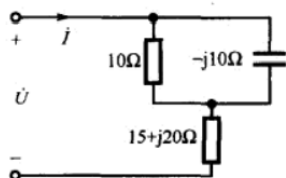


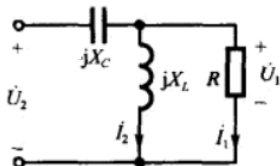
电路作业4 参考答案

1. 图示正弦稳态电路中, $u = 50\sqrt{2}\cos(100t + 45^\circ)\text{V}$, 试求 I 的有效值。



1. 根据 $u = 50\sqrt{2}\cos(100t + 45^\circ)$, 知 $U = 50\text{V}$
 该电路的阻抗 $Z = (15 + j20)\Omega + \frac{10\Omega \times (-j10\Omega)}{10\Omega + (-j10\Omega)}$
 $= (20 + j15)\Omega$
 $|Z| = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25\Omega$
 I 的有效值 $I = \frac{U}{|Z|} = 2\text{A}$

2. 图示正弦电流电路中, 工作频率 $\omega = 1000\text{rad/s}$, 已知电容 $C = 4\mu\text{F}$, $R = 1\text{k}\Omega$, $\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{3}$, 求 \dot{U}_1 在相位上超前于 \dot{U}_2 的相角。



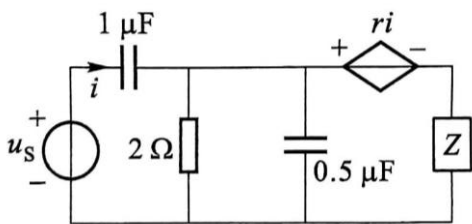
2. 容抗 $X_c = -\frac{1}{\omega C} = -250\Omega$
 由于电感与电阻并联, $\frac{I_1}{I_2} = \frac{U_1/R}{U_1/X_L} = \frac{X_L}{R} = \frac{1}{3}$, 得 $X_L = \frac{1}{3}R = \frac{1}{3}\text{k}\Omega$
 流经电容的电流 $\dot{I}_c = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_1}{R} + \frac{\dot{U}_1}{jX_L} = \frac{R + jX_L}{R \times jX_L} \times \dot{U}_1$
 该电路的总阻抗 $Z = jX_c + \frac{R \times jX_L}{R + jX_L}$
 那么 $\dot{U}_2 = Z \dot{I}_c$
 $= \frac{jX_c + \frac{R \times jX_L}{R + jX_L}}{\frac{R \times jX_L}{R + jX_L}} \times \dot{U}_1$
 $= \frac{1-j}{4} \dot{U}_1 = \frac{\sqrt{2} \angle -45^\circ}{4} \dot{U}_1$

所以 \dot{U}_1 在相位上超前于 \dot{U}_2 45°

注: 实际上可由分压公式直接得

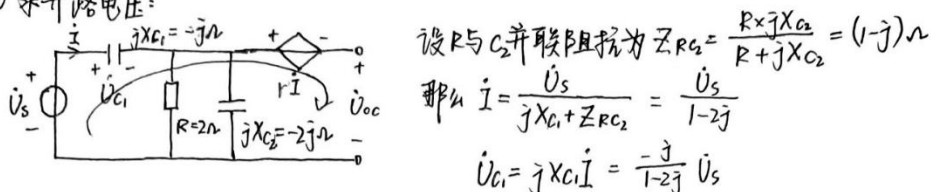
$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{Z}{Z_{RL}} \quad (\text{其中 } Z \text{ 为整个电路阻抗, } Z_{RL} \text{ 为 } R \text{ 与 } L \text{ 并联的阻抗})$$

3. 图示电路中 $u_s = 2 \cos \omega t \text{ V}$, $\omega = 10^6 \text{ rad/s}$, $r = 1 \Omega$ 。问负载阻抗 Z 为何值时可获得最大功率? 求出此最大功率。



3. 下面对原电路做戴维南等效:

① 求开路电压:



设 R 与 C_2 并联阻抗为 $Z_{RC_2} = \frac{R \times jX_{C_2}}{R + jX_{C_2}} = (1-j) \Omega$

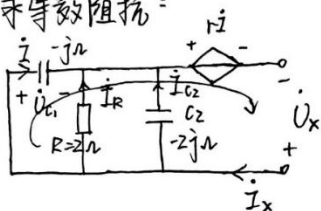
那么 $\dot{I} = \frac{\dot{U}_s}{jX_{C_1} + Z_{RC_2}} = \frac{\dot{U}_s}{1-2j}$

$\dot{U}_{C_1} = jX_{C_1} \dot{I} = \frac{-j}{1-2j} \dot{U}_s$

对图示回路列 KVL 方程: $\dot{U}_{oc} = \dot{U}_s - \dot{U}_{C_1} - r\dot{I} = \frac{-j}{1-2j} \dot{U}_s$

得 $\dot{U}_{oc} = \frac{\sqrt{2}}{5} (2-j) \text{ V}$, 那么 $U_{oc} = 0.2\sqrt{10} \text{ V}$

② 求等效阻抗:



设 C_1 两端电压为 \dot{U}_{C_1} , 参考方向如图, $\dot{U}_{C_1} = jX_{C_1} \dot{I}$

那么 $\dot{I}_x = \dot{I} + \dot{I}_R + \dot{I}_{C_2}$
 $= \dot{I} + \frac{\dot{U}_{C_1}}{R} + \frac{\dot{U}_{C_1}}{jX_{C_2}} = \frac{3-j}{2} \dot{I}$

对图示回路列 KVL 方程: $\dot{U}_x = \dot{U}_{C_1} + r\dot{I} = (jX_{C_1} + r)\dot{I} = (1-j)\dot{I}$

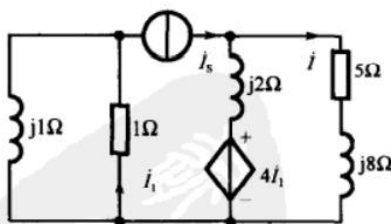
等效阻抗 $Z_i = \frac{\dot{U}_x}{\dot{I}_x} = \frac{4-2j}{5} \Omega$

③ 求最大功率:

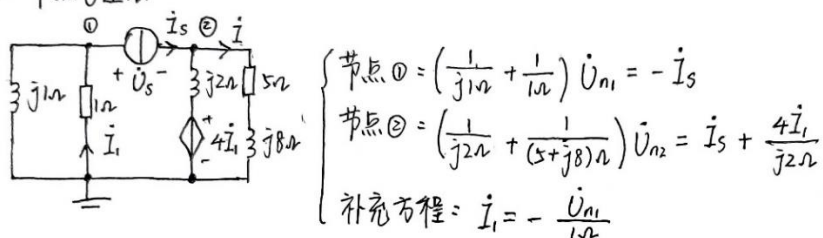
根据最大功率传输定理, 当 $Z = Z_i^* = (0.8 + 0.4j) \Omega$ 时功率最大

$$P_{max} = \frac{U_{oc}^2}{4 \text{Re}[Z_i]} = \frac{(0.2\sqrt{10})^2}{4 \times 0.8} = 0.125 \text{ W}$$

4. 图示正弦稳态电路中，已知 $\dot{I}_s = 5 \angle 0^\circ \text{A}$ ，试求电流 \dot{I} 。



4. 节点电压法=

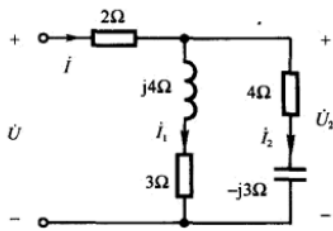


解得 $\dot{U}_{n1} = -2.5(1+j) \text{V}$

$\dot{U}_{n2} = \frac{10-5j}{\frac{1}{j2\Omega} + \frac{1}{(5+j8)\Omega}} \text{V}$ (比较复杂的中间量, 不具体算)

$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{n2}}{(5+j8)\Omega} = \frac{10-5j}{(5+j8)\Omega \times \left(\frac{1}{j2\Omega} + \frac{1}{(5+j8)\Omega}\right)} = \frac{10-5j}{5-2.5j} = 2 \angle 0^\circ \text{A}$

5. 图示正弦电路中, 已知 $\dot{I}_2 = 1\angle 0^\circ \text{A}$, 求电压 \dot{U} 及整个电路吸收的有功功率和无功功率。



$$5. \dot{U}_2 = (4 - j3)\Omega \times 1\angle 0^\circ \text{A} = (4 - j3) \text{V}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_2}{(3 + j4)\Omega} = -j \text{A}, I_1 = 1 \text{A}$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = (1 - j) \text{A}, I = \sqrt{2} \text{A}$$

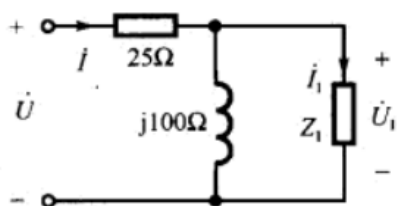
整个电路吸收的有功功率为各个电阻的功率之和

$$\begin{aligned} P &= P_1 + P_2 + P_3 \\ &= 2\Omega \times (\sqrt{2}\text{A})^2 + 3\Omega \times (1\text{A})^2 + 4\Omega \times (1\text{A})^2 \\ &= 11 \text{W} \end{aligned}$$

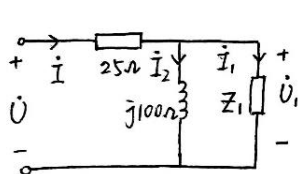
整个电路吸收的无功功率为电感与电容的功率之和

$$\begin{aligned} Q &= Q_L + Q_C \\ &= 4\Omega \times (1\text{A})^2 - 3\Omega \times (1\text{A})^2 \\ &= 1 \text{Var} \end{aligned}$$

6. 图示电路中, 已知阻抗 Z_1 端电压的有效值为 $U_1 = 100\text{V}$, Z_1 吸收的平均功率 $P = 400\text{W}$, 功率因数 $\cos\varphi = 0.8$ (感性), 求输入端电压 U 和电流 I 。



6. 将 \dot{U}_1 作为参考正弦量, 则 $\dot{U}_1 = 100\angle 0^\circ\text{V}$
 对阻抗 Z_1 有 $P_{Z_1} = U_1 I_1 \cos\varphi$, 得 $I_1 = \frac{400\text{W}}{100\text{V} \times 0.8} = 5\text{A}$
 由于 $\cos\varphi = 0.8$, 那么 $\varphi = 36.9^\circ$, $\dot{I}_1 = (4 - j3)\text{A} = 5\angle -36.9^\circ\text{A}$



$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_1}{j100\Omega} = -j\text{A} = 1\angle -90^\circ\text{A}$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = (4 - 4j)\text{A} = 4\sqrt{2}\angle -45^\circ\text{A} \quad (\text{KCL 方程})$$

$$\dot{U} = 25\Omega \times \dot{I} + \dot{U}_1 = (200 - j100)\text{V} \quad (\text{KVL 方程})$$

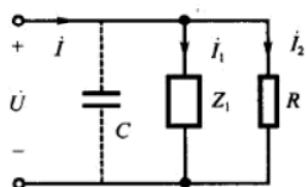
$$= 223.6\angle -26.57^\circ\text{V}$$

所以 $U = 223.6\text{V}$, $I = 4\sqrt{2} = 5.657\text{A}$.

7. 图示工频正弦交流电路中, $U = 100\text{V}$, 感性负载 Z_1 的电流 I_1 为 10A , 功率因数 $\lambda_1 = 0.5$, $R = 20\Omega$ 。

(1) 求电源发出的有功功率、电流 I 和总功率因数 λ 。

(2) 当电流 I 限制为 11A , 应并联最小多大电容 C ? 并求此时总功率因数 λ 。



7. (1) 将 \dot{U} 作为参考正弦量, $\dot{U} = 100 \angle 0^\circ \text{V}$
 由 $\lambda_1 = 0.5$ 知 $\varphi_1 = 60^\circ$, $\dot{I}_1 = 10 \angle -60^\circ \text{A}$
 $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 10 \angle -60^\circ \text{A} + \frac{100\text{V}}{20\Omega} = 13.23 \angle -40.89^\circ \text{A}$, 则 $I = 13.23 \text{A}$
 有功功率 = $P = P_{Z_1} + P_R = UI_1 \lambda_1 + \frac{U^2}{R} = 1000 \text{W}$
 \dot{U} 与 \dot{I} 的相位角之差为 $\varphi = 40.89^\circ$,
 则总功率因数 $\lambda = \cos \varphi = 0.756$

补充参考答案:

Z_1 吸收的无功功率为 $Q_1 = UI_1 \sin \varphi_1 = 100 \times 10 \sin 60^\circ = 500\sqrt{3} = 866.0 \text{ var}$

整个电路: $Q = Q_1 = 866 \text{ var}$, $P = 1000 \text{W}$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{1000^2 + 866^2} = 1322.86 \text{ VA}$$

$$\text{电源电流} = I = \frac{S}{U} = \frac{1322.86}{100} = 13.23 \text{ A}$$

$$\text{总功率因数} = \lambda = \frac{P}{S} = \frac{1000}{1322.86} = 0.756$$

(2) 分析: 并联电容 C 后, 整个电路 P 不改变, Q 减小。

由 $I \leq 11 \text{A}$, $U = 100 \text{V}$, $P = 1000 \text{W}$ 得

新的总功率因数 $\lambda' = \frac{P}{UI} = 0.909$, 则 $\varphi' = \arccos \lambda' = 24.62^\circ$

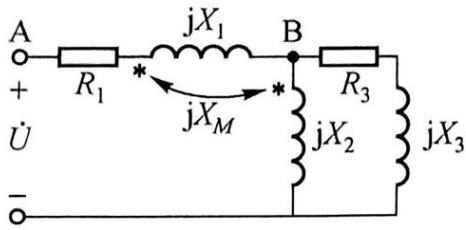
新的无功功率 = $Q' = P \tan \varphi' = 458.62 \text{ var}$

减小的无功功率是并联的电容 C 吸收的:

$$Q_c = Q - Q'$$

$$\text{又 } Q_c = -\omega C U^2, \text{ 得 } C = \frac{Q - Q'}{\omega U^2} = \frac{866 - 458.62}{314 \times 100^2} = 1.3 \times 10^{-4} \text{ F}$$

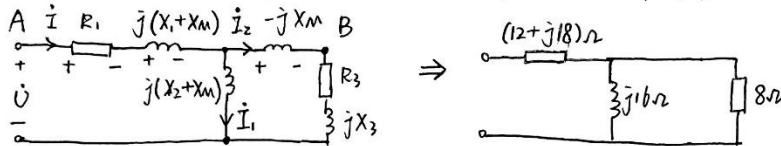
8. 设图示电路中, $R_1 = 12\Omega, X_1 = 12\Omega, X_2 = 10\Omega, X_M = 6\Omega, R_3 = 8\Omega, X_3 = 6\Omega, U = 120V$.
求电压 U_{AB} .



(这是作业题)

8. 以 \dot{U} 为参考正弦量, 则 $\dot{U} = 120\angle 0^\circ V$

① 消去互感后的电路如下图 (右图为方便计算而改画的草图) =



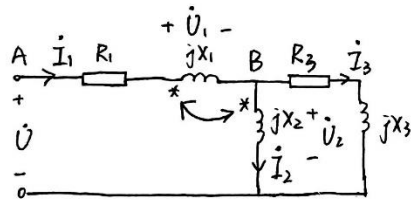
$$\text{电路的阻抗 } Z = (12 + j18)\Omega + \frac{8 \times j16\Omega}{8 + j16} = \frac{72 + j106}{5}\Omega$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = 4.27 \angle -49.04^\circ A$$

$$\text{由分流公式知 } \dot{I}_2 = \frac{j16}{8 + j16} \times \dot{I} = 3.82 \angle -22.48^\circ A$$

$$\dot{U}_{AB} = (R_1 + jX_1 + jX_M)\dot{I} - jX_M\dot{I}_2 = 83.51 \angle -6.53^\circ V$$

②



设 L_1, L_2 两端电压为 \dot{U}_1, \dot{U}_2 , 各支路电流分别为 $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$, 参考方向如图

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = jX_1\dot{I}_1 + jX_M\dot{I}_2 & \text{①} \\ \dot{U}_2 = jX_M\dot{I}_1 + jX_2\dot{I}_2 & \text{②} \end{cases}$$

$$\text{列KCL方程: } \dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 \quad \text{③}$$

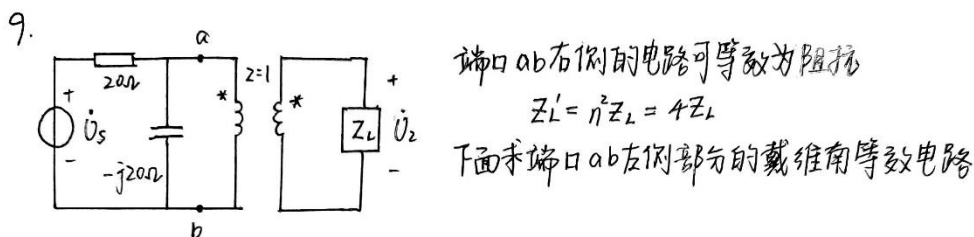
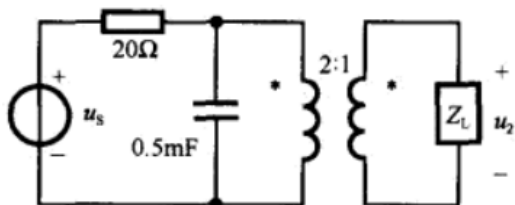
$$\text{列KVL方程: } \dot{U} = R_1\dot{I}_1 + \dot{U}_1 + \dot{U}_2 \quad \text{④}$$

$$\text{又 } (R_3 + jX_3)\dot{I}_3 = \dot{U}_2 \quad \text{⑤}$$

根据以上五个方程, 解得 $\dot{I}_1 = 4.27 \angle -49.04^\circ A, \dot{I}_2 = 1.912 \angle -112.48^\circ A$

$$\text{可知 } \dot{U}_{AB} = R_1\dot{I}_1 + \dot{U}_1 = 83.51 \angle -6.53^\circ V$$

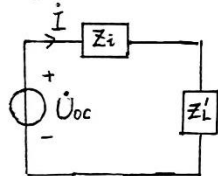
9. 图示电路中, 已知正弦电压源 $u_s = 10\cos 100t$ V, 负载 Z_L 通过变比为 2:1 的理想变压器与电路相连。求 Z_L 为何值时它消耗的平均功率为最大? 并求此时负载的平均功率 P 、视在功率 S 和电压 u_2 。



等效阻抗: 将电压源短路, 等效阻抗即为电阻与电容并联

$$Z_i = \frac{20\Omega \times (-j20\Omega)}{20\Omega - j20\Omega} = 10(1-j)\Omega$$

断路电压: 由分压公式得 $\dot{U}_{oc} = \frac{-j20\Omega}{(20-j20)\Omega} \dot{U}_s = 5\angle -45^\circ$ V, $U_{oc} = 5$ V



当 $Z_L' = Z_i = 10(1+j)\Omega$ 时, 取得最大功率
 此时电路中总阻抗 $Z = 20\Omega$, 电流 $I = \frac{U_{oc}}{Z} = 0.25$ A
 负载 Z_L' 的功率:

$$P = 10\Omega \times I^2 = 0.625 \text{ W}$$

$$S = \frac{P}{\cos 45^\circ} = 0.625\sqrt{2} = 0.884 \text{ VA (阻抗角为 } 45^\circ)$$

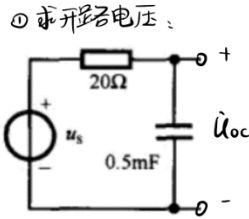
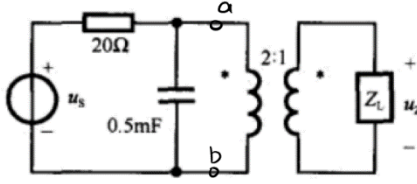
而所要求的 $Z_L = \frac{1}{4} Z_L' = (2.5 + j2.5)\Omega$

其功率与 Z_L' 一致, $P = 0.625 \text{ W}$, $S = 0.884 \text{ VA}$

(此版答案中漏了个 $u_2 = 2.5\cos 100t$ (V), 下面的修改版答案中补上了)

9. 图示电路中，已知正弦电压源 $u_s = 10 \cos 100t \text{ V}$ ，负载 Z_L 通过变比为 2:1 的理想变压器与电路相连。求 Z_L 为何值时它消耗的平均功率为最大？并求此时负载的平均功率 P 、视在功率 S 和电压 u_2 。

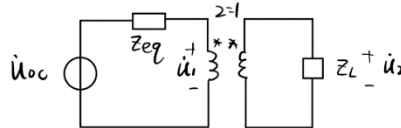
解：将 ab 左端作戴维南等效：



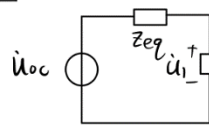
① 求开路电压：
 $U_S = 5\sqrt{2} \angle 0^\circ \text{ V}$ (有效值相量)
 $X_C = \frac{1}{j\omega C} = -j20 \Omega$
 由分压公式： $U_{oc} = U_S \times \frac{-j20}{20-j20}$
 $= 5 \angle -45^\circ \text{ V}$
 (有效值相量)

② 等效阻抗：将电压源置零 (即短路)
 即为 $-j20 \Omega$ 阻抗与 20Ω 电阻并联
 $\Rightarrow Z_{eq} = \frac{-j400}{20-j20} = 10(1+j) \Omega$

戴维南等效后的电路相量模型如下所示



将 Z_L 等效至一次侧：



等效后的 $n^2 Z_L$ 上的电压即为原的一次侧电压 (可以去看这个 $n^2 Z_L$ 是怎么推出来的，里面试电压是 U_1)

则由最大功率传输定理 $n^2 Z_L = \overline{Z_{eq}} = (10+10j) \Omega$ 时

功率最大， $Z_L = 2.5 + j2.5 \Omega$

此时 $P_{max} = \frac{U_{oc}^2}{4 \times \text{Re}[Z_L]} = \frac{25}{40} = 0.625 \text{ W}$

$S = \frac{P_{max}}{\cos 45^\circ} = 0.884 \text{ VA}$

阻抗角，即为 Z_L 的功率因数角， $\cos 45^\circ$ 为功率因数

由分压公式 $U_1 = \frac{10-j10}{20} \times U_{oc} = 2.5\sqrt{2} \angle 0^\circ \text{ V}$

$\Rightarrow u_1 = 5 \cos 100t \text{ V}$

\rightarrow 由变压器特性方程 $u_2 = \frac{1}{2} u_1 = 2.5 \cos 100t \text{ V}$

附：批改报告

这题的问题很严重。

这个题比较综合，应该能把大家知识链条上脱漏的地方揪出来了。问题大致分为以下几类：

1. 知识点很模糊，未认真关注公式的使用条件和物理量意义，几乎有点乱写。

最大功率传输的基本流程，就是将阻抗以外的电路做戴维南等效，化成最大功率传输定理适用电路的标准形式 (书 P110 图 4.37，注意图注：讨论传输最大功率的电路，也就是说咱们的最大功率传输定理是在那样的电路下讨论出来的，所以要用这个定理，首先要把电路化成图 4.37 的形式，也就是：理想源串内阻抗，再串上外加负载)，然后再应用共轭匹配/模匹配条件和求功率公式 (当然不用也行)。对于负载在理想变压器二次侧的题目，常常将二次侧阻抗等效到一次侧来，可以这样做的原因我在第 4 讲 (下) 4.8 例 3 的讲解课件中已经写得很详细，此处不再赘述。

对于“共轭匹配”的求功率公式，注意公式里 U_s 和 R 的意义：

U_s ，是我们等效完了的电路中的电源的电压有效值，这里注意两点：①等效后的电路；②有效值；

R ，则是我们等效完了的电路中的内阻抗/负载实部。注意，不是电路中的随便一个电阻。很多同学做题的时候把那个 20Ω 电阻代进去了。

简言之，用定理的时候一定要看清楚适用条件、仔细琢磨公式里的每个物理量的意义。

2. 等效电路不会求或求错：这个就是多练。戴维南等效操作流程固定，无非开路电压、等效电阻。等效电阻无非三种求法：串并联等效、外施激励、开路短路。不知道做错的同学，是不是回炉重造不够成功，现在还来得及。

3. 对引入相量的意义理解不清，幅值、有效值相量和瞬时表达式分不清楚。

举几例：①想求有效值，求了个幅值相量，然后下面又用这个幅值相量的模作为有效值，导致错误；

②写了个有效值相量的符号（不带 m 的），结果后面跟的是个幅值相量。常见错误 $\dot{U}_s = 10\angle 0^\circ \text{V}$ ，应该是

$$\dot{U}_s = 5\sqrt{2}\angle 0^\circ \text{V}。$$

③相量只针对电压、电流，有同学把阻抗加了个点，也写成相量了。课本上已经明说了，阻抗不能视为相量，因为阻抗仅仅是一个复数，不是代表正弦量，而相量的引入是为了表示正弦量。

④复功率的表示是用 S 上加一弯或一横，加一点就不对了，因为复功率也不是相量。

⑤这是最多见的一个错误。题目要求的是 u_2 （小写），是瞬时表达式，但是很多同学求的是有效值或相量。

希望大家能认真订正，通过这一题把缺漏知识点补清楚！