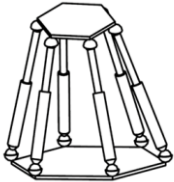
多个连杆通过运动副以串联形式连接成不封闭的机构称为串联机构

串联机器人一般正解容易逆解难



多个连杆连接成首尾封闭的机构则称为并联机构

并联机器人一般逆解容易正解难



自由度 (DoF)；机构的自由度是指确定机构位形所需独立参数的数目，对串联机器人而言，自由度一般是指机器人末端执行器相对于基座的自由度；对并联机器人而言，自由度是指动平台相对静平台的自由度

自由度计算CGK公式（无虚约束和局部自由度）：

$$F = d(l - n - 1) + \sum_{i=1}^n f_i$$

其中 d 为机构阶数（平面机构 $d=3$ ，空间机构 $d=6$ ）， l 为连杆数（包括基座）

n 为关节总数， f_i 为第 i 个关节的自由度数

典型机器人：直角坐标式、圆柱坐标式、球坐标式、SCARA、关节式机器人

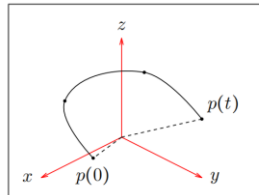
Lec2 刚体运动

Part1 刚体变换 (Rigid Body Transformations)

在研究刚体前，先考虑质点的问题：

$$p(0) = \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} : \text{initial position}$$

$$p(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$



对于上述p点的运动过程，我们可以对轨迹 (Trajectory) 下一个定义：

$$\text{A trajectory is a curve } p : (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto \mathbb{R}^3, p(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

而对于一个刚体而言，刚体的运动具有如下的性质：

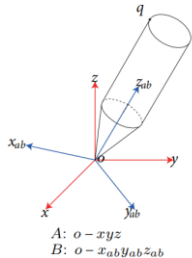
Length preserving: $\|g(p) - g(q)\| = \|p - q\|$

Orientation preserving: $g_*(v \times \omega) = g_*(v) \times g_*(\omega)$

用我们惯常的语言描述，就是：保距性，保角性。保距性代表刚体上取两点，则两点间的距离不随刚体的运动而改变；保角性代表刚体上任意两个向量在变换前后的相对姿态不变。二者实现刚体变换的基础

Part2 坐标系变换 (Coordinate Frame Transformations)

我们首先来考虑刚体姿态的变化

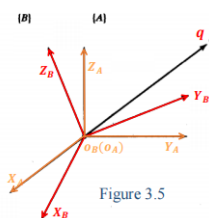


图中有A, B两个坐标系，则一个点在B系下的坐标，相对于其在A系下的坐标发生了改变

我们将A系空间视为一整个大的刚体，则其中任何一点都经过相同的变换后，得到了其在B系下的坐标

我们定义： $R_{ab} = [x_{ab} \ y_{ab} \ z_{ab}] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

它一方面描述了B系相对于A系的姿态，另一方面可以视作上述变化过程的旋转矩阵。



在上图所示的空间中，我们选取一点q

用 $q_b = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}$ 来表示q点在B系下的坐标，用 $q_a = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$ 来表示q点在A系下的坐标

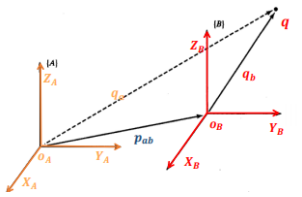
则根据变化过程我们很容易得到： $q_a = R_{ab} q_b$

这时候我们可以定义：

$R_{ab} \in SO(3)$ is the rotation matrix of frame $\{B\}$ w.r.t frame $\{A\}$

即: R_{ab} 是B系相对于A系的旋转矩阵

这只代表了刚体在空间中的旋转, 如果还存在刚体的平移呢?



如图所示的两个坐标系下, 刚体未发生旋转, 只发生了平移。

我们依然用 $q_b = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}$ 来表示 q 点在B系下的坐标, 用 $q_a = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$ 来表示 q 点在A系下的坐标

则显然有: $q_a = q_b + p_{ab}$, p_{ab} 代表B系相对于A系的位移

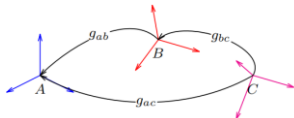
如果坐标系既发生了旋转, 又发生了平移呢?

显然, 我们有: $q_a = R_{ab} q_b + p_{ab}$

这个过程也可以用矩阵形式描述: $\begin{pmatrix} q_a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{ab} & p_{ab} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_b \\ 1 \end{pmatrix}$

我们记 $\bar{g}_{ab} = \begin{pmatrix} R_{ab} & p_{ab} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 它描述了空间坐标的变化, 也代表了坐标系变化的描述

这一矩阵具有传递性:



$$\bar{g}_{ac} = \bar{g}_{ab} \cdot \bar{g}_{bc} = \begin{bmatrix} R_{ab}R_{bc} & R_{ab}p_{bc} + p_{ab} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Part3 指数坐标 (Exponential Coordinates)

在本节内容开始前, 先介绍一种简化计算的方法:

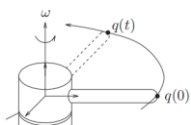
有两个矢量 $a = [a_1, a_2, a_3]^T, b = [b_1, b_2, b_3]^T$, 两矢量的叉积结果为:

$$a \times b = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$$

可以表示为 $a \times b = \hat{a}b$, 其中

$$\hat{a} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

下面进入本节内容:



$$\begin{cases} \dot{q}(t) = \omega \times q(t) = \hat{\omega}q(t) \\ q(0): \text{Initial coordinates} \end{cases}$$

对于左图所示的旋转过程, 我们可以简单建立右边的微分方程:

通过方程, 我们可以解出:

$$q(t) = e^{\hat{\omega}t} q_0 \text{ where } e^{\hat{\omega}t} = I + \hat{\omega}t + \frac{(\hat{\omega}t)^2}{2!} + \frac{(\hat{\omega}t)^3}{3!} + \dots$$

这个式子说明这一矩阵指数描述了这个旋转过程，是刚体运动的描述，所以我们可以作如下定义：

$$R(\omega, \theta) = e^{\hat{\omega}\theta}$$

其中， ω 代表旋转轴线的方向向量， θ 为一定时间内旋转的角度。当 $\|\omega\|$ 存在，恒有：

$$e^{\hat{\omega}\theta} = I + \frac{\hat{\omega}}{\|\omega\|} \sin \|\omega\|\theta + \frac{\hat{\omega}^2}{\|\omega\|^2} (1 - \cos \|\omega\|\theta)$$

则我们可以把这个矩阵指数写成如下形式：

□ Let $v\theta = 1 - \cos\theta, c\theta = \cos\theta, s\theta = \sin\theta, \|\omega\| = 1$. By Rodrigues' formula,

$$e^{\hat{\omega}\theta} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 v\theta + c\theta & \omega_1 \omega_2 v\theta - \omega_3 s\theta & \omega_1 \omega_3 v\theta + \omega_2 s\theta \\ \omega_1 \omega_2 v\theta + \omega_3 s\theta & \omega_2^2 v\theta + c\theta & \omega_2 \omega_3 v\theta - \omega_1 s\theta \\ \omega_1 \omega_3 v\theta - \omega_2 s\theta & \omega_2 \omega_3 v\theta + \omega_1 s\theta & \omega_3^2 v\theta + c\theta \end{bmatrix} = R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \in SO(3)$$

其中，这个式子满足：

□ Let $\text{tr}(R) = r_{11} + r_{22} + r_{33} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i$, where λ_i is the eigenvalue of R, $i = 1, 2, 3$

Case 1: $\text{tr}(R) = 3$ or $R = I, \theta = 0 \Rightarrow \omega\theta = 0$

Case 2: $-1 < \text{tr}(R) < 3$,

$$\theta = \arccos \frac{\text{tr}(R) - 1}{2} \Rightarrow \omega = \frac{1}{2s\theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$

Case 3: $\text{tr}(R) = -1 \Rightarrow \cos\theta = -1 \Rightarrow \theta = \pm\pi$

这也就是旋转矩阵的描述方式，通过上述公式，我们可以很容易求得绕x轴，y轴，z轴的空间变换：

$$\begin{aligned} R_x(\varphi) &:= e^{\hat{x}\varphi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \\ R_y(\theta) &:= e^{\hat{y}\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}, \text{ 其中, } R_x \text{ 对应的 } \omega \text{ 为 } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (绕x轴, 方向向量 } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 另外二者类似)} \\ R_z(\psi) &:= e^{\hat{z}\psi} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

以上是纯平移下的坐标变换描述，以下介绍带有平移的运动：

我们定义 $\xi := \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \mapsto \hat{\xi} = \begin{bmatrix} \hat{\omega} & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，其中， v 为旋量，满足 $v = -\omega \times q$ ，则有：

If $\omega = 0$, then $\hat{\xi}^2 = \hat{\xi}^3 = \dots = 0, e^{\hat{\xi}\theta} = \begin{bmatrix} I & v\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SE(3)$

• If ω is not 0, assume $\|\omega\| = 1$.

Define:

$$g_0 = \begin{bmatrix} I & \omega \times v \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \hat{\xi}' = g_0^{-1} \cdot \hat{\xi} \cdot g_0 = \begin{bmatrix} \hat{\omega} & h\omega \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

where $h = \omega^T \cdot v$.

$$e^{\hat{\xi}\theta} = e^{g_0 \hat{\xi}' g_0^{-1}} = g_0 \cdot e^{\hat{\xi}'\theta} \cdot g_0^{-1}$$

and as

$$\hat{\xi}'^2 = \begin{bmatrix} \hat{\omega}^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \hat{\xi}'^3 = \begin{bmatrix} \hat{\omega}^3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

we have

$$e^{\hat{\xi}\theta} = \begin{bmatrix} e^{\hat{\omega}\theta} & h\omega\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{\hat{\xi}\theta} = \begin{bmatrix} e^{\hat{\omega}\theta} & (I - e^{\hat{\omega}\theta})\hat{\omega}v + \omega\omega^T v\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

总结如下：

在 $\omega = 0$ 时 (物体为纯平移) $e^{\hat{\xi}\theta} = \begin{pmatrix} I_{3 \times 3} & v\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

在 $\omega \neq 0$ 且物体纯旋转时 $e^{\hat{\xi}\theta} = \begin{pmatrix} e^{\hat{\omega}\theta} & (I - e^{\hat{\omega}\theta})\hat{\omega}v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

任意一个刚体运动，都可以最终找到一个轴线，用其绕轴线旋转多少角度，平移多少距离来描述

Part4 其他参数方法 (Other Parametrizations)

(1) XYZ 固定角度：

1. Rotate φ about x-axis
2. Rotate θ about y-axis
3. Rotate ψ about z-axis

→

$$R_{ab} = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\varphi)$$

$$R_{ab} = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & -s\psi c\theta + c\psi s\theta s\varphi & s\psi c\theta + c\psi s\theta c\varphi \\ s\psi c\theta & c\psi c\theta + s\psi s\theta s\varphi & -c\psi c\theta + s\psi s\theta c\varphi \\ -s\theta & c\theta s\varphi & c\theta c\varphi \end{bmatrix}$$

(2) ZYX欧拉角:

1. Rotate α about z-axis
2. Rotate β about y' -axis
3. Rotate γ about x'' -axis



$$\begin{array}{l}
 R_{aa'} = R_z(\alpha) \quad R_{a'a''} = R_y(\beta) \quad R_{a''b} = R_x(\gamma) \\
 R_{ab} = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma) \\
 R_{ab}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta & -s_\alpha c_\beta & c_\alpha s_\beta s_\gamma & s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha s_\beta c_\gamma \\ s_\alpha c_\beta & c_\alpha c_\beta & s_\alpha s_\beta s_\gamma & -c_\alpha s_\beta s_\gamma + s_\alpha s_\beta c_\gamma \\ -s_\beta & c_\beta & c_\beta s_\gamma & c_\beta c_\gamma \end{bmatrix}
 \end{array}$$

, 此时有

$$\begin{aligned}
 \beta &= \text{atan2}(-r_{31}, \sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}) \\
 \alpha &= \text{atan2}(r_{21}/c_\beta, r_{11}/c_\beta) \\
 \gamma &= \text{atan2}(r_{32}/c_\beta, r_{33}/c_\beta)
 \end{aligned}$$

其中:

$$\text{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & y \geq 0, x < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & y < 0, x < 0 \\ +\frac{\pi}{2} & y > 0, x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & y < 0, x = 0 \\ \text{undefined} & y = 0, x = 0 \end{cases}$$

Lec3 刚体速度

Part1 质点速度 (Point-mass Velocity)

一般地, 我们有:

$$q(t) \in \mathbb{R}^3, t \in (-\varepsilon, \varepsilon), v = \frac{d}{dt}q(t) \in \mathbb{R}^3, a = \frac{d^2}{dt^2}q(t) = \frac{d}{dt}v(t) \in \mathbb{R}^3$$

当经过一个旋转矩阵作用时:

$$\begin{aligned} R_{ab}(t) &\in SO(3), t \in (-\varepsilon, \varepsilon), q_a(t) = R_{ab}(t)q_b \\ V^a &= \frac{d}{dt}q_a(t) = \dot{R}_{ab}(t)q_b = \dot{R}_{ab}(t)R_{ab}^T(t)R_{ab}(t)q_b = \dot{R}_{ab}R_{ab}^T q_a \\ R_{ab}(t)R_{ab}^T(t) &= I \Rightarrow \dot{R}_{ab}R_{ab}^T + R_{ab}\dot{R}_{ab}^T = 0, \dot{R}_{ab}R_{ab}^T = -(\dot{R}_{ab}R_{ab}^T)^T \end{aligned}$$

第三行反映了这个矩阵的性质: R的导数乘R的转置形成的矩阵是反对称矩阵

则由反对称矩阵的性质, 一定存在: $\hat{\omega}_{ab}^s = \dot{R}_{ab}R_{ab}^T, \omega_{ab} \in \mathbb{R}^3$

Part2 刚体速度 (Velocity of a Rigid Body)

根据前述推导, 我们继续:

Denote spatial angular velocity by:

$$\hat{\omega}_{ab}^s = \dot{R}_{ab}R_{ab}^T, \omega_{ab} \in \mathbb{R}^3$$

Then

$$V^a = \hat{\omega}_{ab}^s \cdot q_a = \omega_{ab}^s \times q_a$$

Body angular velocity:

$$\hat{\omega}_{ab}^b = R_{ab}^T \cdot \dot{R}_{ab}, v^b \triangleq R_{ab}^T \cdot v^a = \omega_{ab}^b \times q_b$$

Relation between body and spatial angular velocity:

$$\omega_{ab}^b = R_{ab}^T \cdot \omega_{ab}^s \text{ or } \hat{\omega}_{ab}^b = R_{ab}^T \hat{\omega}_{ab}^s R_{ab}$$

其中Body 角速度表示的含义是: 刚体一点相对于质心的角速度

在前面我们已经了解到, 对于既有平移又有旋转的运动:

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} R_{ab}(t) & p_{ab}(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, q_a(t) = g_{ab}(t)q_b$$

则对右边的式子求导, 可知:

$$\frac{d}{dt}q_a(t) = \dot{g}_{ab}(t)q_b = \dot{g}_{ab} \cdot g_{ab}^{-1} \cdot g_{ab} \cdot q_b = \hat{V}_{ab}^s \cdot q_a$$

其中, 有:

$$\begin{aligned} \hat{V}_{ab}^s &= \dot{g}_{ab} \cdot g_{ab}^{-1} = \begin{bmatrix} \dot{R}_{ab} & \dot{p}_{ab} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{ab}^T & -R_{ab}^T p_{ab} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{R}_{ab}R_{ab}^T & -\dot{R}_{ab}R_{ab}^T p_{ab} + \dot{p}_{ab} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\omega}_{ab}^s & -\omega_{ab}^s \times p_{ab} + \dot{p}_{ab} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \hat{\omega}_{ab}^s & v_{ab}^s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

则我们可以得到本体系下的速度和空间系下的速度

广义空间速度:

$$\begin{aligned} V_{ab}^s &= \begin{bmatrix} v_{ab}^s \\ \omega_{ab}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_{ab}^s \times p_{ab} + \dot{p}_{ab} \\ (\dot{R}_{ab}R_{ab}^T)^v \end{bmatrix} \\ v_{q_a} &= \omega_{ab}^s \times q_a + v_{ab}^s \end{aligned}$$

注意到 $v_{q_b} = g_{ab}^{-1} \cdot v_{q_a} = g_{ab}^{-1} \cdot \dot{g}_{ab} \cdot q_b = \hat{V}_{ab}^b \cdot q_b$, 可以得到广义本体速度:

$$\hat{V}_{ab}^b = g_{ab}^{-1} \dot{g}_{ab} = \begin{bmatrix} R_{ab}^T \dot{R}_{ab} & R_{ab}^T \dot{p}_{ab} \\ \hat{\omega}_{ab}^b & v_{ab}^b \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \hat{\omega}_{ab}^b & v_{ab}^b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V_{ab}^b = \begin{bmatrix} v_{ab}^b \\ \omega_{ab}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ab}^T \dot{p}_{ab} \\ (R_{ab}^T \dot{R}_{ab})^\vee \end{bmatrix}$$

则推导可知二者的关系：

$$\begin{aligned} \hat{V}_{ab}^s &= \dot{g}_{ab} \cdot g_{ab}^{-1} = g_{ab} \cdot \dot{g}_{ab}^{-1} \cdot g_{ab} \cdot g_{ab}^{-1} = g_{ab} \cdot \hat{V}_{ab}^b \cdot g_{ab}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} R_{ab} & p_{ab} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\omega}_{ab}^b & v_{ab}^b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{ab}^T & -R_{ab}^T p_{ab} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R_{ab} & p_{ab} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\omega}_{ab}^b R_{ab}^T & -\hat{\omega}_{ab}^b R_{ab}^T p_{ab} + v_{ab}^b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R_{ab} \hat{\omega}_{ab}^b R_{ab}^T & -R_{ab} \hat{\omega}_{ab}^b R_{ab}^T p_{ab} + R_{ab} v_{ab}^b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ V_{ab}^s &= \begin{bmatrix} v_{ab}^s \\ \omega_{ab}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ab} & \hat{p}_{ab} R_{ab} \\ 0 & R_{ab} \end{bmatrix} V_{ab}^b \end{aligned}$$

我们记 $Ad_g = \begin{bmatrix} R & \hat{p}R \\ 0 & R \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$, for $g = (p, R)$, Ad 表示伴随

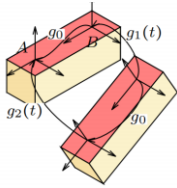
由线性代数相关知识，我们可以知道，伴随矩阵有以下性质：

- 矩阵逆的伴随等于伴随矩阵的逆
- 两矩阵相乘的伴随等于两矩阵伴随的相乘

由前述证明过程，我们也很容易得到，在旋转运动下：

$$V_{ab}^s = \xi \dot{\theta} \quad V_{ab}^b = Ad_{g_{ab}^{-1}(0)} \xi \dot{\theta}$$

对于一个下图所示的刚体，由推导易知：



$$g_2(t) = g_0 \cdot g_1(t) \cdot g_0^{-1} \Rightarrow V_2^s = Ad_{g_0} \cdot V_1^s$$

Part3 坐标变换 (Coordinate Transformation)

如果有如下复合运动：

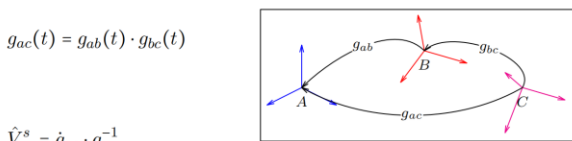


Figure 4.4

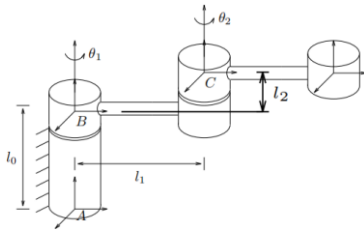
$$g_{ac}(t) = g_{ab}(t) \cdot g_{bc}(t)$$

$$\begin{aligned} \hat{V}_{ac}^s &= \dot{g}_{ac} \cdot g_{ac}^{-1} \\ &= (\dot{g}_{ab} \cdot g_{bc} + g_{ab} \cdot \dot{g}_{bc})(g_{bc}^{-1} \cdot g_{ab}^{-1}) \\ &= \dot{g}_{ab} \cdot g_{ab}^{-1} + g_{ab} \cdot \dot{g}_{bc} \cdot g_{bc}^{-1} \cdot g_{ab}^{-1} = \hat{V}_{ab}^s + g_{ab} \hat{V}_{bc}^s g_{ab}^{-1} \end{aligned}$$

可以推导得到： $V_{ac}^s = V_{ab}^s + Ad_{g_{ab}} V_{bc}^s$

类似地： $V_{ac}^b = Ad_{g_{bc}^{-1}} V_{ab}^b + V_{bc}^b$

对下图所示机器人而言：



$$g_{ab}(\theta_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ B关节相对于A关节只有一个旋转运动, 由旋转运动下的速度公式}$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, V_{ab}^s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \dot{\theta}_1 \quad (\xi_i = \begin{pmatrix} -\omega_i \times q_i \\ \omega_i \end{pmatrix}, -\omega_i \times q_i \text{为旋转引起的平动})$$

$$g_{ab}(\theta_2) = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 由旋量计算公式计算得:}$$

$$\xi_2 = \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, V_{bc}^s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \dot{\theta}_2$$

则根据伴随矩阵的定义和公式 $V_{ac}^s = V_{ab}^s + Ad_{g_{ab}} V_{bc}^s$, 即可写出:

$$V_{ac}^s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \dot{\theta}_1 + \begin{pmatrix} l_1 \cos\theta_1 \\ l_1 \sin\theta_1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \dot{\theta}_2$$

Lec4 机器人运动学

Part1 正运动学 (Forward Kinematics)

Definition: given θ , find g

在机器人学中, 常用到的关节有:

旋转关节 (Revolute joint) 用S表示

平移关节 (Prismatic joint) 用R表示

则以下为机器人运动求正解 (Forward Kinematics) 的指数积公式:

$$g_{st}(\theta) = e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} \dots e^{\hat{\xi}_n \theta_n} g_{st}(0) \quad (4.1.1)$$

其中, $e^{\hat{\xi}_i \theta_i}$ 表示第*i*个自由度处的转移矩阵, 其简单表达形式为 $\begin{pmatrix} R_i & P_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 具体计算如下:

$$\text{在 } \omega = 0 \text{ 时 (物体为纯平移) } e^{\hat{\xi} \theta} = \begin{pmatrix} I_{3 \times 3} & v \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.1.2)$$

$$\text{在 } \omega \neq 0 \text{ 且物体纯旋转时 } e^{\hat{\xi} \theta} = \begin{pmatrix} e^{\hat{\omega} \theta} & (I - e^{\hat{\omega} \theta}) \hat{\omega} v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.1.3)$$

以上过程说明, 任意一个刚体运动, 都可以最终找到一个轴线, 用其绕轴线旋转多少角度, 平移多少距离来描述。

以下说明求正解的过程:

Step1: 根据实际情况写出 $g_{st}(0)$: $g_{st}(0) = \begin{pmatrix} I_{3 \times 3} & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 其中, p 代表末端坐标系相对于S系 (Spatial frame) 的位置。

Step2: 写出每个旋转处的 ω_i : ω_i 为代表旋转轴的方向向量。

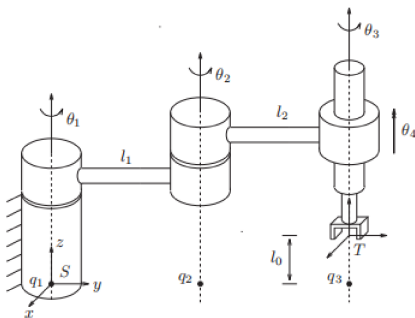
Step3: 找 q_i 点, 遵从从简原则: q_i 代表某个位置相对于S系原点的坐标。

Step4: 求 ξ_i : 旋转关节下, $\xi_i = \begin{pmatrix} -\omega_i \times q_i \\ \omega_i \end{pmatrix}$; 平移关节下, $\xi_i = \begin{pmatrix} v_i \\ 0 \end{pmatrix}$ 。

Step5: 求 $e^{\hat{\xi}_i \theta_i}$: 根据4.1.2公式和4.1.3公式计算。

Step6: 求 $g_{st}(\theta)$: $g_{st}(\theta) = e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} \dots e^{\hat{\xi}_n \theta_n} g_{st}(0)$ 。

以下进行举例计算说明:



如图, 我们要求解T系相对于S系的变换矩阵, 按前述步骤进行:

$$g_{st}(0) = \begin{pmatrix} I_{3 \times 3} & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 0 \\ l_1 + l_2 \\ l_0 \end{pmatrix} \quad \text{T系原点相对于S系原点: } y \text{ 方向距离 } l_1 + l_2, \quad z \text{ 方向距离 } l_0$$

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \omega_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{三处旋转轴, 根据右手定则, 旋转轴均为 } z \text{ 正方向, 写出 } \omega_i$$

$$q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ l_1 + l_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{从简原则进行选取}$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} l_1 + l_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

根据 ξ_i 的计算公式求解: 1, 2, 3为旋转关节; 4为平移关节

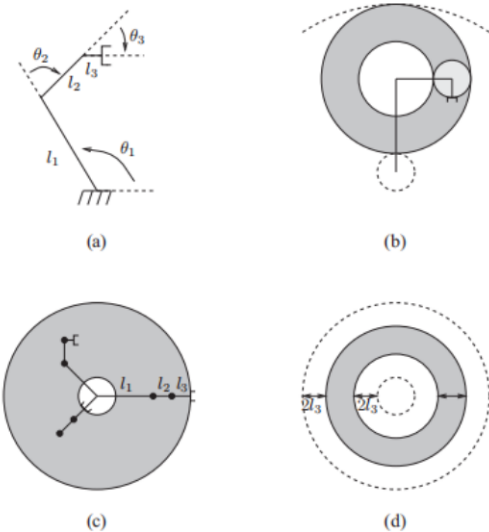
$$e^{\xi_1 \theta_1} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, e^{\xi_2 \theta_2} = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & l_1 \sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & l_1(1 - \cos\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{\xi_3 \theta_3} = \begin{pmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & (l_1 + l_2) \sin\theta_3 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & (l_1 + l_2)(1 - \cos\theta_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, e^{\xi_4 \theta_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \theta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g_{st}(\theta) = e^{\xi_1 \theta_1} e^{\xi_2 \theta_2} \dots e^{\xi_4 \theta_4} g_{st}(0) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 & x \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

其中, $\phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$, $x = -l_1 \sin\theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$, $y = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$, $z = l_0 + \theta_4$

Part2 工作空间 (workspace)



对于上图(a)所示的机械臂, 根据几何关系, 可以很轻松地求得末端位置相对于原点的坐标:

$$x = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$y = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$\phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

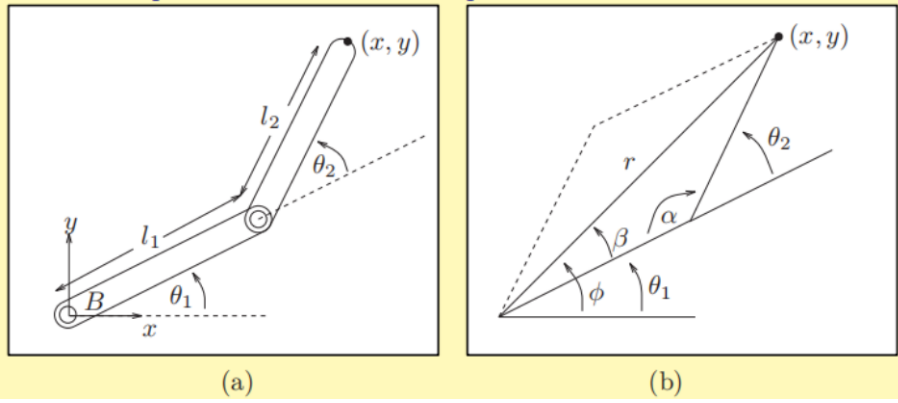
则可以用 $g = (x, y, \phi)$ 来表示工作空间

图中, (c)表示可达工作空间 (Reachable workspace), (d)表示灵巧工作空间 (Dextrous workspace)

那么研究机械臂的工作空间——Inverse Kinematics (逆向运动学)

Part3 逆运动学 (Inverse Kinematics)

Definition: given g , find θ



例：如图，可以解得

$$x = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (4.3.1)$$

$$y = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (4.3.2)$$

求逆运动学：Given(x,y), solve for(θ_1, θ_2)

$$x - l_1 \cos\theta_1 = l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y - l_1 \sin\theta_1 = l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

两边平方，上下式子左右相加，利用万能公式代换，得：

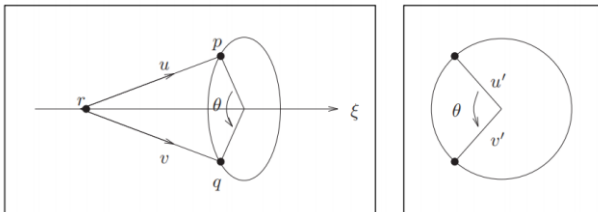
$$\theta_2 = \pi \pm \alpha, \quad \alpha = \cos^{-1} \frac{l_1^2 + l_2^2 - r^2}{2 l_1 l_2}$$

$$\theta_1 = \text{atan2}(y, x) \pm \beta, \quad \beta = \arccos \frac{l_1^2 - l_2^2 + r^2}{2 l_1 r}$$

上述过程没有一个通用的求解过程——逆解的特点

以下介绍子问题 (Subproblems)，这种方法适用于大多数机器人的逆解求法

Subproblem 1: Rotation about a single axis (绕一根轴进行旋转)



Solution: 设 ξ 是单位大小的零螺距运动旋量, p, q 为两个点。求 θ , 使得 $e^{\hat{\xi}\theta} p = q$ (4.3.3)

这个问题对应于, 围绕给定的轴 ξ 旋转一个点 p , 直到它与第二个点 q 重合

设 r 是轴 ξ 上的一个点。将 $u = (p - r)$ 定义为 r 和 p 之间的向量; 将 $v = (q - r)$ 定义为 r 和 q 之间的向量

由式 (4.3.3) 和 $e^{\hat{\xi}\theta} r = r$ (因为 r 在轴 ξ 上), 可以得出以下结论: $e^{\hat{\omega}\theta} u = v$ (4.3.4)

且有 $e^{\hat{\omega}\theta} u = e^{\hat{\xi}\theta} u$ (4.3.5)

要确定这个问题何时有解, 如图2中定义 u 与 v 在圆面上的投影, ω 为轴 ξ 方向上的单位向量, 有:

$$w = u - \omega \omega^T u, \quad v = v - \omega \omega^T v \quad (4.3.6)$$

只有当 u 和 v 在 ω 轴上的投影长度相等, 在垂直于 ω 轴的平面上投影长度相等时, 这个问题有解。

换而言之, 问题有解的必要条件:

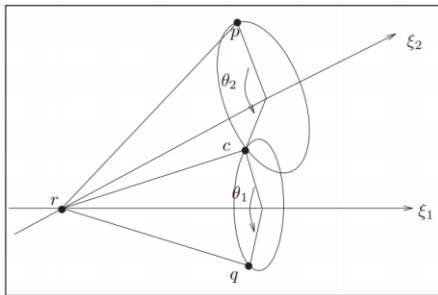
$$\omega^T u = \omega^T v; \quad \|w\| = \|v\| \quad (4.3.7)$$

如果满足4.3.7式, 我们可以通过只关注投影向量来求解 θ 。

如果 w 不为零, 则 $\theta = \arctan \frac{\omega^T (w \times v)}{w^T v}$ (4.3.8)

如果 u 为零, 有无穷多个解

Subproblem 2: Rotation about two subsequent axes (先后绕两个轴旋转)



Solution: 设 ξ_1, ξ_2 是两个单位大小的零螺距运动旋量, 有相交的轴和 p, q 为两个点. 求 θ_1, θ_2 , 使得 $e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} p = q$

这个问题对应于 p 先绕着 ξ_2 旋转 θ_2 , 再绕着 ξ_1 旋转 θ_1 , 最后与 q 重合

如果两个轴线重合, 则这个问题退化为 subproblem 1 和任意 $\theta_1 + \theta_2 = \theta$ 是一个解

其中 θ 是 subproblem 1 的解.

如果两个轴线不平行, 设 c 为一个点, 满足 $e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} p = c = e^{-\hat{\xi}_1 \theta_1} q$

换言之, c 代表 p 绕着 ξ_2 旋转 θ_2 达到的点, 设 r 是两轴的交点, 使得

$$e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} (p - r) = c - r = e^{-\hat{\xi}_1 \theta_1} (q - r) \tag{4.3.9}$$

定义 $u = (p - r), v = (q - r), z = (c - r)$, 将这些代入上式, 推导可得:

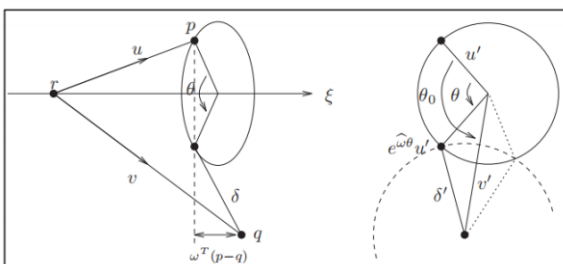
$z = \alpha \omega_1 + \beta \omega_2 + \gamma (\omega_1 \times \omega_2)$, 其中

$$\alpha = \frac{(\omega_1^T \omega_2) \omega_2^T u - \omega_1^T v}{(\omega_1^T \omega_2)^2 - 1}, \beta = \frac{(\omega_1^T \omega_2) \omega_1^T v - \omega_2^T u}{(\omega_1^T \omega_2)^2 - 1}, \gamma^2 = \frac{\|u\|^2 - \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta \omega_1^T \omega_2}{\|\omega_1 \times \omega_2\|^2} \tag{4.3.10}$$

通过这些, 我们可以找到 c , 从而解下面方程 (利用 subproblem 1), 从而得到 θ_1, θ_2 :

$$e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} p = c \quad e^{-\hat{\xi}_1 \theta_1} q = c \tag{4.3.11}$$

Subproblem 3: Rotation to a given point (旋转到给定点)



Solution: 设 ξ 是单位大小的零螺距运动旋量, p, q 为两个点. δ 是大于零的实数, 求 θ , 使得

$$\|q - e^{\hat{\xi} \theta} p\| = \delta$$

定义 $u = (p - r), v = (q - r)$, 使得 $\|v - e^{\hat{\omega} \theta} u\|^2 = \delta^2$

向量 u, v 的投影:

$$w = u - \omega \omega^T u, \quad v' = v - \omega \omega^T v$$

通过减去 $p - q$ 在 ω 上的分量来投影 δ :

$$\text{等式变为 } \|v' - e^{\hat{\omega} \theta} w\|^2 = \delta^2$$

令 θ_0 为 w 和 v' 所成的角度, 则 $\theta_0 = \arctan \frac{\omega^T (w \times v')}{w^T v'}$

$$\theta = \theta_0 \pm \arccos \frac{\|u\| + \|v\| - \delta^2}{2\|u\|\|v\|}$$

Solving Inverse Kinematics Using Subproblems

简化的基本技巧是将运动方程应用于特殊点，如两个或多个轴的交点

Technique1: Eliminate the dependence on a joint (消除对某个关节的依赖)

$$\text{if } p \in l_{\xi_i}, \quad e^{\hat{\xi}_i \theta_i} p = p$$

Thus, given $e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} e^{\hat{\xi}_3 \theta_3} = g$, select $p \in l_{\xi_3}$, $p \notin l_{\xi_1}$ or l_{ξ_2} , then:

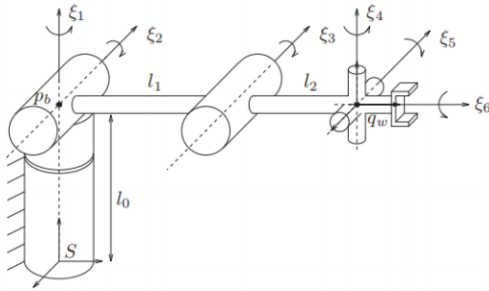
$$gp = e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} p \quad (\text{转化为subproblem2})$$

Technique2: subtract a common point (减去一个共同点)

$$e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} e^{\hat{\xi}_3 \theta_3} = g, \quad q \in l_{\xi_1} \cap l_{\xi_2} \Rightarrow e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} e^{\hat{\xi}_3 \theta_3} p - q = gp - q \Rightarrow \|e^{\hat{\xi}_3 \theta_3} p - q\| = \|gp - q\|$$

(转化为subproblem3)

Example1: Elbow Manipulator



显然，这个机器人建立起的方程为： $g_{st}(\theta) = e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} \dots e^{\hat{\xi}_6 \theta_6} g_{st}(0)$ ，令 $g_{st}(\theta) = g_d$

$$\Rightarrow e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} \dots e^{\hat{\xi}_6 \theta_6} = g_d \cdot g_{st}^{-1}(0) = g_I$$

Step1: Solve for θ_3

$$\text{令 } e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} \dots e^{\hat{\xi}_6 \theta_6} q_\omega = g_I \cdot q_\omega \Rightarrow e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} e^{\hat{\xi}_3 \theta_3} q_\omega = g_I \cdot q_\omega \quad (q_\omega \text{ 在 } l_{\xi_4}, l_{\xi_5}, l_{\xi_6} \text{ 上}) \quad (4.3.12)$$

从方程4.3.12两边减去位于前两条轴交点的点 p_b ：

$$e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} e^{\hat{\xi}_3 \theta_3} q_\omega - p_b = g_I \cdot q_\omega - p_b, \quad \text{该式子等价于:}$$

$$e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} (e^{\hat{\xi}_3 \theta_3} q_\omega - p_b) = g_I \cdot q_\omega - p_b \quad (p_b \text{ 在轴 } \xi_1, \xi_2 \text{ 上}) \quad (4.3.13)$$

根据刚体运动的保距性，有：

$$\|e^{\hat{\xi}_3 \theta_3} q_\omega - p_b\| = \|g_I \cdot q_\omega - p_b\| \quad (4.3.14)$$

令 $\delta = \|g_I \cdot q_\omega - p_b\|$ ，4.3.14式的求解转化为subproblem3的问题

Step2: Solve for θ_1, θ_2

由于上一步已经求出 θ_3 ，方程4.3.12变为：

$$e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} (e^{\hat{\xi}_3 \theta_3} q_\omega) = g_I \cdot q_\omega \quad (4.3.15)$$

对上式应用subproblem2：其中 $p = e^{\hat{\xi}_3 \theta_3} q_\omega$ ， $q = g_I \cdot q_\omega$

Step3: Solve for θ_4, θ_5

当解出前三个角时，剩下的问题可以表示为：

$$e^{\hat{\xi}_4 \theta_4} e^{\hat{\xi}_5 \theta_5} e^{\hat{\xi}_6 \theta_6} = e^{-\hat{\xi}_3 \theta_3} e^{-\hat{\xi}_2 \theta_2} e^{-\hat{\xi}_1 \theta_1} g_d \cdot g_{st}^{-1}(0) = g_2 \quad (4.3.16)$$

在等式两边应用在上在 ξ_6 上的一点 p ，它在 ξ_6 上而不在 ξ_4, ξ_5 上，上式变为：

$$e^{\hat{\xi}_4 \theta_4} e^{\hat{\xi}_5 \theta_5} p = g_2 p \quad (4.3.17)$$

对上式应用subproblem2，可以求得 θ_4, θ_5

Step4: Solve for θ_6

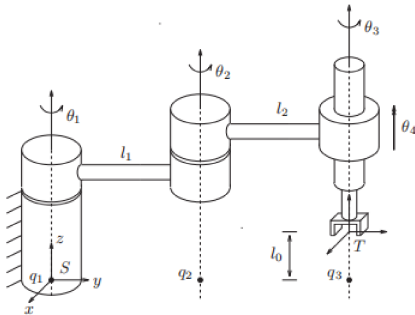
类似于4.3.16的化简方法，原式化为： $e^{\hat{\xi}_6 \theta_6} p = e^{-\hat{\xi}_5 \theta_5} \dots e^{-\hat{\xi}_1 \theta_1} g_d \cdot g_{st}^{-1}(0) p = q$ (4.3.18)

其中，应用的点 p 需要满足不在 ξ_6 轴上

则对4.3.18式应用subproblem1，即可解出 θ_6

经过以上4步，即可解出 $\theta_1 \sim \theta_6$ 这6个角度，由于4.3.14, 4.3.15, 4.3.17的多解性，理论上最多有8个可能解。

Example2: SCARA Manipulator



由前面正运动学的求解，我们可以知道：

$$g_{st}(\theta) = e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} \dots e^{\hat{\xi}_4 \theta_4} g_{st}(0) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 & x \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = g_d$$

因此，我们可以求解在给定 x, y, z 和 ϕ 时的逆运动学

首先，由 $z = l_0 + \theta_4$ ，可以解出 θ_4

当 θ_4 解出后，重新排列方程：

$$e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} e^{\hat{\xi}_3 \theta_3} = g_d \cdot g_{st}^{-1}(0) e^{-\hat{\xi}_4 \theta_4} = g_1 \quad (4.3.19)$$

设 p 是在 ξ_3 轴上的一个点， q 是在 ξ_1 轴上的一个点，对上述方程两边应用 p ，减去 q ，得

$$e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} p - q = g_1 \cdot p - q, \text{ 化简得:}$$

$$\|e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} p - q\| = \|g_1 \cdot p - q\| \quad (4.3.20)$$

对4.3.20式应用subproblem3，可以求出 θ_2 的值

再将4.3.19应用于 ξ_3 轴上的一点 p' ，可以得到下列式子：

$$e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} (e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} p') = g_1 p' \quad (4.3.21)$$

对4.3.21式应用subproblem1，可以求出 θ_1 的值

最后，这个式子转化成了类似于elbow机器人最后一步中方程的样子，利用相同方法，求解 θ_3

由于4.3.20可能有两组解，理论上最多可能有两个可能解

Lec5 雅可比矩阵($V = J\dot{\theta}$)

Part1 工具坐标系的速度 (Velocity of The Tool Frame)

Given g_{st}

$\theta(t) = (\theta_1(t), \theta_2(t), \dots, \theta_n(t))^T$, and $\dot{\theta}(t) = (\dot{\theta}_1(t), \dot{\theta}_2(t), \dots, \dot{\theta}_n(t))^T$

则由前置刚体速度的知识, 我们知道

$\hat{V}_{st}^s = \dot{g}_{st}(\theta)g_{st}^{-1}(\theta)$ (Tool frame 相对于 Spatial frame 在 Spatial frame 下的速度)

其中, $g_{st}(\theta) = e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} \dots e^{\hat{\xi}_n \theta_n} g_{st}(0)$

则有: $\dot{g}_{st}(\theta) = \frac{\partial g_{st}}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1 + \frac{\partial g_{st}}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2 + \frac{\partial g_{st}}{\partial \theta_3} \dot{\theta}_3 + \dots + \frac{\partial g_{st}}{\partial \theta_n} \dot{\theta}_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_{st}}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i$

则有: $\hat{V}_{st}^s = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g_{st}}{\partial \theta_i} g_{st}^{-1}(\theta) \right)^V \dot{\theta}_i$

推导 (过程见课件) 可以得到: $\left(\frac{\partial g_{st}}{\partial \theta_i} g_{st}^{-1}(\theta) \right)^V = \text{Ad}_{e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} \dots e^{\hat{\xi}_{i-1} \theta_{i-1}}} \xi_i$ (Ad表示伴随矩阵) = ξ_i

则我们记 $[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n] = J_{st}^s(\theta)$ 为雅可比矩阵, 其是 θ 的函数 (只与其相关)

它是一个依赖于位型的矩阵, 将关节速度映射为末端执行器的速度

Part2 物体雅可比矩阵 (Body Jacobian)

Interpretation of ξ_i :

- (1) ξ_i 只受 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{i-1}$ 的影响
- (2) 它是一个将第 i 个关节坐标系由参考位形变换到机器人当前位形的刚体变换

我们也可以定义机器人的body Jacobian:

Definition: $\hat{V}_{st}^b = J_{st}^b(\theta) \dot{\theta}$

经过与前面的计算过程类似的过程, 我们可以得到:

$J_{st}^b(\theta) = [\xi_1^+ \dots \xi_{n-1}^+, \xi_n^+]$

其中, $\xi_i^+ = \text{Ad}_{e^{\hat{\xi}_{i+1} \theta_{i+1}} \dots e^{\hat{\xi}_n \theta_n} g_{st}(0)}^{-1} \xi_i$

$J_{st}^b(\theta)$ 的各列对应于当前位形在工具坐标系中表示的关节运动螺旋。

通过选择 S 使得 $g_{st}(0) = I$ 来简化计算, 空间雅可比矩阵与物体雅可比矩阵之间的关系可以用一个伴随变换描述:

$J_{st}^s(\theta) = \text{Ad}_{g_{st}(\theta)} \cdot J_{st}^b(\theta)$

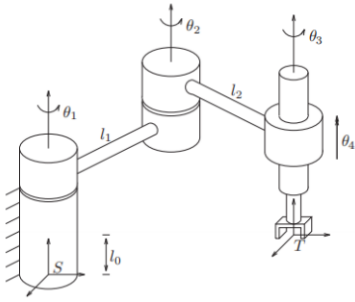
如果 J_{st}^s 是可逆矩阵, 则有: $\theta(t) = (J_{st}^s(\theta))^{-1} \hat{V}_{st}^s(t)$

总结上面的计算过程, 思考: Given $g(t)$, how to find $\theta(t)$?

step1: $\hat{V}_{st}^s = \dot{g}(t)g^{-1}(t)$

step2: $\theta(t) = (J_{st}^s(\theta))^{-1} \hat{V}_{st}^s(t); \theta(0) = \theta_0$

Example1: Jacobian for a SCARA Manipulator



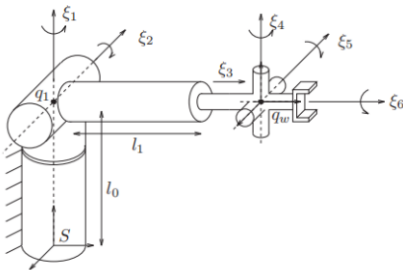
观察上图, 可知: $q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $q_2' = \begin{pmatrix} -l_1 \sin\theta_1 \\ l_1 \cos\theta_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $q_3' = \begin{pmatrix} -l_1 \sin\theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{pmatrix}$

显然: $\omega_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\omega_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\omega_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

计算得: $\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2' = \begin{pmatrix} l_1 \cos\theta_1 \\ l_1 \sin\theta_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\xi_3' = \begin{pmatrix} l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\xi_4' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

则可写出雅可比矩阵: $J_{st}^s(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & l_1 \cos\theta_1 & l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & l_1 \sin\theta_1 & l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Example2: Jacobian for a Stanford Arm Manipulator



推导过程见课件 (ps: 21级课件有误)

以上过程通过雅可比矩阵, 构建了关节速度 ($\dot{\theta}$) 与工具 (工作区) 速度 ($J_{st}^s(\theta)$) 之间的桥梁

Part3 末端执行器的力与结构力 (End-effector/Structural Force)

雅可比矩阵除了构建上述关系, 还描述了作用在末端执行器上的力螺旋(F)与各关节力矩(τ)间的关系。

$$W = \int_{t_1}^{t_2} V_{st}^b \cdot F_t dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\theta} \cdot \tau dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\theta}^T \cdot J_{st}^b(\theta)^T F_t dt$$

可以得到: $\tau = (J_{st}^b)^T F_t = (J_{st}^s)^T F_s$

引出问题:

如果已知作用于末端执行器上的力, 那么能克服此力做功所需的关节力矩应为多少?

如果已知关节力矩, 那么在末端执行器上能够获得多大的力螺旋?

由上式可以解决任何情况下的问题一, 对于问题二, 如果雅可比矩阵可逆, 也可以解得

如果雅可比矩阵不可逆呢（有可能非方阵）？

此部分lyj没有详细讲，感兴趣的同学可以复习控制里的子空间的概念，来理解问题二的解决思路。

Part4 奇异性与可控性 (Singularities and Manipulability)

Singularities

对于给定的某一位形，机器人的雅可比矩阵描述了末端执行器的瞬时速度于各关节速度之间的关系而机器人的奇异位形是机器人雅可比矩阵降秩时所处的位形，此时：

$$\hat{V}_{st}^s = J_{st}^s(\theta) \dot{\theta} = 0 \quad (\dot{\theta} \text{不为0向量})$$

思考：降秩——说明某些行列线性相关，在特殊的 θ 矩阵下，使得末端执行器的速度为0不变化即存在一个不为零的关节角速度向量，使得末端执行器处的速度为0——奇异位形

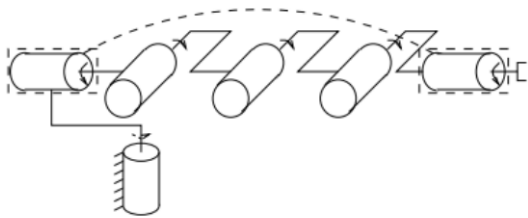
产生的后果：

- 末端执行器在某些方向上不能运动
- 在奇异位形附近，为了得到末端执行器的速度，需要很大的关节速度
- 会产生很大的结构力，会损坏机器人本身
- 在某些方向不能施加力

所以，我们需要知道奇异点的位置，然后避开这些位形进行轨迹规划。

Singularities for 6R Manipulator

case1: Two collinear revolute joints (共轴两旋转关节)



对于6R机器人，如果存在两个转动关节，其运动螺旋：

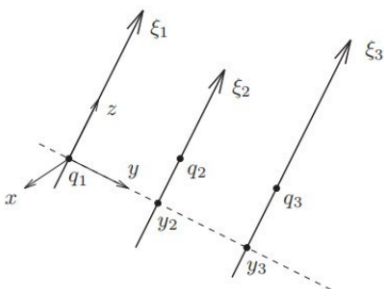
$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -\omega_1 \times q_1 \\ \omega_1 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -\omega_2 \times q_2 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

满足如下条件：

- (1) 关节轴线平行: $\omega_1 = \pm\omega_2$
- (2) 关节轴线共线: $\omega_i \times (q_1 - q_2) = 0$

则该6R机器人的雅可比矩阵是奇异的

case2: Three parallel coplanar revolute joint axes (轴线平行共面的三个旋转关节)



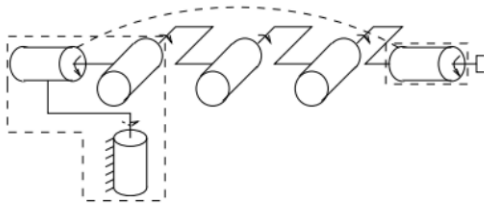
对于6R机器人，如果存在满足以下条件的三个转动关节：

$$(1) \text{ 关节轴线平行: } \omega_i = \pm\omega_j \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$(2) \text{ 关节轴线共面: 存在一个平面, 其单位法向量 } n \text{ 满足 } n^T \omega_i = 0 \text{ 和 } n^T (q_i - q_j) = 0 \quad i, j = 1, 2, 3$$

则该6R机器人的雅可比矩阵是奇异的

case3: Four intersecting revolute joints axes (轴线汇于一点的四个旋转关节)



对于6R机器人，如果存在满足以下条件的四个转动关节：

$$\omega_i \times (q_i - q) = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4$$

则该6R机器人的雅可比矩阵是奇异的

Manipulability

可控性可以从两个方面进行度量：

- (1) 到达某一确定位置或一系列位置的能力
- (2) 在某一给定位形处，改变位置或姿态的能力

Part5 单值分解 (Single Value Decomposition)

PS:前半部分和线性代数相关，lyj跳过

Manipulability Measures

$$k(A) = \frac{\sigma_1(A)}{\sigma_r(A)} \quad \text{Inverse condition number, } k(A) \geq 1$$

其中， $\sigma = \sqrt{\lambda(A^T A)}$ ，定义为A的奇异值 ($A^T A$ 的特征值开根号)

一般，我们用 $\mu_2(\theta) = \frac{\sigma_{\min}(A)}{\sigma_{\max}(A)}$ 来定义可操作数，这个数越接近于1，代表可操作越好

把A换成雅可比矩阵，即可以用这种方法来描述可操作性的好与坏 (这是一个相对指标)

也可以用绝对指标来描述可操作性的好与坏：

$$\mu_1(\theta) = \sigma_{\min}(J)$$

$$\mu_3(\theta) = \det(J) = \prod_{i=1}^n \sigma_i(J)$$

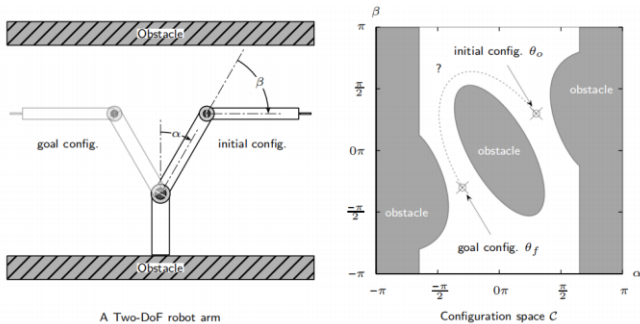
$$\mu_4(\theta) = n / \sqrt{\text{tr}(AA^T) \text{tr}(AA^T)^{-1}}$$

Lec6 机器人轨迹规划

Part1 轨迹生成 (Trajectory Generation)

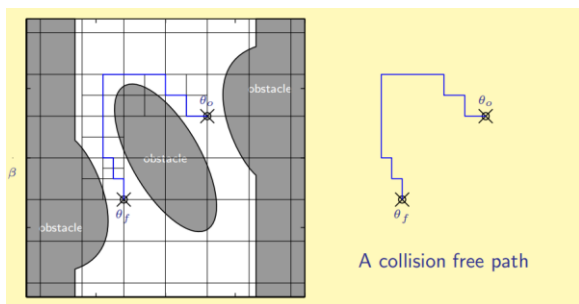
Definition: Path Planning

给定一个机器人在C系下初始位置对应的 θ_0 和末端位置对应的 θ_f
 找到一条无碰撞的运动轨迹 $\theta: [0,1]$, 使得 $\theta(0) = \theta_0$ 且 $\theta(1) = \theta_f$



生成方法:

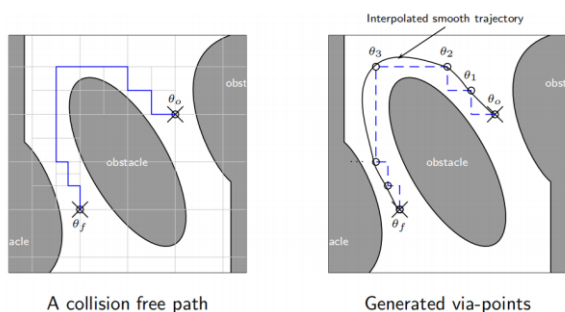
(1) Cell decomposition



基本思想:

将上面的C空间划分成为一个一个以“步长”为单位的网格, 使得 θ_0 沿网格上的初始位置出发
 朝向目标位置每次移动一个步长。如果其中碰到障碍物, 缩短这一步长为原长的一半, 继续尝试
 最后, 在不碰到限位 (最好也不要过于接近) 的前提下, 生成右图所示的路径
 如果我们想要提高机器人的效率, 基于上述轨迹, 我们可以做一个曲线的拟合:

Definition: Trajectory Generation



给出 θ_0 , θ_f 和一系列路径点 $\theta_k, k = 1, 2, \dots, n-1$

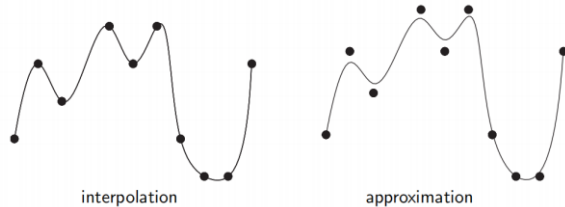
计算出一个光滑的轨迹 $\theta: [t_0, t_n]$, 使得 $\theta(t_0) = \theta_0, \dots, \theta(t_k) = \theta_k, \dots, \theta(t_n) = \theta_f$

【注意】这个轨迹应满足: 计算量小, 计算迅速, 实时规划。

轨迹生成的实现方法：

- (1) by a path planner (通过写一个路径规划器)
- (2) by a teach pendant (通过示教器)
- (3) by G_code (through CAM software) ——使用运动学逆解，逆雅可比矩阵生成关节坐标与速度信息

如果已知Via Points，我们可以通过以下两种方法来进行轨迹生成



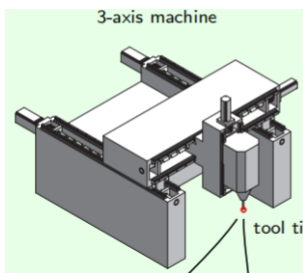
Definition: Interpolation (插值)

生成一条严格经过所有路径点的曲线，包括起点终点

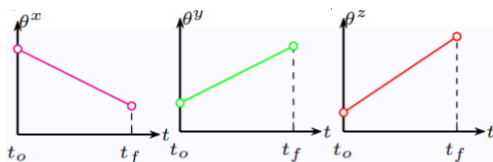
Definition: Approximation (近似)

不一定严格经过所有路径点，但一定经过起点终点

以一个简单的直角坐标系机器人为例：



它的三个电机旋转角度相对于时间的关系如下图所示：

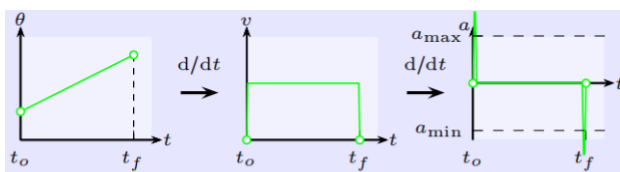


则根据两点确定一条直线的公式，有：

$$\theta(t) = \theta_o + \frac{t - t_o}{t_f - t_o}(\theta_f - \theta_o) = a_0 + a_1 t, a_0 = \frac{t_f \theta_o - t_o \theta_f}{t_f - t_o}, a_1 = \frac{\theta_f - \theta_o}{t_f - t_o}$$

则可以确定末端工作点在空间中的轨迹

以y方向为例，我们对曲线求导数，可以得到速度与加速度：



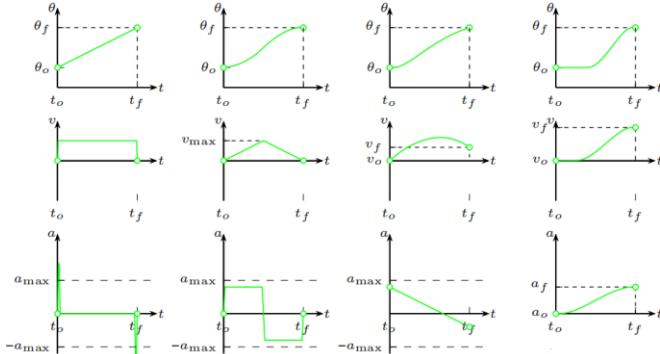
这时候我们就发现了问题：速度不连续（阶跃），加速度有冲激，无法明确初始速度，末端速度速度不连续可能导致生产的产品出现问题，“加速度有冲激”在工程上不易实现

这时候，我们可以思考如何解决这个问题，一种简单的思路是，轨迹升阶。

Higher order trajectories:

order of θ	order of v	order of a	allowable design variables
2 (parabolic)	1	0	$\theta_o, \theta_f, v_{max}$
3 (cubic)	2	1	$\theta_o, \theta_f, v_o, v_f$
5 (quintic)	4	3	$\theta_o, \theta_f, v_o, v_f, a_o, a_f$

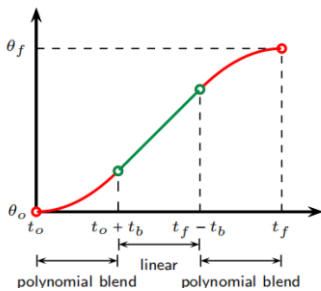
在保证起点终点不变的情况下，我们将直线曲线化，以y方向为例



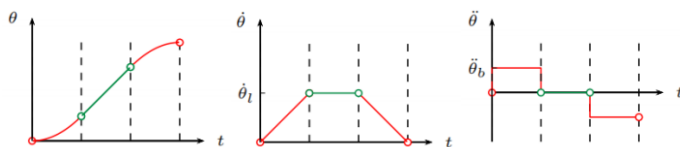
第二列，第三列，第四列分别对应2阶，3阶，5阶的情况

LFPB (Linear Function with Parabolic Blends)

在实际实现中，直线意味着更高的效率，曲线意味着可以工作地更平滑，思考：如何达到平衡？



即起初与末端段（涉及到速度加速度不跳变的部分）采用曲线过渡，中间部分采用直线。求导，有：



三个曲线分别对应路径曲线，速度曲线，加速度曲线（这是二阶曲线的情况）

一些常用的过渡方法：

- Linear with parabolic 2-1-2
- Linear with circular
- Linear with quintic 5-1-5
- Linear with S 3-2-3-1-3-2-3

控制时给出： $\theta_o, \theta_f, t_d = t_f - t_o$

在上述曲线中，我们设 $t_0 = 0$ ， t_b 时刻对应的 θ 为 θ_b ， $t_d = t_f - t_0$ 则根据曲线，有：

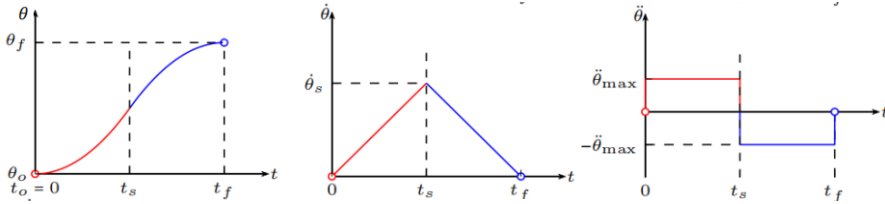
◇ LFPB Trajectory:

$$\theta(t) = \begin{cases} \theta_o + \frac{1}{2}\ddot{\theta}_b(t-t_o)^2 & t_o \leq t < t_o + t_b \\ \theta_o + \dot{\theta}_b t_b (t-t_o - \frac{t_b}{2}) & t_o + t_b \leq t < t_f - t_b \\ \theta_f - \frac{1}{2}\ddot{\theta}_b(t_f-t)^2 & t_f - t_b \leq t \leq t_f \end{cases}$$

根据实际情况，需要满足：

$$t_b = \frac{t_d}{2} - \frac{\sqrt{\hat{\theta}_b^2 t_d^2 - 4\ddot{\theta}_b(\theta_f - \theta_o)}}{2\ddot{\theta}_b} \quad \ddot{\theta}_b \geq \frac{4(\theta_f - \theta_o)}{t_d^2}$$

Bang Bang (Minimum Time Trajectory)



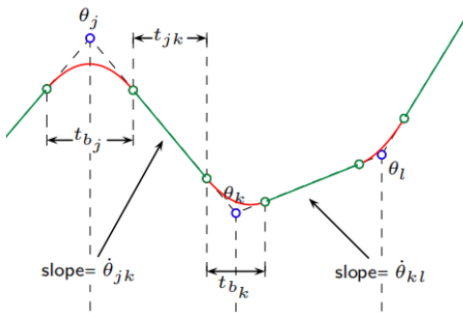
控制时给出: $\theta_o, \theta_f, \ddot{\theta}_{max}$, 则有:

$$\ddot{\theta}(t) = \begin{cases} \ddot{\theta}_{max} & 0 \leq t \leq t_s \\ -\ddot{\theta}_{max} & t_s \leq t \leq t_d \end{cases} \quad t_s = \frac{t_d}{2} = \sqrt{\frac{\theta_f - \theta_o}{\ddot{\theta}_{max}}}$$

LFPB for a Path with Via Points([3])

控制时给出: $\theta_o, t_o, \theta_f, t_f, \ddot{\theta}_b, \{t_i\}$ ($\{t_i\}$ 表示轨迹中每个 θ_i 对应的时刻)

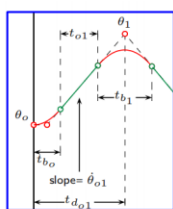
目标: 找到插值在 θ_o 与 θ_f 之间, 对应于时刻 $\{t_i\}$ 的 $\{\theta_i\}$



插入点后, 有以下参数可以计算: 直线段速度; 曲线段加速度与持续时间; 直线段持续时间

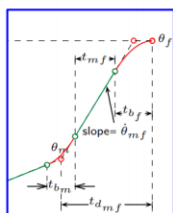
$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{jk} &= \frac{\theta_k - \theta_j}{t_{d_{jk}}} \text{ (linear vel.)} \\ \ddot{\theta}_k &= \text{Sgn}(\dot{\theta}_{kl} - \dot{\theta}_{jk}) |\ddot{\theta}_b| \text{ (Blend acc.)} \\ t_{b_k} &= \frac{\dot{\theta}_{kl} - \dot{\theta}_{jk}}{\ddot{\theta}_k} \text{ (Blend dur.)} \\ t_{jk} &= t_{d_{jk}} - \frac{1}{2}t_{b_j} - \frac{1}{2}t_{b_k} \text{ (Linear dur.)} \end{aligned} \quad \text{说明: } \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

对于起点和终点, 也就是第一段和结束段:



◇ First Segment:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_o &= \text{Sgn}(\theta_1 - \theta_o) |\ddot{\theta}_b| \text{ (Blend acc.)} \\ t_{b_o} &= t_{d_{o1}} - \sqrt{t_{d_{o1}}^2 - \frac{2(\theta_1 - \theta_o)}{\ddot{\theta}_o}} \text{ (Blend dur.)} \\ \dot{\theta}_{o1} &= \frac{\theta_1 - \theta_o}{t_{d_{o1}} - \frac{1}{2}t_{b_o}} \text{ (linear vel.)} \\ t_{o1} &= t_{d_{o1}} - t_{b_o} - \frac{1}{2}t_{b_1} \text{ (linear dur.)} \end{aligned}$$

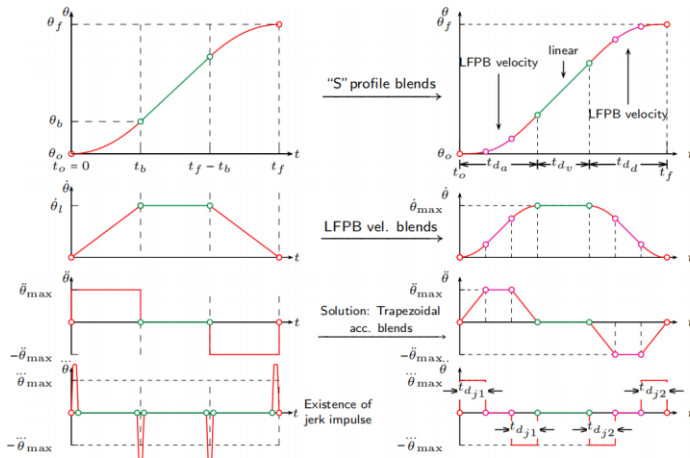


◇ Last Segment:

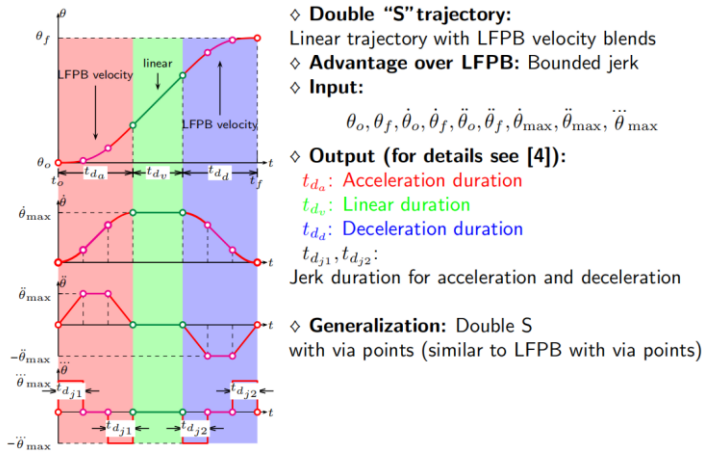
$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_f &= \text{Sgn}(\theta_m - \theta_f) |\ddot{\theta}_b| \text{ (Blend acc.)} \\ t_{b_f} &= t_{d_{mf}} - \sqrt{t_{d_{mf}}^2 + \frac{2(\theta_f - \theta_m)}{\ddot{\theta}_f}} \text{ (Blend dur.)} \\ \dot{\theta}_{mf} &= \frac{\theta_f - \theta_m}{t_{d_{mf}} - \frac{1}{2}t_{b_f}} \text{ (linear vel.)} \\ t_{mf} &= t_{d_{mf}} - t_{b_f} - \frac{1}{2}t_{b_m} \text{ (linear dur.)} \end{aligned}$$

Linear Function with Double S Trajectory

在一些既要求速度快，又要求平稳的场合下，我们需要考虑加加速度这一指标（加速度对于时间的导数）
 这时候，我们可以采用Linear with S的过渡方法来控制，效果如下图所示：

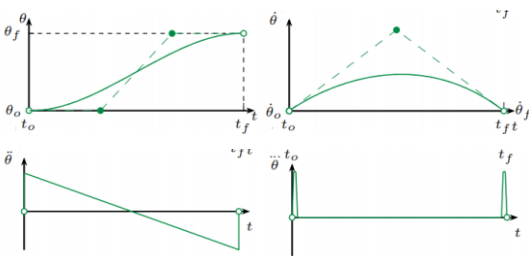


以下为简单说明，包括：输入参数，输出参数，方法简明介绍



Cubic Polynomial Trajectory

这种方法将整条曲线用三次多项式来描述：



曲线满足下列方程：

$$\theta(t) = a_0 + a_1(t - t_o) + a_2(t - t_o)^2 + a_3(t - t_o)^3$$

$$t \in [t_o, t_f], t_d \triangleq t_f - t_o$$

其中的四个参数我们可以求解：

$$\begin{cases} \theta(t_o) = a_0 = \theta_o \\ \dot{\theta}(t_o) = a_1 = \dot{\theta}_o \\ \theta(t_f) = \sum_{i=0}^3 a_i t_d^i = \theta_f \\ \dot{\theta}(t_f) = \sum_{i=0}^2 (i+1) a_{i+1} t_d^i = \dot{\theta}_f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = \theta_o \\ a_1 = \dot{\theta}_o \\ a_2 = \frac{3h - (2\dot{\theta}_o + \dot{\theta}_f)t_d}{t_d^2} \\ a_3 = \frac{-2h + (\dot{\theta}_o + \dot{\theta}_f)t_d}{t_d^3} \end{cases}$$

控制时给出: $\theta_0, t_0, \theta_f, t_f, \{\theta_i\}$ ($\{\theta_i\}$ 表示轨迹中每个 t_i 时刻对应的关节角度)

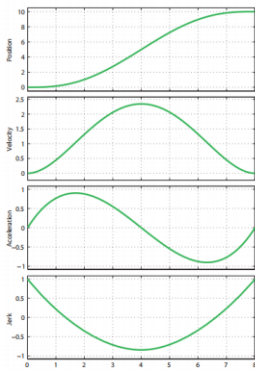
- 1 If via-point velocities $\{\dot{\theta}_k\}_1^m$ are directly assigned by user, solve the $m + 1$ BVPs:

$$\begin{cases} a_{0k} = \theta_o, & a_{1k} = \dot{\theta}_o \\ a_{2k} = \frac{3h - (2\dot{\theta}_o + \dot{\theta}_f)t_d}{t_d^2}, a_{3k} = \frac{-2h + (2\dot{\theta}_o + \dot{\theta}_f)t_d}{t_d^3}, k=0,1,\dots,m \end{cases}$$

- 2 If only $\dot{\theta}_o, \dot{\theta}_f$ are given:

- 1 compute $\{\dot{\theta}_k\}_1^m$ using a heuristic method; or
- 2 design $\{\theta_k\}_1^m$ so as to achieve acceleration continuity

Quintic Polynomial Trajectory



满足下列方程: $\theta(t) = \sum_{i=0}^5 a_i(t - t_o)^i, t \in [t_o, t_f]$, 则:

$$\begin{aligned} a_0 &= \theta_o \\ a_1 &= \dot{\theta}_o \\ a_2 &= \frac{1}{2}\ddot{\theta}_o \\ a_3 &= \frac{1}{2t_d^3}[20h - (8\dot{\theta}_f + 12\dot{\theta}_o)t_d - (3\ddot{\theta}_o - \ddot{\theta}_f)t_d^2] \\ a_4 &= \frac{1}{2t_d^4}[-30h - (14\dot{\theta}_f + 16\dot{\theta}_o)t_d - (3\ddot{\theta}_o - 2\ddot{\theta}_f)t_d^2] \\ a_5 &= \frac{1}{2t_d^5}[12h - 6(\dot{\theta}_f + \dot{\theta}_o)t_d - (\ddot{\theta}_f - \ddot{\theta}_o)t_d^2] \end{aligned}$$

通过前面的不同阶次的控制样例, 我们可以得到一个直观的概念。

空间轨迹的阶次越高, 对应的速度, 加速度, 加加速度曲线就越平滑; 相应的, 计算效率会降低。

前述过程讲述了在关节空间上对一个轴的规划, 接下来需要掌握任务空间的轨迹规划方法。

Trajectory Generation in Task Space

欧氏空间 (R) 下的轨迹规划

在 n 维空间下, 一个轨迹可以描述为:

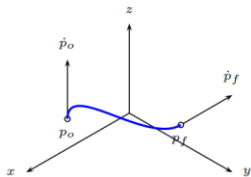
$$p(t) = \begin{bmatrix} a_{01} \\ \vdots \\ a_{0n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix} (t - t_o) + \dots + \begin{bmatrix} a_{m1} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} (t - t_o)^m, t \in [t_o, t_f]$$

在三维空间下, 控制时给出: $p_0, p_f, \dot{p}_0, \dot{p}_f, t_0, t_f, t_d = t_f - t_0, \vec{h} = p_f - p_0$

$$\vec{a}_o + \vec{a}_1(t - t_o) + \vec{a}_2(t - t_o)^2 + \vec{a}_3(t - t_o)^3, t \in [0, 1], \vec{a}_i \in \mathbb{R}^n$$

则可以得到:

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{a}_0 = p_o \\ \bar{a}_1 = \dot{p}_o \\ \bar{a}_2 = \frac{3\bar{h} - (2\dot{p}_o + \dot{p}_f)t_d}{t_d^2} \\ \bar{a}_3 = \frac{-2\bar{h} + (\dot{p}_o + \dot{p}_f)t_d}{t_d^3} \end{cases}$$



姿态空间 (SO(3)) 下的轨迹规划

- 选择实际上有意义的坐标
- 添加路径点避免参数化奇异
- 使用逆解获得关节轨迹

unit quaternion (单位四元数) :

$$Q(R) = \left(\cos \frac{\theta}{2}, \omega \sin \frac{\theta}{2} \right), \hat{\omega} = \frac{R - R^T}{2 \sin \theta}, \theta = \arccos \frac{\text{Tr}R - 1}{2}$$

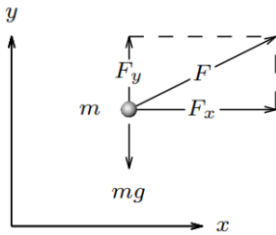
Canonical coordinate (正则坐标) :

$$\hat{r}(R) = \log R = \hat{\omega}\theta, \hat{\omega} = \frac{R - R^T}{2 \sin \theta}, \theta = \arccos \frac{\text{Tr}R - 1}{2}$$

Lec7 机器人动力学

Part1 拉格朗日方程 (Lagrange Equations)

对一个物体进行受力分析:



由牛顿第二定律, 我们可以建立如下的质点的动力学模型:

$$m\ddot{x} = F_x$$

$$m\ddot{y} = F_y - mg$$

Momentum: $P_x = m\dot{x}$

$$P_y = m\dot{y}$$

$$\frac{d}{dt}P_x = F_x, \frac{d}{dt}P_y = F_y - mg$$

但很多时候, 牛顿第二定律分析复杂, 我们可以对上述过程从拉格朗日方程角度进行分析:

Lagrangian Equation:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = F_x \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = F_y \end{cases}$$

我们定义 $L = T - V$ (拉格朗日量), 其中 T 为系统总动能, V 为系统总势能, 满足:

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad V = mgy$$

x, y 是广义坐标, 是时间的函数; \dot{x}, \dot{y} 是广义速度, F 是对应的广义力 (合力)

将上述过程推广到多体系统:

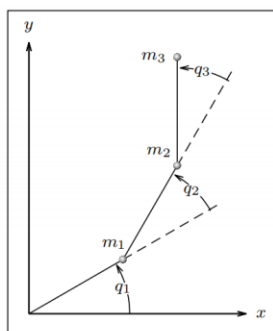


Figure 7.2

$q_i, i = 1, \dots, n$: generalized coordinates

Kinetic energy:

$$T = T(q, \dot{q})$$

Potential energy:

$$V = V(q)$$

Lagrangian:

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q)$$

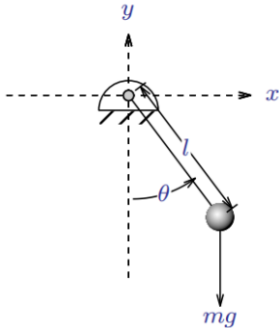
$\tau_i, i = 1, \dots, n$: external force on q_i

Lagrangian Equation:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = 1, \dots, n$$

接下来, 以二维钟摆方程为例, 说明拉格朗日方程的应用

Example1: Pendulum Equation



我们定义这个模型中的 θ 为坐标，其中 $\theta \in S^1$

建立运动学模型：

$$x = l \sin\theta, \quad y = -l \cos\theta, \quad \dot{x} = l \cos\theta \cdot \dot{\theta}, \quad \dot{y} = l \sin\theta \cdot \dot{\theta} \quad (7.1.1)$$

接下来，求解动能与势能：

$$T(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \quad (7.1.2)$$

$$V = m g(1 - \cos\theta) \quad (7.1.3)$$

则可以根据 $L = T - V$ 求出拉格朗日量，进而得到：

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \dot{\theta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -m g l \sin\theta \quad (7.1.4)$$

则根据拉格朗日方程，可以得到该系统的动力学模型：

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau \implies m l^2 \ddot{\theta} + m g l \sin\theta = \tau \quad (7.1.5)$$

以上是对质点的拉格朗日方程，那么对于空间中的刚体呢？

对于空间中的刚体，我们需要考虑的物理量是：刚体动能的计算——平动动能 + 转动动能

以下略去推导过程，直接说结论：

$$T = \frac{1}{2} (V^b)^T \begin{pmatrix} m I & 0 \\ 0 & \Gamma \end{pmatrix} V^b \quad (7.1.6)$$

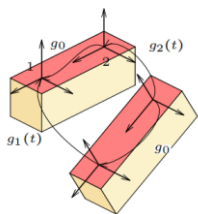
其中：

记 $\begin{pmatrix} m I & 0 \\ 0 & \Gamma \end{pmatrix} = M^b$ ，为在B系下的惯性矩阵，B系为刚体上一点建立的旋转坐标系

$$\mathcal{I} = - \int \rho(r) \hat{r}^2 dV \triangleq \begin{bmatrix} \mathcal{I}_{xx} & \mathcal{I}_{xy} & \mathcal{I}_{xz} \\ \mathcal{I}_{xy} & \mathcal{I}_{yy} & \mathcal{I}_{yz} \\ \mathcal{I}_{xz} & \mathcal{I}_{yz} & \mathcal{I}_{zz} \end{bmatrix}, \quad \Gamma \text{为惯性张量，满足}$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int y^2 + z^2 dm & - \int xy dm & - \int xz dm \\ - \int xy dm & \int x^2 + z^2 dm & - \int yz dm \\ - \int xz dm & - \int yz dm & \int x^2 + y^2 dm \end{bmatrix}$$

在刚体内部坐标系随刚体运动改变的情况下，如图



$$\text{满足 } M_2^b = \text{Ad}_{g_0}^T M_1^b \text{Ad}_{g_0}$$

Example2: Dynamics of A 2-Dof Planar Robot

$$I_i = \begin{bmatrix} I_{xx_i} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_i} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_i} \end{bmatrix}, i = 1, 2$$

$$T(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m_1 \|v_1\|^2 + \frac{1}{2} \omega_1^T I_1 \omega_1 + \frac{1}{2} m_2 \|v_2\|^2 + \frac{1}{2} \omega_2^T I_2 \omega_2$$

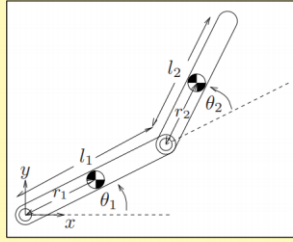


Figure 7.8

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad \omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$P_i = \begin{bmatrix} \bar{x}_i \\ \bar{y}_i \\ 0 \end{bmatrix}$: Mass center

γ_i : Distance from joint i to mass center

Change of Coordinates:

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = r_1 c_1 \\ \bar{y}_1 = r_1 s_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = -r_1 s_1 \dot{\theta}_1 \\ \dot{\bar{y}}_1 = r_1 c_1 \dot{\theta}_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{x}_2 = l_1 c_1 + r_2 c_{12} \\ \bar{y}_2 = l_1 s_1 + r_2 s_{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\bar{x}}_2 = -(l_1 s_1 + r_2 s_{12}) \dot{\theta}_1 - r_2 s_{12} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\bar{y}}_2 = (l_1 c_1 + r_2 c_{12}) \dot{\theta}_1 + r_2 c_{12} \dot{\theta}_2 \end{cases}$$

Kinetic energy:

$$T(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m_1 (\dot{\bar{x}}_1^2 + \dot{\bar{y}}_1^2) + \frac{1}{2} I_{zz_1} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{\bar{x}}_2^2 + \dot{\bar{y}}_2^2) + \frac{1}{2} I_{zz_2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2$$

$$= \frac{1}{2} [\dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2] \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha + 2\beta c_2 & \delta + \beta c_2 \\ \delta + \beta c_2 & \delta \end{bmatrix}}_{M(\theta)} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = I_{zz_1} + I_{zz_2} + m_1 r_1^2 + m_2 (l_1^2 + r_2^2),$$

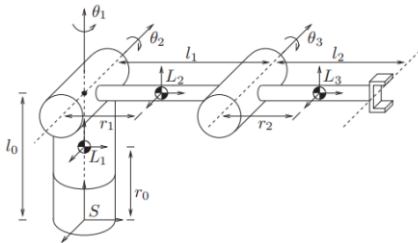
$$\beta = m_2 l_1 r_2, \delta = I_{zz_2} + m_2 r_2^2, L = T$$

Equation of motion:

$$M(\theta) \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta s_2 \dot{\theta}_2 & -\beta s_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ \beta s_2 \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad \diamond$$

Part2 开链机器人动力学 (Dynamics of Open-chain Manipulators)

首先我们定义: L_i 为在连杆 i 质心处的坐标系, 有 $g_{sl_i}(\theta) = e^{\xi_1 \theta_1} \dots e^{\xi_i \theta_i} g_{sl_i}(o)$



则根据雅可比矩阵所学知识, 我们可以得到:

$$V_{sl_i}^b = J_{sl_i}^b(\theta) \dot{\theta} = [\xi_1^T \quad \xi_2^T \quad \dots \quad \xi_i^T \quad 0 \quad \dots \quad 0] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_i \\ \vdots \\ \dot{\theta}_{i+1} \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix} = J_i(\theta) \dot{\theta}$$

通过推导与整理, 可以得到 (具体过程参考课件和雅可比矩阵相关知识):

Define: $C_{ij}(\theta, \dot{\theta}) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ijk} \dot{\theta}_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial M_{ij}}{\partial \theta_k} + \frac{\partial M_{ik}}{\partial \theta_j} - \frac{\partial M_{kj}}{\partial \theta_i} \right) \dot{\theta}_k$

$$M(\theta) = \sum_i J_i^T(\theta) M_i^b J_i(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n M_{ij}(\theta) \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j$$

$$M(\theta) \ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} + N(\theta) = \tau$$

其中，M与C在上面给出，N代表势能对 θ 求偏导（有性质 $\dot{M} - 2C$ 是反对称矩阵）

仍然以上一节中的平面2Dof机器人为例，由于前面已经给出了M。我们只需求C：

$$\begin{aligned} \Gamma_{111} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_1} - \frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_1} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_1} = 0 \\ \Gamma_{112} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_1} - \frac{\partial M_{21}}{\partial \theta_1} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_2} = -\beta \sin \theta_2 \\ \Gamma_{121} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_2} - \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_1} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_2} = -\beta \sin \theta_2 \\ \Gamma_{122} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_2} - \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_1} \right) = \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_1} = -\beta \sin \theta_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{211} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M_{21}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial \theta_1} - \frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_2} \right) = \frac{\partial M_{21}}{\partial \theta_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_2} = \beta \sin \theta_2 \\ \Gamma_{212} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M_{21}}{\partial \theta_2} + \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_1} - \frac{\partial M_{21}}{\partial \theta_2} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_1} = 0 \\ \Gamma_{221} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial \theta_2} - \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_2} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_1} = 0 \\ \Gamma_{222} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_2} + \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_2} - \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_2} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_2} = 0 \end{aligned}$$

就可以按步骤写出