第四章 正弦交流电路习题解答（作业部分）

4.2 写出下列电压、电流相量所代表的正弦电压和电流(设角频率为ω)：

(a)$\dot{U}_{\mathrm{m}}=10\angle-10^{\mathrm{o}}\,\mathrm{V}$　　　　(b)$\dot{U}=(-6-\mathrm{j}8)\mathrm{V}$

(c)$\dot{I}_{\mathrm{m}}=(0.2-\mathrm{j}20.8)\mathrm{V}$　　　　(d)$\dot{I}=-30\mathrm{A}$

解：

（a）$u=10\cos(\omega t-10°)\mathrm{V}$

（b）$\dot{U}=\sqrt{6^2+10^2}\angle\mathrm{arctg}\dfrac{-8}{-6}=10\angle 233.1°\mathrm{V},\ u=10\sqrt{2}\cos(\omega t+233.1°)\mathrm{V}$

（c）$\dot{I}_m=\sqrt{0.2^2+20.8^2}\angle\mathrm{arctg}\dfrac{-20.8}{0.2}=20.8\angle-89.4°\mathrm{A},\ i=20.8\cos(\omega t-89.4°)\mathrm{A}$

（d）$\dot{I}=30\angle 180°\,\mathrm{A},\ i=30\sqrt{2}\cos(\omega t+180°)\mathrm{A}$

4.3 图示电路中正弦电流的频率为 50Hz 时，电压表和电流表的读数分别为 100V 和 15A；当频率为 100Hz 时，读数为 100V 和 10A。试求电阻 R 和电感 L。

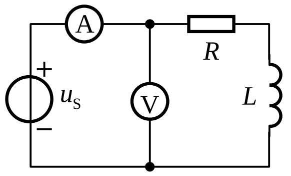


图 题 4.3

解：电压表和电流表读数为有效值，其比值为阻抗模，即

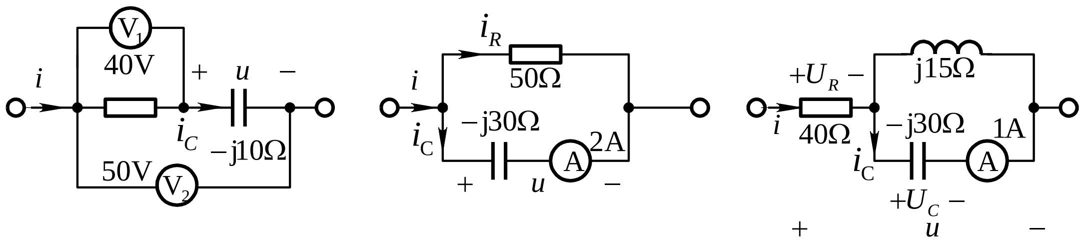
$$\sqrt{R^2+(\omega L)^2}=U/I$$

将已知条件代入，得

$$\begin{cases}\sqrt{R^2+(2\pi\times 50\times L)^2}=\dfrac{100\mathrm{V}}{15\mathrm{A}}\\ \sqrt{R^2+(2\pi\times 100\times L)^2}=\dfrac{100\mathrm{V}}{10\Omega}\end{cases}$$

联立方程，解得　$L=13.7\mathrm{mH},\ R=5.08\Omega$

4.4 图示各电路中已标明电压表和电流表的读数，试求电压u和电流i的有效值。



(a)　　(b)　　(c)

图 题 4.4

解：(a) RC 串联电路中电阻电压与电容电压相位正交，各电压有效值关系为

$$U=\sqrt{{U_2}^2-{U_1}^2}=\sqrt{50^2-40^2}\mathrm{V}=30\mathrm{V}$$

电流i的有效值为 $I = I_C = \dfrac{U}{|X_C|} = \dfrac{30\text{V}}{10\Omega} = 3\text{A}$

(b) $U = |X_C| I_C = 30\Omega \times 2\text{A} = 60\text{V}$

$$I_R = \frac{U}{R} = \frac{60\text{V}}{50\Omega} = 1.2\text{A}$$

RC 并联电路中电阻电流与电容电流相位正交，总电流有效值为

$$I = \sqrt{{I_C}^2 + {I_R}^2} = \sqrt{2^2 + 1.2^2}\text{A} = 2.33\text{A}$$

(c) $U_C = |X_C| I_C = 30\Omega \times 1\text{A} = 30\text{V}$

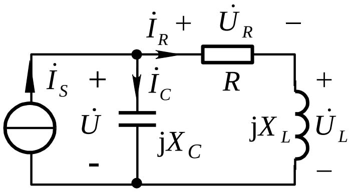
由 $U_L = U_C = X_L I \Rightarrow I_L = \dfrac{U_C}{X_L} = \dfrac{30\text{V}}{15\Omega} = 2\text{A}$

并联电容、电感上电流相位相反，总电流为 $I = |I_L - I_C| = 1\text{A}$

电阻电压与电容电压相位正交，总电压为：

$$U = \sqrt{{U_C}^2 + {U_R}^2} = \sqrt{30^2 + 40^2}\text{V} = 50\text{V}$$

4.6 已知图示电路中$U_R = U_L = 10\,\text{V}$，$R = 10\Omega$，$X_C = 10\Omega$，求I_S。



解：设$\dot{U}_R = 10\angle 0^\circ\,\text{V}$，则

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{U}_R}{R} = 1\angle 0^\circ\,\text{A}\ ,\dot{U}_L = jX_L\dot{I}_R = 10\angle 90^\circ\,\text{V}$$

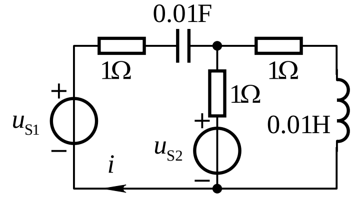
$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L = (10\angle 0^\circ + 10\angle 90^\circ)\text{V} = 10\sqrt{2}\angle 45^\circ\text{V}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}}{\text{j}X_C} = \frac{10\sqrt{2}\angle 45^\circ\text{V}}{-\text{j}10\Omega} = \sqrt{2}\angle 135^\circ\text{A}$$

$$\dot{I}_\text{S} = \dot{I}_R + \dot{I}_C = (1\angle 0^\circ + \sqrt{2}\angle 135^\circ)\text{A} = \text{jA} = 1\angle 90^\circ\,\text{A}$$

所求电流有效值为$I_\text{S} = 1\text{A}$。

4.10 已知图示电路中$u_{\text{S1}} = u_{\text{S2}} = 4\cos\omega t\,\text{V}$，$\omega = 100\,\text{rad/s}$。试求电流$i$。



解：图示电路容抗 $X_C=-\dfrac{1}{\omega C}=-\dfrac{1}{100\times 0.01}\Omega=-1\Omega$，

感抗 $X_L=\omega L=(100\times 0.01)\Omega=1\Omega$

列节点电压方程

$$[\frac{1}{1\Omega+\mathrm{j}(-1\Omega)}+\frac{1}{1\Omega}+\frac{1}{1\Omega+\mathrm{j}\Omega}]\dot{U}_{n1}=\frac{\dot{U}_{\mathrm{S1}}}{1\Omega+\mathrm{j}(-1\Omega)}+\frac{\dot{U}_{\mathrm{S2}}}{1\Omega}\qquad(1)$$

将 $\dot{U}_{\mathrm{S1}}=\dot{U}_{\mathrm{S2}}=2\sqrt{2}\angle 0°\mathrm{V}$ 代入(1)式

解得　　$\dot{U}_{n1}=\sqrt{5}\angle 18.43°\mathrm{V}$

$$\dot{I}=-\frac{-\dot{U}_{n1}+\dot{U}_{\mathrm{S1}}}{1\Omega+\mathrm{j}(-1\Omega)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{A}$$

电流　　$i=\cos(100t)\mathrm{A}$

4.14 图中 u_{S} 为正弦电压源，$\omega=2000\,\mathrm{rad/s}$。问电容 C 等于多少才能使电流 i 的有效值达到最大？

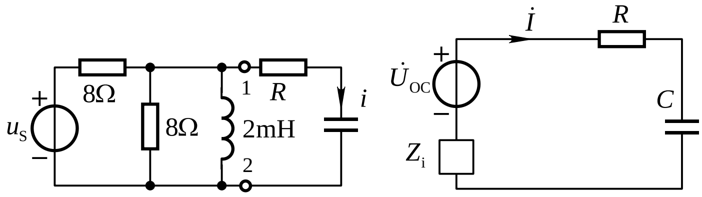


图 题 4.14

解：先对左图电路 12 端左侧电路作戴维南等效，如右图所示，令

$$X_L=\omega L=2000\,\mathrm{rad/s}\times 2\times 10^{-3}\,\mathrm{H}=4\Omega$$

得等效阻抗　　$Z_{\mathrm{i}}=8\Omega//8\Omega//\mathrm{j}4\Omega=\dfrac{4\Omega\times \mathrm{j}4\Omega}{4\Omega+\mathrm{j}4\Omega}=2(1+\mathrm{j})\Omega$

由 $\dot{I}=\dfrac{\dot{U}_{\mathrm{OC}}}{Z_{\mathrm{i}}+R+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}$ 知，欲使电流 i 有效值为最大，电容的量值须使回路阻抗虚部为零，即：

$$\mathrm{Im}[Z_i+R+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}]=2-\frac{1}{\omega C}=0$$

等效后电路如右图所示。解得 $C=\dfrac{1}{2\omega}=250\mu\mathrm{F}$

4.15 图示阻容移相器电路，设输入电压 $\dot{U}_{\mathrm{i}}$ 及 R_1、C 已知，求输出电压 U_{o}，并讨论当 R 由零变到无穷时输出电压 $\dot{U}_{\mathrm{o}}$ 与输入电压 $\dot{U}_{\mathrm{i}}$ 的相位差变化范围。

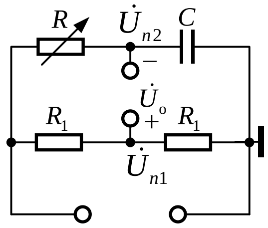


图 题 4.15

解：$\dot{U}_{\mathrm{o}}=\dot{U}_{\mathrm{n1}}-\dot{U}_{\mathrm{n2}}=\dfrac{\dot{U}_{\mathrm{i}}}{2}-\dfrac{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}\times\dot{U}_{\mathrm{i}}=\dfrac{\dot{U}_{\mathrm{i}}}{2}-\dfrac{\dot{U}_{\mathrm{i}}}{1+\mathrm{j}\omega CR}=\dfrac{\mathrm{j}\omega CR-1}{2(\mathrm{j}\omega CR+1)}\dot{U}_{\mathrm{i}}$

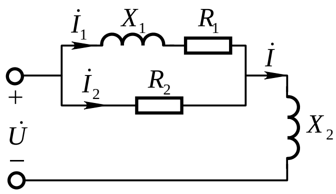
当 $R=0$， $\dot{U}_{\mathrm{o}}$超前于$\dot{U}_{\mathrm{i}}\,180^{\circ}$；

当 $R=\dfrac{1}{\omega C}$，$\dot{U}_{\mathrm{o}}$超前于$\dot{U}_{\mathrm{i}}\,90°$；

当 $R\to\infty$， $\dot{U}_{\mathrm{o}}$与$\dot{U}_{\mathrm{i}}$同相位。

即当R由零变到无穷时，$\dot{U}_{\mathrm{o}}$超前于$\dot{U}_{\mathrm{i}}$相位差从180°到0°变化。

4.16 图所示电路，已知$R_1=X_1=X_2=n\Omega$（n已知），试求R_2为何值时，$\dot{I}_1$与$\dot{U}$相位差为$90°$。



解：先列写$\dot{I}_1$与$\dot{U}$的等量关系，列 KVL

$$\dot{U}=(R_1+\mathrm{j}X_1)\times\dot{I}_1+\mathrm{j}X_2\times\dot{I}\tag{1}$$

用$\dot{I}_1$表示$\dot{I}$

$$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2\tag{2}$$

$$\dot{I}_2=\frac{(R_1+\mathrm{j}X_1)\times\dot{I}_1}{R_2}\tag{3}$$

将式(2)(3)带入(1)中整理得

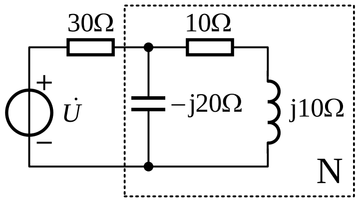
$$\dot{U}=(R_1+\mathrm{j}X_1)\times\dot{I}_1+\mathrm{j}X_2\times\left(\frac{R_1+\mathrm{j}X_1}{R_2}+1\right)\times\dot{I}_1=[(R_1+\frac{-X_1X_2}{R_2})+\mathrm{j}(X_1+X_2+\frac{R_1X_2}{R_2})]\times\dot{I}_1$$

可见要使$\dot{I}_1$与$\dot{U}$相位差为$90°$则，上式中$\dot{I}_1$前面系数对应阻抗的实部应为零，即

$$R_1+\frac{-X_1X_2}{R_2}=0$$

得 $R_2=\dfrac{X_1X_2}{R_1}=n\Omega=R_1$（本题原习题解答有错，已修改。这告诉我们：即使有解答，也不要直接 copy 哦）

4.19 图示电路，设$\dot{U}=100\angle 0^\circ\ \text{V}$，求网络 N 的平均功率、无功功率、功率因数和视在功率。



解：网络 N 的等效阻抗

$$Z'=(10+\text{j}10)\Omega//(-\text{j}20)\Omega$$
$$=\frac{(10+\text{j}10)\times(-\text{j}20)}{10+\text{j}10-\text{j}20}\Omega=\frac{(10+\text{j}10)\times(-\text{j}20)}{10-\text{j}10}\Omega=20\angle 0^\circ\Omega$$

输入电流 $$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{30+Z'}=2\text{A}$$

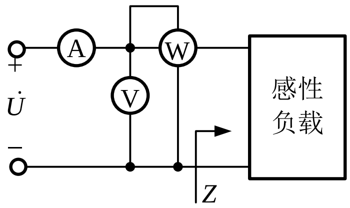
网络 N 的平均功率为 $P=I^2\times\text{Re}[Z']=(2\text{A})^2\times 20\Omega=80\text{W}$

无功功率 $Q=I^2\times\text{Im}[Z']=(2\text{A})^2\times 0=0$

功率因数 $\lambda=\cos\varphi=\cos 0^\circ=1$

视在功率 $S=P/\cos\varphi=80\text{VA}$

4.20 图为三表法测量负载等效阻抗的电路。现已知电压表、电流表、功率表读数分别为 36V、10A 和 288W，各表均为理想仪表，求感性负载等效阻抗 Z。再设电路角频率为$\omega=314\ \text{rad/s}$，求负载的等效电阻和等效电感。



解：等效阻抗 $$|Z|=\frac{U}{I}=\sqrt{R^2+X_L{}^2}=\frac{36\text{V}}{10\text{A}}=3.6\Omega \qquad (1)$$

由平均功率 $P=I^2R$ 得 $R=\dfrac{P}{I^2}=\dfrac{288\text{W}}{(10\text{A})^2}=2.88\Omega$

将式(2)代入式((1)解得 $X_L=\sqrt{|Z|^2-R^2}=\sqrt{3.6^2-2.88^2}\Omega=2.16\Omega$

所以等效阻抗为

$$Z=R+\text{j}X_L=(2.88+\text{j}2.16)\Omega$$

当$\omega=314\text{rad/s}$时，负载的等效电阻和等效电感分别为

$$R=2.88\Omega，\ L=\frac{X_L}{\omega}=\frac{2.16\Omega}{314\text{rad/s}}=6.88\text{mH}$$

注释：功率表的读数等于电压线圈电压有效值、电流线圈电流有效值及电压与电流相位差夹角余弦三者之积。

4.24 图示工频正弦交流电路中，$U=100\text{V}$，感性负载Z_1的电流I_1为10A，功率因数$\lambda_1=0.5$，$R=20\Omega$。

（1）求电源发出的有功功率，电流I，和总功率因数λ。

（2）当电流I限制为11A时，应并联最小多大电容C？并求此时总功率因数λ。

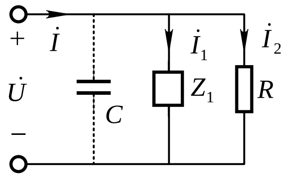


图 题 4.24

解：（1）由$\lambda_1=0.5$得，$\phi_1=\arccos\lambda_1=60°$

感性负载Z_1的吸收有功功率$P_1=UI_1\lambda_1=100\times10\times0.5=500\text{W}$

无功功率$Q_1=UI_1\sin\phi_1=100\times10\sin60°=500\sqrt{3}=866.0\,\text{var}$

电阻R吸收的有功功率$P_2=\dfrac{U^2}{R}=\dfrac{100^2}{20}=500\text{W}$

电源发出的有功功率等于整个负载吸收的有功功率为：

$P=P_1+P_2=1000\text{W}$

电源发出的无功功率$Q=Q_1=866.0\,\text{var}$

视在功率$S=\sqrt{P^2+Q^2}=\sqrt{1000^2+866^2}=1322.86\text{VA}$

电源的电流$I=\dfrac{S}{U}=\dfrac{1322.86}{100}=13.23\text{A}$

总功率因数$\lambda=\dfrac{P}{S}=\dfrac{1000}{1322.86}=0.756$

（2）当电流I限制为 11A 时，总功率因数$\lambda=\dfrac{P}{UI}=\dfrac{1000}{100\times11}=0.909$

当电路仍为感性时，并联的电容为最小，此时电压超前电流的相位差为：

$$\phi=\arccos\lambda=24.62°$$

电源发出的无功功率为$Q=P\tan\phi=1000\times\tan24.62°=458.26\,\text{var}$

由无功功率守恒得：$Q=Q_1+(-\omega CU^2)$

$$C=\frac{Q_1-Q}{\omega U^2}=\frac{866-458.26}{314\times100^2}=1.299\times10^{-4}\text{F}$$

4.25 图所示为某负载的等效电路模型，已知$R_1=X_1=8\Omega$，$R_2=X_2=3\Omega$，$R_\text{m}=X_\text{m}=6\Omega$，外加正弦电压有效值$U=220\text{V}$，频率$f=50\text{Hz}$。（1）求负载的平均功率和功率因数；（2）若并上电容，将功率因数提高到 0.9，求$C=?$。

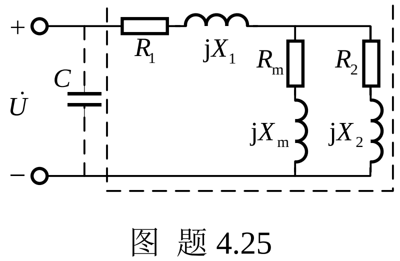


图 题 4.25

解：(1)负载即虚线部分等效阻抗为

$$Z = R_1 + \mathrm{j}X_1 + (R_\mathrm{m} + \mathrm{j}X_\mathrm{m}) \| (R_2 + \mathrm{j}X_2) = (10 + \mathrm{j}10)\Omega$$

阻抗角为

$$\varphi_Z = \arctan\frac{10}{10} = 45°$$

则功率因数为

$$\lambda = \cos\varphi_Z = \cos 45° \approx 0.707$$

负载消耗的平均功率为

$$P = \frac{U^2}{|Z|} \times \lambda \approx 2420\mathrm{W}$$

(2)并联电容前负载的无功功率

$$Q = P\tan\varphi_Z = 2420\mathrm{var}$$

并上电容后

$$\lambda' = 0.9$$

则功率因素角为

$$\varphi' = \arccos 0.9 \approx 25.84°$$

并联电容后总的无功功率

$$Q' = P\tan\varphi' \approx 1172.06\mathrm{var}$$

则电容引进的无功功率应为

$$Q_C = Q' - Q = -\omega C U^2 = -1247.94\mathrm{var}$$

则所需电容值为

$$C = -\frac{Q_C}{\omega U^2} \approx 82.1\mu\mathrm{F}$$

4.26 功率为 40W 的白炽灯和日光灯各 100 只并联在电压 220V 的工频交流电源上，设日光灯的功率因数为 0.5(感性)，求总电流以及总功率因数。如通过并联电容把功率因数提高到 0.9，问电容应为多少？求这时的总电流。

解：电路总平均功率为

$$P = P_{白炽灯} + P_{日光灯} = 40\,\mathrm{W} \times 100 + 40\,\mathrm{W} \times 100 = 8000\,\mathrm{W}$$

日光灯的功率因数角 $\varphi = \arccos(0.5) = 60°$

白炽灯的功率因数为 1，不存在无功功率，因此两种灯的总无功功率为：

$$Q = P_{日光灯} \times \mathrm{tg}\varphi = 6928.2\,\mathrm{var}$$

视在功率　$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 10583\,\mathrm{VA}$

总电流　$I = S/U = 48.1\mathrm{A}$

总功率因数　$\lambda = P/S = 0.756$

并联电容后，电路的功率因数角为$\varphi' = \arccos 0.9 = 25.84°$

电容的并联接入不改变平均功率，而无功功率变为

$$Q' = P\mathrm{tg}\varphi' = 3874.58\,\mathrm{var}$$

并联电容后总功率的变化量等于电容上的无功功率，即

$$Q_C = Q' - Q = -3053.6\,\mathrm{var}$$

因为$Q_C = -\omega C U^2$，所以

$$C = \frac{-Q_C}{\omega U^2} = \frac{3053.6\,\mathrm{var}}{(2\pi\times 50)\,\mathrm{rad/s}\times(220\,\mathrm{V})^2} = 201\,\mu\mathrm{F}$$

并联电容后的总电流为：

$$I' = \frac{P}{U\lambda'} = \frac{8000\,\mathrm{W}}{220\,\mathrm{V}\times 0.9} = 40.40\,\mathrm{A}$$

4.27 图示电路，$U_1 = 200\mathrm{V}$，Z_1吸收的平均功率$P_1 = 800\mathrm{W}$，功率因数$\lambda = 0.8$(感性)。求电压有效值U和电流有效值I。

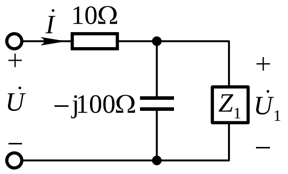


图 题 4.27

解：设 $\dot{U}_1 = 200\angle 0^\circ\ \mathrm{V}$，$\varphi_1 = \arccos 0.8 = 36.86^\circ$

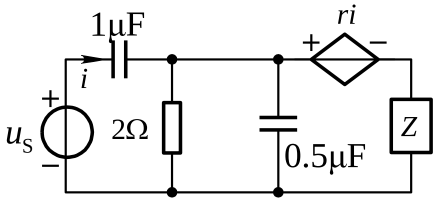
$$I_1 = \frac{P_1}{U_1\lambda} = 5\,\mathrm{A}，\dot{I}_1 = I_1\angle -\varphi_1 = 5\angle -36.86^\circ\ \mathrm{A}$$

$$\dot{I}_C = \dot{U}_1/(-\mathrm{j}100\Omega) = \mathrm{j}2\,\mathrm{A}，\dot{I} = \dot{I}_C + \dot{I}_1 = (4-\mathrm{j})\,\mathrm{A} = 4.12\angle -14.04^\circ$$

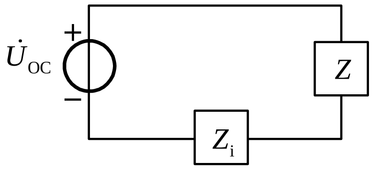
$$\dot{U} = 10\dot{I} + \dot{U}_1 = (240 - \mathrm{j}10)\,\mathrm{V} = 240.2\angle -2.39^\circ$$

$$I = 4.12\,\mathrm{A}，U = 240.2\,\mathrm{V}$$

4.28 图示电路中$u_S = 2\cos\omega t\ \mathrm{V}$，$\omega = 10^6\ \mathrm{rad/s}$，$r = 1\Omega$。问负载阻抗Z为多少可获得最大功率？求出此最大功率。



(a)



(b)

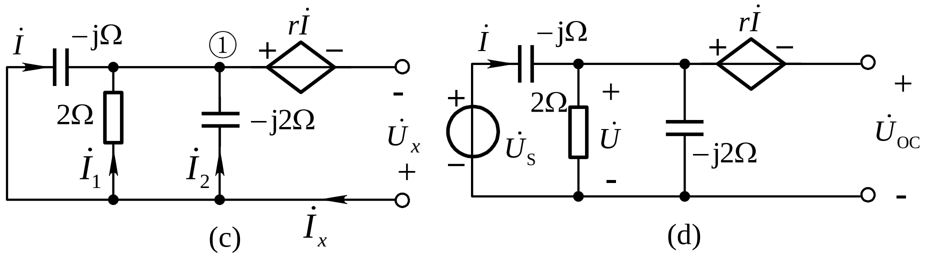


图 题 4.28

解：对原电路做戴维南等效，如图（b）所示。

（1）求输入阻抗，由图（c）得：

$$\dot{U}_x = -\mathrm{j}\Omega \times \dot{I} + r\dot{I} = (1-\mathrm{j})\Omega \times \dot{I}$$

$$\dot{I}_x = \dot{I} + \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{I} + (-j\Omega \times \dot{I}) \times (\frac{1}{2\Omega} + \frac{1}{-\mathrm{j}2\Omega}) = (\frac{3}{2} - \frac{\mathrm{j}}{2})\dot{I}$$

$$Z_i = R_{\mathrm{i}} + \mathrm{j}X_{\mathrm{i}} = \frac{\dot{U}_x}{\dot{I}_x} = \frac{(1-\mathrm{j})\Omega\dot{I}}{\frac{1}{2}(3-\mathrm{j})\dot{I}} = (0.8 - \mathrm{j}0.4)\Omega$$

（2）求开路电压，如图（d）所示：

$$\dot{U}_{\mathrm{OC}} = \dot{U} - r\dot{I}$$

$$= \frac{2\Omega // (-\mathrm{j}2\Omega)}{2\Omega // (-\mathrm{j}2\Omega) + (-\mathrm{j}\Omega)}\dot{U}_{\mathrm{S}} - r\frac{\dot{U}_{\mathrm{S}}}{2\Omega // (-\mathrm{j}2\Omega) + (-\mathrm{j}\Omega)}$$

$$= \frac{1+\mathrm{j}}{1+\mathrm{j}3}\dot{U}_{\mathrm{S}} = (0.4 - \mathrm{j}0.2)\sqrt{2}\mathrm{V} = 0.2\sqrt{10}\angle -26.57^{\circ}\ \mathrm{V}$$

（3）求最大功率：

根据最大功率传输定理，当 $Z_L = \overset{*}{Z}_{\mathrm{i}} = (0.8 + \mathrm{j}0.4)\Omega$ 时，Z_L 可获得最大功率：

$$P_{\max} = \frac{U^2_{\mathrm{OC}}}{4R_{\mathrm{i}}} = \frac{(0.2\sqrt{10})^2}{4 \times 0.8}\mathrm{W} = 0.125\mathrm{W}$$

4.29 图示电路中电源频率 $f = 31.8\,\mathrm{kHz}$，$U_{\mathrm{S}} = 1\,\mathrm{V}$，内阻 $R_{\mathrm{S}} = 125\Omega$，负载电阻 $R_2 = 200\Omega$。为使 R_2 获得最大功率，L 和 C 应为多少？求出此最大功率。

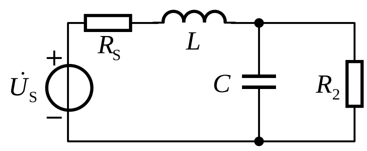


图 题 4.29

解：L、C 及 R_2 的等效阻抗　$Z_{\mathrm{L}} = \mathrm{j}\omega L + \frac{R_2 / (\mathrm{j}\omega C)}{R_2 + 1/(\mathrm{j}\omega C)}$

当 L、C 改变时，Z_{L} 的实部及虚部均发生变化，根据最大功率传输定理知，当 $\overset{*}{Z}_{\mathrm{L}} = R_{\mathrm{S}}$，$R_2$ 可获得最大功率，

即
$$\begin{cases}\dfrac{R_2}{1+(\omega R_2C)^2}=R_S\\ \omega L-\dfrac{\omega R_2{}^2C}{1+(\omega R_2C)^2}=0\end{cases}$$

联立解得
$$\begin{cases}C=\dfrac{\sqrt{R_2/R_S-1}}{\omega R_2}=0.0194\mu\mathrm{F}\\ L=R_2R_SC=0.485\mathrm{mH}\end{cases}$$

此时
$$P_{\max}=\frac{U_S{}^2}{4R_S}=\frac{1\mathrm{V}}{4\times125\Omega}=2\mathrm{mW}$$

4.34 设图示电路中 $R_1=12\Omega$，$X_1=12\Omega$，$X_2=10\Omega$，$X_M=6\Omega$，$R_3=8\Omega$，$X_3=6\Omega$，$U=120\,\mathrm{V}$。求电压U_{AB}。

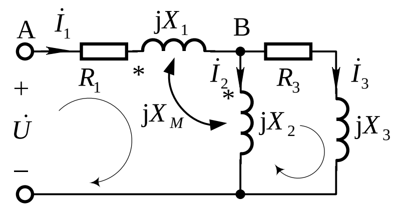


图 题 4.34

解：方法一：

设$\dot{U}=120\angle 0^\circ\,\mathrm{V}$，各支路电流如图所示，列支路电流方程如下：

$$\begin{cases}\dot{I}_1=\dot{I}_2+\dot{I}_3\\ \dot{U}=R_1\dot{I}_1+\mathrm{j}X_1\dot{I}_1+\mathrm{j}X_M\dot{I}_2+\mathrm{j}X_M\dot{I}_1+\mathrm{j}X_2\dot{I}_2\\ \mathrm{j}X_M\dot{I}_1+\mathrm{j}X_2\dot{I}_2=(R_3+\mathrm{j}X_3)\dot{I}_3\end{cases}$$

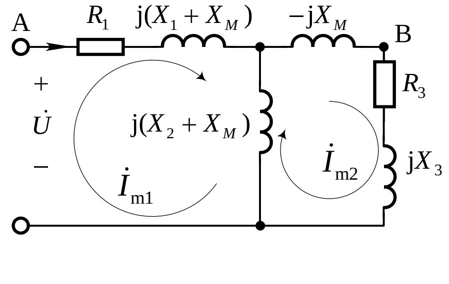
解得 $\dot{I}_1=4.27\angle-49.04^\circ\,\mathrm{A}$， $\dot{I}_2=1.9117\angle-122.475^\circ\,\mathrm{A}$ 。

$$\begin{aligned}\dot{U}_{AB}&=R_1\dot{I}_1+\mathrm{j}\,X_1\dot{I}_1+\mathrm{j}\,X_M\dot{I}_2\\&=83.63\angle-6.58^\circ\,\mathrm{V}\end{aligned}$$

所以电压有效值为 $U_{AB}=83.63\mathrm{V}$

方法二：

应用互感消去法，原电路可等效成为。



列网孔电流方程

$$\begin{cases}[R_1+\mathrm{j}(X_1+X_M)+\mathrm{j}(X_2+X_M)]\dot{I}_{\mathrm{m1}}-\mathrm{j}(X_2+X_M)\dot{I}_{\mathrm{m2}}=\dot{U} & (1)\\ -\mathrm{j}(X_2+X_M)\dot{I}_{\mathrm{m1}}+[-\mathrm{j}X_M+R_3+\mathrm{j}X_3+\mathrm{j}(X_2+X_M)]\dot{I}_{\mathrm{m2}}=0 & (2)\end{cases}$$

将已知条件代入，得

$$\begin{cases}(12+\mathrm{j}34)\Omega\dot{I}_1-j16\Omega\dot{I}_2=120\angle0^\circ\,\mathrm{V}\\ \text{-j}16\Omega\dot{I}_1+(8+\mathrm{j}16)\dot{I}_2=0\end{cases}$$

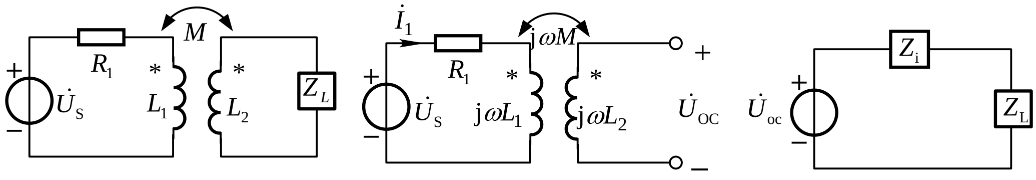
解得

$$\dot{I}_{\mathrm{m1}}=4.27\angle-49.04^\circ\,\mathrm{A}$$
$$\dot{I}_{\mathrm{m2}}=3.82\angle-22.47^\circ\,\mathrm{A}$$
$$\dot{U}_{\mathrm{AB}}=[R_1+\mathrm{j}(X_1+X_M)]\dot{I}_{\mathrm{m1}}+(-\mathrm{j}X_M)\dot{I}_{\mathrm{m2}}=83.63\angle-6.58^\circ\,\mathrm{V}$$

所以有效值$U_{\mathrm{AB}}=83.63\mathrm{V}$。(注 1：实际计算约为 83.51V)

注 2：对含互感的电路宜用支路电流法或回路电流法列写方程。

4.38 图示电路，已知 $R_1=10\Omega$，$L_1=1\mathrm{H}$，$L_2=1\mathrm{H}$，耦合系数 $K=0.2$，$\dot{U}_{\mathrm{S}}=20\mathrm{V}$，角频率 $\omega=10\,\mathrm{rad/s}$。求负载阻抗 Z_L 为何值时它消耗的功率为最大？并求此最大功率。



(a)　　(b)　　(c)

解：由 $k=\dfrac{M}{\sqrt{L_1L_2}}$ 得　　$M=k\sqrt{L_1L_2}=0.2\sqrt{1\times1}\mathrm{H}=0.2\mathrm{H}$

（1）求开路电压，电路如图(b)所示。

$$\dot{U}_{\mathrm{S}}=R_1\dot{I}_1+\mathrm{j}\omega L_1\dot{I}_1=(R_1+\mathrm{j}\omega L_1)\dot{I}_1$$

可得 $\dot{I}_1=\dfrac{\dot{U}_{\mathrm{S}}}{R_1+\mathrm{j}\omega L_1}=\dfrac{20\mathrm{V}}{(10+\mathrm{j}10)\Omega}=\dfrac{20\mathrm{V}}{10\sqrt{2}\angle45^\circ\,\mathrm{A}}=\sqrt{2}\angle-45^\circ\,\mathrm{A}$　　(1)

$\dot{U}_{\mathrm{OC}}=\mathrm{j}\omega M\dot{I}_1$，将(1)式代入，得

$$\dot{U}_{\mathrm{OC}}=\mathrm{j}\times10\times0.2\times\sqrt{2}\angle-45^\circ\,\mathrm{V}=2\sqrt{2}\angle45^\circ\,\mathrm{V}$$

$$Z_{\mathrm{i}}=\frac{(\omega M)^2}{R_1+\mathrm{j}\omega L_1}+\mathrm{j}\omega L_2=(0.2+\mathrm{j}9.8)\Omega$$

由最大功率传输定理得 $Z_{\mathrm{L}}=(0.2-\mathrm{j}9.8)\Omega$ 时，负载消耗功率最大，最大功率为

$$P_{\max}=\frac{{U_{\mathrm{S}}}^2}{4R_1}=\frac{(20\mathrm{V})^2}{4\times10\Omega}=10\mathrm{W}$$