# 《系统辨识》期末考试卷 (A 卷)

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | |

1. (20 points) **本题得分** 假设 $a, b, c, d, \theta_i$ 是未知参数， $v$ 是噪声，写出下列系统的辨识模型,

(1) $y(t) = \theta_1 + \theta_2 t + \mathrm{e}^t,$

(2) $y(t) = \theta_1 + \theta_2 t + \mathrm{e}^t + 2\cos(t),$

(3) $y(t) = \theta_1 + \theta_2 t + \frac{1}{\theta_3}t^2 + v(t),$

(4) $y(t) = \theta_1 + \theta_2 t + \theta_3 + \mathrm{e}^t + v(t).$

(5) $y = ax^2 + bx + c + d\ln|x| + d,$

(6) $y = ax^2 + \frac{x}{b} + c + d\ln(|x|+1),$

(7) $y = ax^2 + \frac{x+1}{b} + \mathrm{e}^c\cos(x/\pi),$

(8) $y = ax_1 + bx_2 + \cdots + cx_n + v,$

(9) $y = ax_1 + bx_2 + \cdots + cx_n + d + v,$

(10) $y = ax_1 + bx_2 + \cdots + cx_n + dx_1x_2\cdots x_n + v,$

(11) $y = ax_1 + b\mathrm{e}^{x_2} + \cdots + \pi c\sin(x_n) + v,$

---

**考试形式**：闭卷； **开课教研室**：通信与控制工程学院自动化系； **命题教师**：丁锋；
**命题时间**：2010 年 1 月 12 日； **使用学期**：2009-2010 第 1 学期

**教研室主任审核签字**：

(12) $$y(t) = ax_1(t) + bx_2(t) + \cdots + cx_n(t) + dx_1(t)x_2(t)\cdots x_n(t) + v(t).$$

2. (20 points) **本题得分** 假设 $\theta_i$ 是未知参数， $v$ 是噪声，写出下列系统的辨识模型，

(1) $$y(t) = \theta_1 + \theta_2 t + \theta_3 \mathrm{e}^t + 1.$$

(2) $$y(t) = \theta_1 u(t) + \theta_2 u^2(t) + \cdots + \theta_m u^m(t) + v(t).$$

(3) $$y(t) = \theta_1 u(t-1) + \theta_2 u^2(t-2) + \cdots + \theta_n u^n(t-n) + v(t).$$

(4) $$y(t) = \theta_1 y(t-1) + \theta_2 y(t-2)y(t-3) + \theta_3 u(t) + \theta_4 u(t-1) + v(t).$$

(5) $$y(t) + \theta_1(t)y(t-1) + \theta_2 y(t-2) = \theta_3 u(t-1) + \theta_4 u(t-2) + v(t).$$

(6) $$y(t) + \theta_1(t)y(t-1)y(t-2) = \theta_2(t)u(t-1) + \theta_3(t)u^2(t-2) + v(t).$$

(7) $$y(t) + \theta_1 \sin(t/\pi)y(t-1) = \theta_2 u(t-1) + \theta_3 \cos(t) + v(t).$$

(8) $$y(t) + \theta_1(t)y(t-1)y(t-2) = \theta_2(t)u(t-1) + \theta_3(t)u^2(t-2) + v(t).$$

(9) $$y(t) = au^2(t) + bu(t) + 2c + d\sin\left(\frac{t}{\pi}\right).$$

(10) $$y(t) = a_1 y(t-1) + a_2 y^2(t-2) + \frac{1}{b_0}[u(t) + b_1 u(t-1)].$$

3. (20 points) **本题得分** 设三阶 AR 模型为

$$y(t)+ay(t-1)+by(t-2)+cy(t-3)=v(t),$$

其中 $\{y(t)\}$ 是已知观测序列, $\{v(t)\}$ 是零均值方差为 $\sigma^2$ 的随机白噪声序列，其辨识模型为

$$y(t)=\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\vartheta}+v(t).$$

- 写出信息向量 $\boldsymbol{\phi}(t)$ 和参数向量 $\boldsymbol{\vartheta}$ 的表达式.
- 写出 $\boldsymbol{\vartheta}$ 的一次完成最小二乘估计式 (数据长度为 $L$).
- 写出 $\boldsymbol{\vartheta}$ 的递推最小二乘辨识算法.

4. (20 points) **本题得分** 设有限脉冲响应 (FIR) 模型为

$$y(t)=b_1u(t-1)+b_2u(t-2)+b_3u(t-3)+4+v(t),$$

其中 $\{y(t)\}$ 是已知观测序列, $\{v(t)\}$ 是零均值方差为 $\sigma^2$ 的随机白噪声序列，其辨识模型为

$$y(t)=\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\theta}+v(t).$$

- 写出信息向量 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 和参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 的表达式.
- 写出 $\boldsymbol{\theta}$ 的一次完成最小二乘估计式 (数据长度为 $L$).
- 写出 $\boldsymbol{\theta}$ 的递推最小二乘辨识算法.

5. (10 points) | **本题得分** | | 设三阶 MA 模型为

$$y(t) = v(t) + d_1 v(t-1) + d_2 v(t-2) + d_3 v(t-3),$$

其中 $\{y(t)\}$ 是已知观测序列, $\{v(t)\}$ 是零均值方差为 $\sigma^2$ 的随机白噪声序列，其辨识模型为

$$y(t) = \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\theta} + v(t).$$

- 写出信息向量 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 和参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 的表达式.
- 写出 $\boldsymbol{\theta}$ 的递推增广最小二乘辨识算法.

6. (10 points) | **本题得分** | | 设

$$\boldsymbol{P}^{-1}(t)=\boldsymbol{P}^{-1}(t-1)+\boldsymbol{\varphi}(t)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t),\ \|\boldsymbol{\varphi}(t)\|^2\geq 0,\ \boldsymbol{\varphi}(t)\in\mathbb{R}^n,$$

$\boldsymbol{P}(0)=\boldsymbol{I}_n$, $\boldsymbol{I}_n$ 为 $n$ 阶单位阵， 证明以下各式

(1) $\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{\varphi}(t)=\dfrac{\boldsymbol{P}(t-1)\boldsymbol{\varphi}(t)}{1+\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}(t-1)\boldsymbol{\varphi}(t)}$.

(2) $\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{\varphi}(t)\leq 1$.

(3) $\boldsymbol{P}(t-1)\boldsymbol{\varphi}(t)=\dfrac{\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{\varphi}(t)}{1-\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{\varphi}(t)}$.

(4) $\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}^2(t)\boldsymbol{\varphi}(t)\leq\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{P}(t-1)\boldsymbol{\varphi}(t)$.

(5) $\displaystyle\sum_{t=1}^{\infty}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{P}(t-1)\boldsymbol{\varphi}(t)<\infty$.

(6) $\displaystyle\sum_{t=1}^{\infty}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}^2(t)\boldsymbol{\varphi}(t)<\infty$.

——2007 年考题 —-

**《系统辨识》期末考试卷** (A **卷**)

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | |

1. (20 points) **本题得分** ＿＿ 设一阶 ARX 模型为

$$y(t) + ay(t-1) = bu(t) + v(t),$$

其中 $\{u(t)\}$ 和 $\{y(t)\}$ 分别是已知的系统输入和输出序列, $\{v(t)\}$ 是零均值方差为 $\sigma^2$ 的随机白噪声序列，其辨识模型为

$$y(t) = \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\theta} + v(t).$$

- 写出信息向量 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 的表达式，写出估计参数向量 $\boldsymbol{\theta} = [a, b]^{\mathrm{T}}$ 的递推最小二乘算法.

- 进一步，设 $t \leq 0$ 时， $y(t) = 0$, $u(t) = 0$, $v(t) = 0$, 数据长度为 $L$,

$$\boldsymbol{Y}_L := \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(L) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^L,$$

$$\boldsymbol{Y}_L = \boldsymbol{H}_L\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{V}_L.$$

参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 的一次最小二乘估计为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{LS}} = (\boldsymbol{H}_L^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_L)^{-1}\boldsymbol{H}_L^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_L.$$

此式即为参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 的一次完成最小二乘估计算法. 请写出信息矩阵 $\boldsymbol{H}_L$ 的表达式，噪声向量 $\boldsymbol{V}_L$ 的表达式.

2. (15 points) | **本题得分** | | 设一阶有限脉冲响应 (FIR) 模型为

$$y(t) = bu(t) + v(t),$$

其中 $\{u(t)\}$ 和 $\{y(t)\}$ 分别是已知的系统输入和输出序列， $\{v(t)\}$ 是零均值方差为 $\sigma^2$ 的随机白噪声序列. 写出估计参数 $b$ 的递推最小二乘算法和一次完成最小二乘估计算法 (数据长度为 $L$).

3. (15 points) | **本题得分** | |

- 试证矩阵求逆公式

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{C})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\Lambda}^{-1} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1},$$

  其中 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 和 $\boldsymbol{\Lambda} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 可逆， $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 和 $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 不是方阵.

- 并将上式矩阵求逆公式用于 $\boldsymbol{P}^{-1}(t) = \boldsymbol{P}^{-1}(t-1) + \boldsymbol{\varphi}(t)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)$ 等式两边的求逆, 其中设 $\boldsymbol{\varphi}(t) \in \mathbb{R}^n$, 有关矩阵可逆.

4. (20 points) **本题得分** | | 设 CARARMA 模型

$$A(z)y(t) = B(z)u(t) + \frac{D(z)}{C(z)}v(t)$$

的最小二乘辨识表达式为

$$y(t) = \boldsymbol{\varphi}_0^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\theta} + v(t),$$

请写出 $\boldsymbol{\varphi}_0(t)$ 和 $\boldsymbol{\theta}$ 的表达式，其中移位算子 $z^{-1}$ 的多项式为

$$\begin{aligned}
A(z) &= 1 + a_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + a_{n_a} z^{-n_a}, \\
B(z) &= b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_{n_b} z^{-n_b}, \\
C(z) &= 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \cdots + c_{n_c} z^{-n_c}, \\
D(z) &= 1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \cdots + d_{n_d} z^{-n_d}.
\end{aligned}$$

5. (15 points) | **本题得分** | | 设输出误差滑动平均模型

$$y(t) = \frac{B(z)}{A(z)} u(t) + D(z)v(t)$$

的最小二乘辨识表达式为

$$y(t) = \boldsymbol{\varphi}_0^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\theta} + v(t),$$

请写出 $\boldsymbol{\varphi}_0(t)$ 和 $\boldsymbol{\theta}$ 的表达式, 以及估计参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 的 (可进行递推计算的) 递推最小二乘算法, 其中 $A(z)$, $B(z)$ 和 $D(z)$ 的定义同上题, 设 $u(t)$ 和 $y(t)$ 是可测的输入和输出数据, $v(t)$ 是不可测随机白噪声.

6. (15 points) **本题得分** | | 设

$$\boldsymbol{P}^{-1}(t)=\boldsymbol{P}^{-1}(t-1)+\boldsymbol{\varphi}(t)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t),\ \|\boldsymbol{\varphi}(t)\|^2\geq 0,\ \boldsymbol{\varphi}(t)\in\mathbb{R}^n,$$

$\boldsymbol{P}(0)=\boldsymbol{I}_n$, $\boldsymbol{I}_n$ 为 $n$ 阶单位阵, 证明以下各式

(1) $\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{\varphi}(t)=\dfrac{\boldsymbol{P}(t-1)\boldsymbol{\varphi}(t)}{1+\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}(t-1)\boldsymbol{\varphi}(t)}$.

(2) $\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{\varphi}(t)\leq 1$.

(3) $\boldsymbol{P}(t-1)\boldsymbol{\varphi}(t)=\dfrac{\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{\varphi}(t)}{1-\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{\varphi}(t)}$.

(4) $\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}^2(t)\boldsymbol{\varphi}(t)\leq\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{P}(t-1)\boldsymbol{\varphi}(t)$.

(5) $\displaystyle\sum_{t=1}^{\infty}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{P}(t-1)\boldsymbol{\varphi}(t)<\infty$.