

非线性反馈是指通过非线性环节来构成状态反馈或输出反馈的反馈方式。对于某些工程控制系统，采用非线性反馈常比采用线性反馈容易获得更好的性能。线性反馈通过增益反比的方式抑制扰动，而非线性反馈通过数量级的方式抑制扰动。

非线性反馈的设计如图

02 基本原理

(1) SISO误差系统

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu \\ y = C\tilde{x} \end{cases} \quad u = u_L + u_N$$

(2) 线性状态反馈控制量 u_L

$$u_L = -K\tilde{x} \quad (A - BK) \text{ 是 Hurwitz 矩阵}$$

(3) 非线性反馈控制量 u_N

$$u_N = \rho(y)B^T P \tilde{x}$$

$$\rho(y) = -\gamma e^{-\eta|y|}, \gamma > 0, \eta > 0$$

对称正定矩阵 P 是如下 Lyapunov 方程的解

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) + Q = 0.$$

Q 是给定的对称正定矩阵。

(4) 稳定性证明

$$V = \tilde{x}^T P \tilde{x} > 0.$$

$$\dot{V} = \dot{\tilde{x}}^T P \tilde{x} + \tilde{x}^T P \dot{\tilde{x}}$$

$$= -\tilde{x}^T (Q - 2\rho(y)PBB^T P) \tilde{x} < 0$$

(5) 仿真实例

参数	数值
A	[-1, 1; 3, -2]
B	[0; 1]
C	[1, 0]
K	[10, -1]
Q	[1, 0; 0, 1]
P	[1.8125, -0.1875; -0.1875, 0.3125]
γ	10
η	0.01

知乎 @Chenglin Li

03 主要特点

额外增加的非线性控制量 u_N 不改变系统的稳定性

根据系统输出 y 和参考目标值 r 的距离 $|\tilde{x}|$ ，动态调节系统的阻尼

非线性控制量 u_N 和线性反馈控制量 u_L 部分抵消

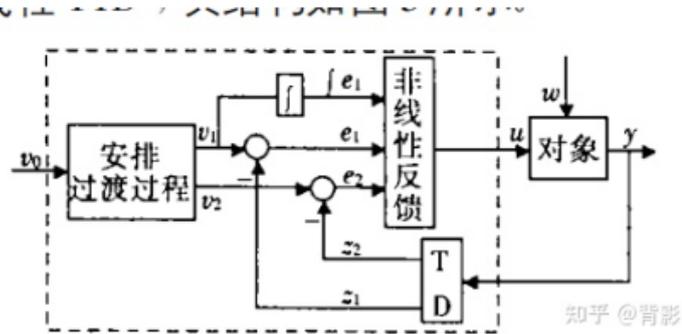
可以有效削减系统响应的超调量

知乎 @Chenglin Li

下图为一个非线性 PID 的设计方案：

非线性PID

利用跟踪微分器，就可以把线性PID改成非线性PID:



跟踪微分器给出输入信号的过渡过程 v_1 及其微分 v_2 ,误差、误差积分以及误差微分的计算如下:

$e_1 = v_1 - z_1, e_0 = \int_0^t e_1, e_2 = v_2 - z_2 = e_1$ 采用如下的非线性函数:

$$fal(e, \alpha, \delta) = \begin{cases} |e|^\alpha \operatorname{sgn}(e), & |e| > \delta \\ e/\delta^\alpha, & |e| \leq \delta \end{cases} \quad \delta > 0$$

当 $\alpha < 1$ 该函数具有: 小误差, 大增益; 大误差, 小增益的特性。

得到非线性PID控制律为: $u = \beta_0 fal(e_{e0}, \alpha_0, \delta) + \beta_1 fal(e_1, \alpha_1, \delta) + \beta_2 fal(e_2, \alpha_2, \delta)$

其中 $\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2$,可以选择 $\alpha_0 < 0, 0 < \alpha_1 \leq 1, \alpha_2 > 1$ 这就是根据非线性反馈得到的非线性PID。