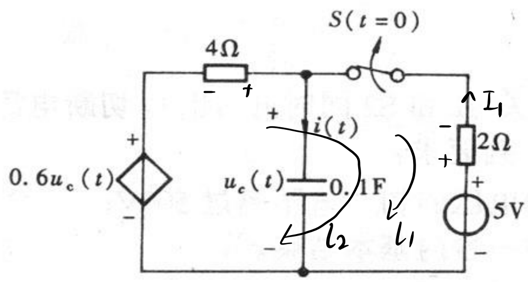
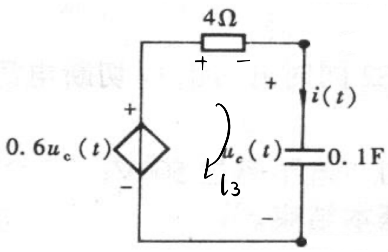
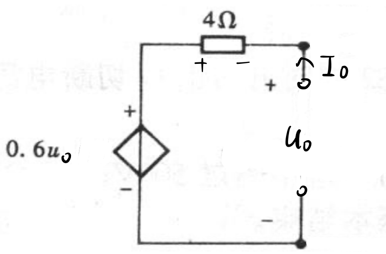
电路复习作业 8　线性动态电路暂态过程的时域分析

参考答案

1．（10 分）如图所示电路在换路前已工作了很长时间，t＝0 时开关断开。试求零输入响应 $i(t)$。







解：换路前 电容支路相当于开路，

由 l_1 回路 KVL：　$5 = U_C + 2I_1$　$\Rightarrow$　$I_1 = \frac{5}{12}A$

由 l_2 回路 KVL：　$0.6U_C + 6I_1 = 5$　　$U_C = \frac{25}{6}V$

换路前后电容电压不发生突变　$\Rightarrow U_C(0+) = \frac{25}{6}V$

换路后由 l_3 回路 KVL　$U_C(t) + 4i(t) = 0.6U_C(t)$

$\Rightarrow$　$U_C(t) = -10i(t)$

又　$i(t) = 0.1\frac{du_C(t)}{dt}$　$\Rightarrow$　$U_C(t) = -\frac{du_C(t)}{dt}$

此为一阶线性微分方程　结合　$U_C(0+) = \frac{25}{6}V$

解之得　$U_C(t) = \frac{25}{6}e^{-t}\ V$　$(t \geq 0)$

$i(t) = 0.1\frac{du_C(t)}{dt} = -\frac{5}{12}e^{-t}$ (A)　$(t>0)$

（也可以利用三要素法求解：此时要求解电容看进去的戴维南等效电阻：在端口外施激励 U_0，则受控电压源上的电压为 $0.6U_0$

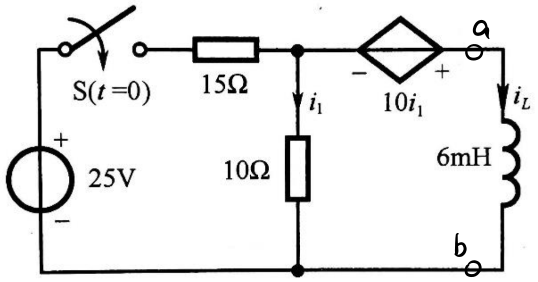
则由 KVL　$-4I_0 + U_0 = 0.6U_0$　（外施激励的电压刚好在原先电容电压的位置）

$\Rightarrow$　$\frac{U_0}{I_0} = 10$　$\Rightarrow$ 电容看进去的等效电阻为 10Ω

则 $\tau = R_{eq}C = 1s$　零输入响应为　$U_C(t) = U_C(0+)e^{-t/\tau} = \frac{25}{6}e^{-t}\ V$

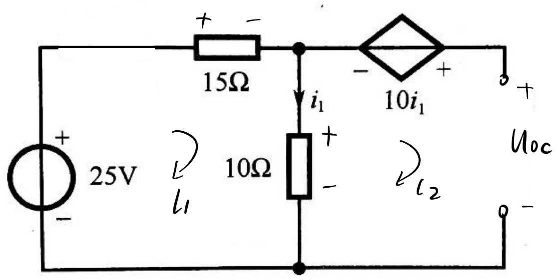
同上可求 $i(t)$。）

2．（10 分）如图所示电路中，$i_L(0_-)=0$，$t=0$ 时开关 S 闭合，求 $t>0$ 时的 $i_L(t)$。



解：将换路后的ab左侧电路作一戴维南等效。

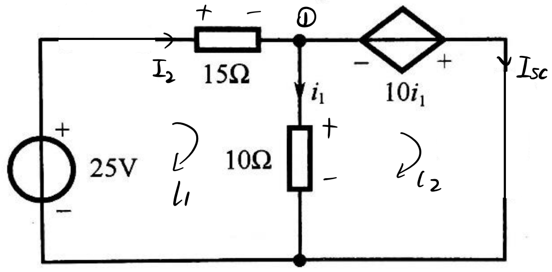
① 求开路电压



由 l_1 KVL　　$25=(15+10)i_1$　⇒ $i_1=1A$

由 l_2 KVL　　$U_{oc}=10\times1+10\times1=20V$

② 求等效电阻：利用开路短路法，即将端口短路，求短路电流。



① 节点KCL：　　$I_2=I_1+I_{sc}$　　→ 此处 i_1 与 I_1 不区分大小写，是因为是直流稳态情形

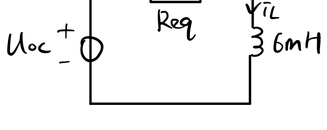
l_2 KVL：　　$20I_1=0$　⇒ $I_1=0$

$\Rightarrow I_2=I_{sc}$

l_1 KVL：　　$25V=15I_2$　⇒ $I_2=\frac{5}{3}A$　⇒ $I_{sc}=\frac{5}{3}A$

$\Rightarrow R_{eq}=\frac{U_{oc}}{I_{sc}}=20\times\frac{3}{5}=12\Omega$。

等效后的电路如下所示。



$i_L(\infty)=\frac{U_{oc}}{R_{eq}}=\frac{20}{12}=\frac{5}{3}A$

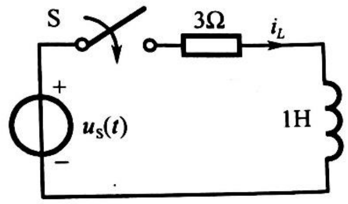
$\tau=\frac{L}{R_{eq}}=\frac{6\times10^{-3}}{12}=5\times10^{-4}s$

⇒ 由三要素公式

$i_L(t)=\frac{5}{3}-\frac{5}{3}e^{-2000t}\ A$

3．填空题。【得出结果后请附上规范分析过程，写分析过程不计时】

（1）（**3 分**）图示电路中，$u_S(t)=10\sin(4t+\theta)$V，电感无初始储能，$t=0$ 时将开关 S 闭合。若 S 闭合后电路中不产生过渡过程，则电源的初相角 θ 为 $53.1°$. $(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$



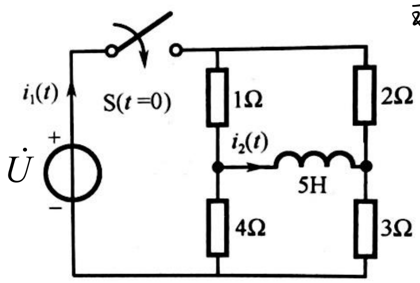
$u_S(t)=10\sin(4t+\theta)=10\cos(4t+\theta-90°)$　接入角为 $\psi_u=\theta-90°$

$\omega=4rad/s$　$X_L=\omega L=4\Omega$　则 $\varphi=\arctan\frac{X_L}{R}=53.1°$

则 $\psi_i=\psi_u-\varphi=\theta-143.1°=\pm90°$ ⇒ $\theta=53.1°$.

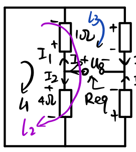
关于正弦激励的RL串联电路，请自行查看书P213-215 相关内容，感受时域分析的原始方法。

（2）（**3 分**）图示电路中，电源角频率为 1 rad/s，电感无初始储能，$t=0$ 时将开关 S 闭合。若 S 闭合后 $i_2(t)$ 直接达到稳态，则电源的接入角为 $-21.80°$.



求 5H 电感看进去的戴维南等效电路。(将电路化为 RL 串联电路)

求等效电阻：(外施激励方法)



由KCL：$I_0=I_1+I_2$

$I_0=I_3+I_4$

由 l_1、l_2 KVL　$I_1=4I_2$

$2I_3=3I_4$

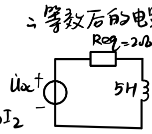
∴ $I_0=5I_2$　$I_3=3I_2$

$I_4=3I_2$　$U_0=I_1+6I_2=10I_2$ (由 l_3 KVL)

⇒ $Req=\frac{U_0}{I_0}=2\Omega$

求开路电压：(不用求具体开路电压，只要知道开路电压与 $\dot{U}$ 是同频率、同相的即可，因为本题对于激励，我们只用到频率和初相两个信息)

∴ 等效后的电路如下．



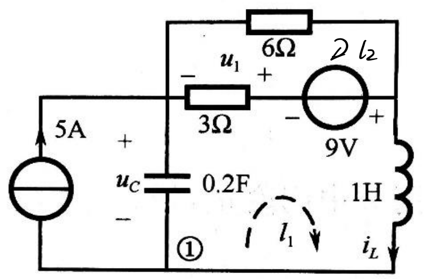
$\omega=1rad/s$ 时　$j\omega L=j5\Omega$

$\varphi=\arctan\frac{5}{2}=68.20°$

$\psi_i=\psi_u-\varphi=\psi_u-68.20°=\pm90°$

∴ $\psi_u=-21.80°$.

（3）（**4 分**）如图所示电路，若以 i_L 和 u_C 为状态变量，写出电路的状态方程：（以矩阵形式表达）



对图中节点①列KCL方程有　$C\frac{du_C}{dt}=-i_L+5$　①

对图中 l_1 回路列KVL方程有　$L\frac{di_L}{dt}=u_C+9+u_1$　②

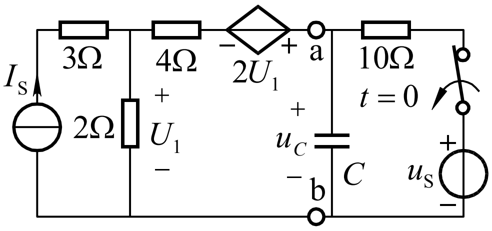
为消去 u_1 补充方程　$9+u_1=-(i_L+\frac{u_1}{3})\times6$　(l_2 KVL)

解得　$u_1=-2i_L-3$

代入 ①、②式整理得状态方程

$$\begin{bmatrix}\dot{u}_C\\ \dot{i}_L\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-5\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_C\\ i_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&5\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\5\end{bmatrix}$$

4.（10 分）图示电路原处于稳态，$I_S=1\text{A}$，$u_S=20\cos(10t)\text{V}$，$C=0.02\text{F}$。$t=0$时开关由闭合突然断开，用三要素法求$t>0$时的电压$u_C(t)$。



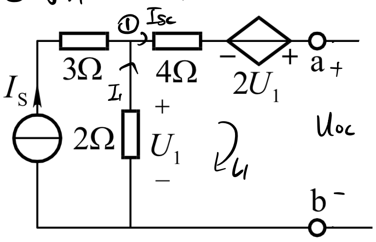
解：为简化计算，先对a b左侧电路作一戴维南等效、

① 求开路电压：

$U_1=2I_S=2V$

由l_1 KVL

$U_{oc}=U_1+2U_1=6V$



② 求等效电阻：利用开路短路法，将端口短路求短路电流，

由l_1 KVL：$U_1+2U_1=4I_{sc}$

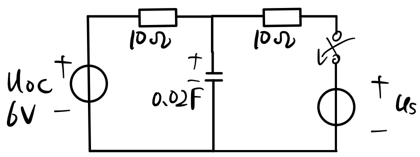
由①KCL：$I_S+I_1=I_{sc}$

补充：$U_1=-2I_1$

解得 $\begin{cases} I_1=-0.4A \\ I_{sc}=0.6A \\ U_1=0.8V \end{cases}$

∴ $R_{eq}=10\Omega$

∴ 戴维南等效后的电路：



换路前，由叠加定理求解 $u_C(0_-)$：

① 直流电源单独作用时 $u_{C(0)}=3V$

② 正弦电源单独作用时：$-j\frac{1}{\omega C}=-5j$

$Z_{eq}=10\Omega+\frac{-50j}{10-j5}=12-j4\ \Omega$

$\dot{U}_{C(1)m}=\dot{U}_{sm}-\frac{\dot{U}_{sm}}{Z_{eq}}\times10=5-j5\ V$

∴ $u_{C(1)}=5\sqrt{2}\cos(10t-45^\circ)\ V$

∴ $u_C(t)=3+5\sqrt{2}\cos(10t-45^\circ)\quad(t\le0)$

∴ 由换路定律

$u_C(0_+)=u_C(0_-)=3+5=8V$

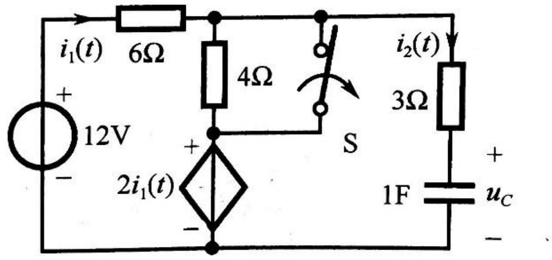
$u_C(\infty)=6V$

$T=RC=10\times0.02=0.2s$

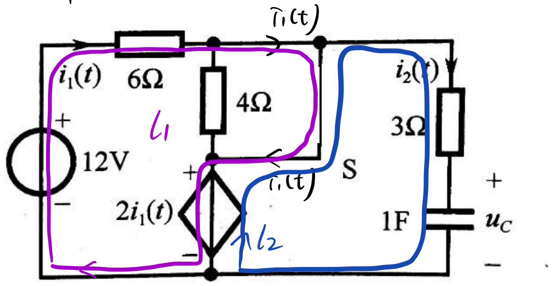
∴ 由三要素公式有 $u_C(t)=u_C(\infty)+[u_C(0_+)-u_C(\infty)]e^{-t/T}$

$=6+2e^{-5t}$ V、$(t>0)$

5. （**10 分**）图示电路原处于稳态，$t=0$ 时开关 S 断开，用三要素法求 $i_2(t)$，并计算在暂态过程中 3Ω 电阻所消耗的能量。



解：开关断开前：

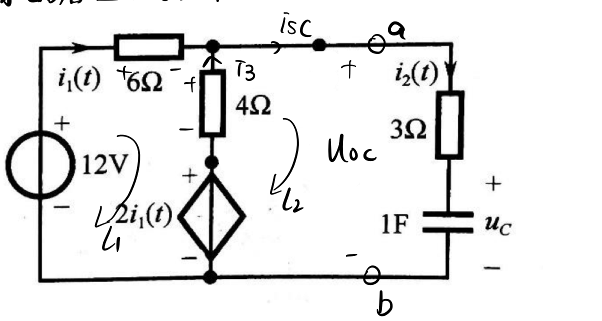


由回路 l_1 KVL　$6i_1+2i_1=12 \Rightarrow i_1=\frac{3}{2}A$

由回路 l_2 KVL　$u_c=2i_1=3V$

换路后，由换路定律　$u_c(0+)=u_c(0-)=3V$

求 ab 看进去的戴维南等效电路



① 求开路电压　由 l_1 KVL：$6i_1+4i_1+2i_1=12$

$\Rightarrow i_1=1A$

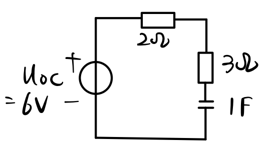
由 l_2 KVL：$U_{oc}=2i_1+4i_1=6V$

② 求等效电阻，将端口短路求短路电流，

可知 $i_1=\frac{12V}{6\Omega}=2A$　$i_3=\frac{2i_1}{4}=1A$

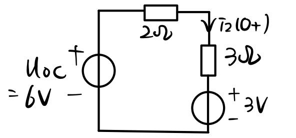
由 KCL，$i_{sc}=3A$　$\therefore R_{eq}=\frac{U_{oc}}{i_{sc}}=2\Omega$

∴戴维南等效电路如下：



$\tau=RC=(2+3)\times1=5s$

易知 $i_2(\infty)=0$



下求 $i_2(0+)$：$t=0+$ 时，

$u_c(0+)=3V$，将电容替换为一电压源，如下左图。

$i_2(0+)=\frac{6-3}{5}=0.6A$

∴由三要素公式　$i_2(t)=i_2(\infty)+[i_2(0+)-i_2(\infty)]e^{-t/\tau}$

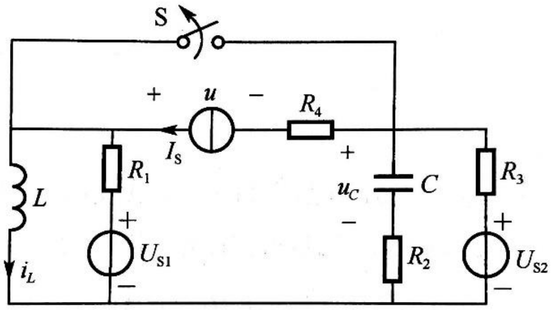
$=0.6e^{-0.2t}$ A

暂态过程中 3Ω 电阻消耗总能量为

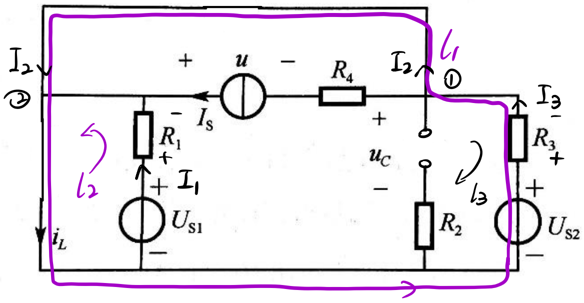
$w=\int_0^\infty i^2R\,dt=\int_0^\infty 3\times0.36e^{-0.4t}dt=1.08\int_0^\infty e^{-0.4t}dt$

$=1.08\div(-0.4)\,e^{-0.4t}\Big|_0^\infty=1.08\div0.4=2.7$ J

6.（10 分） 动态电路如下图所示，已知 $R_1=5\Omega$，$R_2=R_3=10\Omega$，$R_4=2\Omega$，$L=2H$，$C=0.01F$，$U_{S1}=20V$，$U_{S2}=30V$，$I_S=6A$，开关 S 打开前电路已达稳态，$t=0$ 时 S 打开。求 S 打开后电容电压 $u_C(t)$、电感电流 $i_L(t)$和电流源两端电压 $u(t)$。



解：换路前电感相当于短路，电容相当于开路。



由l_1 KVL $U_{S2}=I_3R_3 \Rightarrow I_3=3A$

由①KCL $I_3=I_S+I_2 \Rightarrow I_2=-3A$

l_2 KVL: $U_{S1}=I_1R_1 \Rightarrow I_1=4A$

由② KCL $I_L=I_2+I_S+I_1=7A$

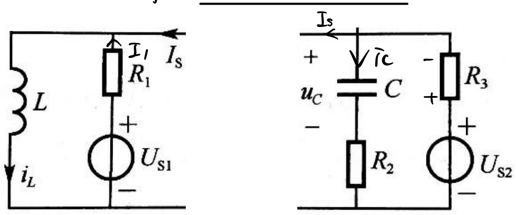
∴ $i_L(0_-)=7A$

由l_3KVL $u_C(0_-)=0V$

由换路定律 $u_C(0_+)=u_C(0_-)=0V$

$i_L(0_+)=i_L(0_-)=7A$

换路后电路可分为左右两个一阶电路 [仍为二阶电路]



左边电路：$\tau_1=\frac{L}{R_1}=0.4s$

$i_1(\infty)=\frac{U_{S1}}{R_1}=4A$ ∴ $i_L(\infty)=I_S+i_1(\infty)=10A$ (由KCL)

∴由三要素公式得 $i_L(t)=10-3e^{-2.5t}$ A

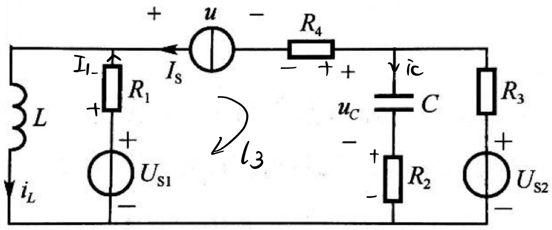
$i_1(t)=i_L(t)-6=4-3e^{-2.5t}$ A

右边电路：$\tau_2=(R_2+R_3)C=0.2s$

$u_C(\infty)=U_{S2}-R_3I_S=-30V$

∴由三要素公式得 $u_C(t)=-30+30e^{-5t}$ V

$i_C(t)=C\frac{du_C(t)}{dt}=0.01\times(-150e^{-5t})=-1.5e^{-5t}$ A



由回路l_3 KVL知

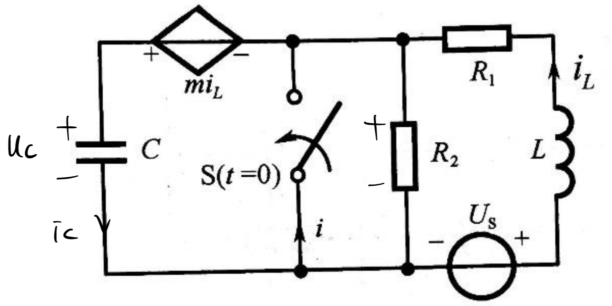
$$u(t)=I_SR_4-u_C(t)-i_CR_2+U_{S1}-i_1R_1$$
$$=12+30-30e^{-5t}+15e^{-5t}+20-20+15e^{-2.5t}$$
$$=42+15e^{-2.5t}-15e^{-5t}\ V$$

∴ $u_C(t)=-30+30e^{-5t}$ V

$i_L(t)=10-3e^{-2.5t}$ A

$u_C(t)=42+15e^{-2.5t}-15e^{-5t}$ V.

7.（10 分） 图示电路中，$R_1=R_2=4\Omega$，$L=4H$，$C=2F$，$U_S=16V$，$m=4$。S 断开已久，$t=0$ 时 S 闭合。求 $t>0$ 时的 $i(t)$。



解：换路前，$i_L=\frac{U_S}{R_1+R_2}=2A$　　$u_C=mi_L+R_2 i_L=16V$

换路后，电路分为左右两个一阶电路（伪二阶电路）

且左侧为一电容串联电压源支路，电容电压可能发生跃变。

先分析右侧电路：$i_L(0+)=i_L(0-)=2A$（换路定律）

$$i_L(\infty)=\frac{U_S}{R_1}=4A$$

$$\tau_1=\frac{L}{R_1}=1s$$

∴由三要素公式

$$i_L(t)=i_L(\infty)+[i_L(0+)-i_L(\infty)]e^{-t/\tau}$$
$$=4-2e^{-t}\ (t\geq 0)\ =(4-2e^{-t})\varepsilon(t)$$

$$\therefore u_C=mi_L=16-8e^{-t}\ (t>0)$$

由于电容电压发生跃变，求电容电流时应先将电容电压写成

全时域形式，即 $u_C(t)=(16-8e^{-t})\varepsilon(t)+16\varepsilon(-t)$.

$$\therefore i_C(t)=C\frac{du_C}{dt}=2\times[(16-8e^{-t})\delta(t)+8e^{-t}\varepsilon(t)-16\delta(t)]A$$
$$=-16e^{-t}\delta(t)+16e^{-t}\varepsilon(t)\quad A$$
$$=-16\delta(t)+16e^{-t}\varepsilon(t)\quad A$$

由KCL　$i=i_C-i_L$

$$=-16\delta(t)+16e^{-t}\varepsilon(t)-4\varepsilon(t)+2e^{-t}\varepsilon(t)$$
$$=-16\delta(t)+(18e^{-t}-4)\varepsilon(t)\quad A.$$