

# 电路

## 第3章 电路定理

---

开课教师：王灿

开课单位：机电学院--电气工程学科



# 本章导言

本章介绍电路理论中的几个常用定理。首先介绍置换定理；然后介绍齐性定理和叠加定理；它们是体现线性电路特点的重要定理，是线性方程的齐次性和可加性在电路中的体现；其次介绍戴维南定理和诺顿定理，它们是化简线性一端口电路的有效方法；最后介绍与基尔霍夫定律同样适用的特勒根定理，并以此证明互易定理。

1 置换定理

2 齐性和叠加定理

3 等效电源定理

4 特勒根定理

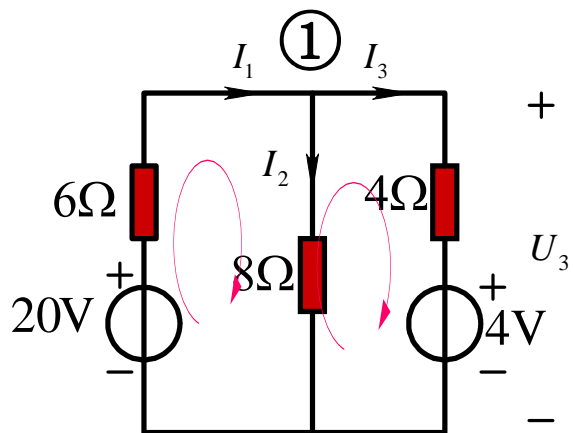
5 互易定理

6 对偶原理

## 3.1 置换定理

基本要求：理解置换定理的原理和内容，并能正确应用置换定理。

引例：求电流 $I_1$ ， $I_2$ ， $I_3$ 和电压 $U_3$



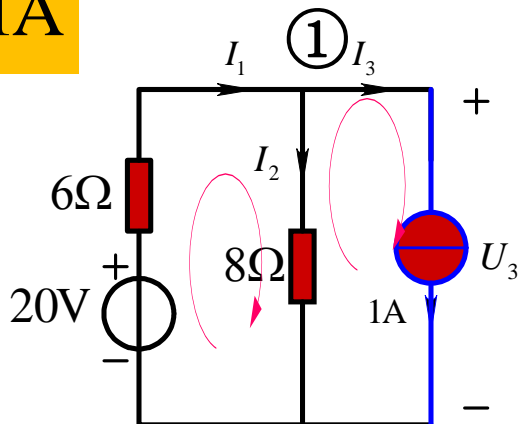
$$\begin{cases} -I_1 + I_2 + I_3 = 0 \\ 6\Omega \times I_1 + 8\Omega \times I_2 = 20\text{V} \\ -8\Omega \times I_2 + U_3 = 0 \\ U_3 = 4\Omega \times I_3 + 4\text{V} \end{cases}$$

$$I_1 = 2\text{A}, I_2 = 1\text{A}$$

$$I_3 = 1\text{A}, U_3 = 8\text{V}$$

# 3.1 置換定理

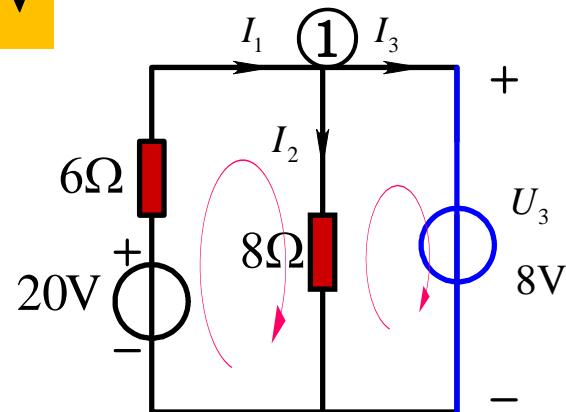
$$I_3 = 1A$$



$$\begin{cases} -I_1 + I_2 + 1A = 0 \\ 6\Omega \times I_1 + 8\Omega \times I_2 = 20V \\ -8\Omega \times I_2 + U_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow I_1 &= 2A, I_2 = 1A \\ U_3 &= 8V \end{aligned} \quad \boxed{I_3 = 1A}$$

$$U_3 = 8V$$



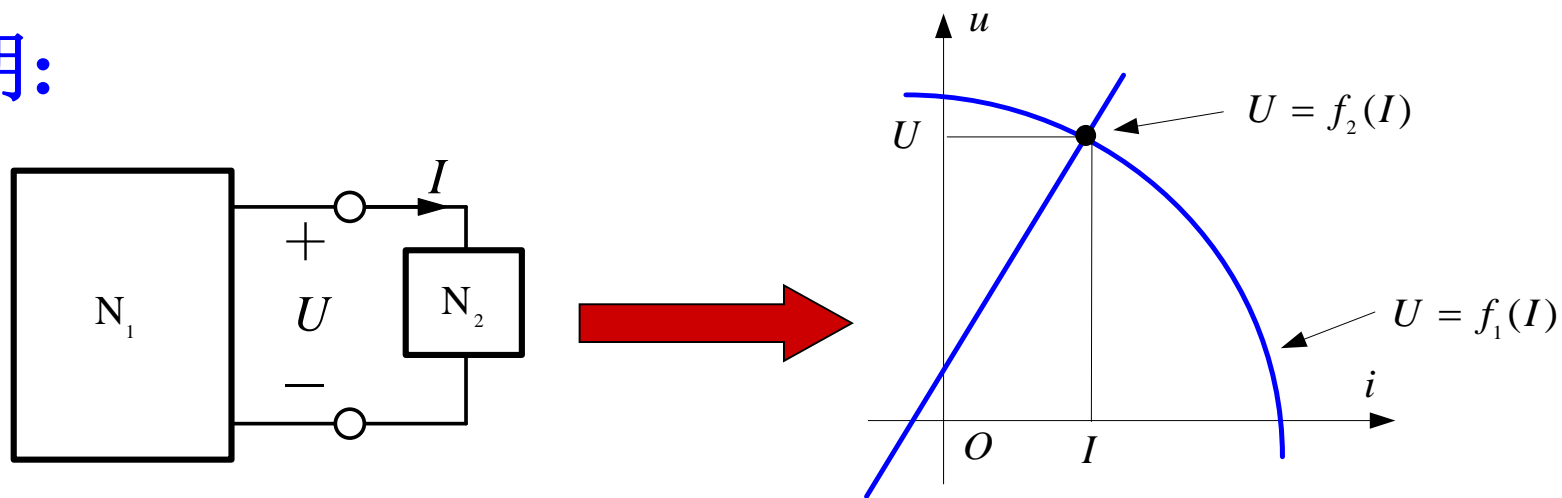
$$\begin{cases} -I_1 + I_2 + I_3 = 0 \\ 6\Omega \times I_1 + 8\Omega \times I_2 = 20V \\ -8\Omega \times I_2 + 8V = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow I_1 &= 2A, I_2 = 1A \\ I_3 &= 1A \end{aligned} \quad \boxed{U_3 = 8V}$$

## 3.1 置换定理

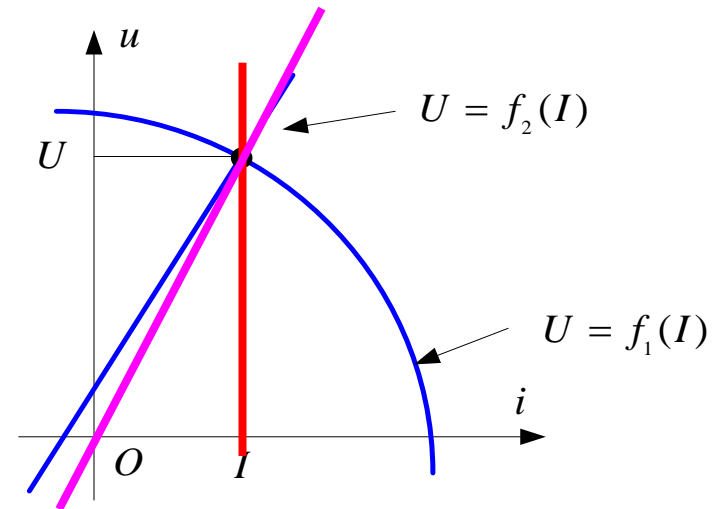
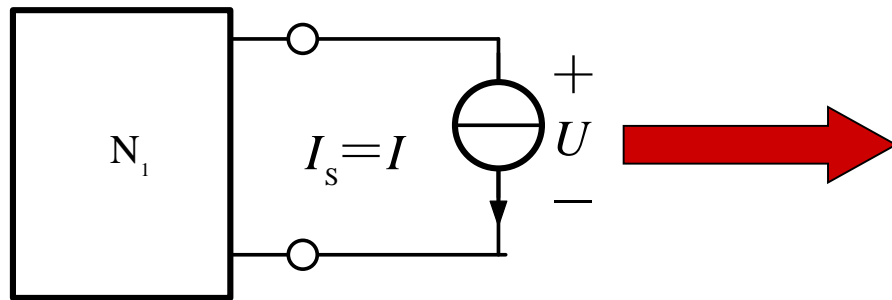
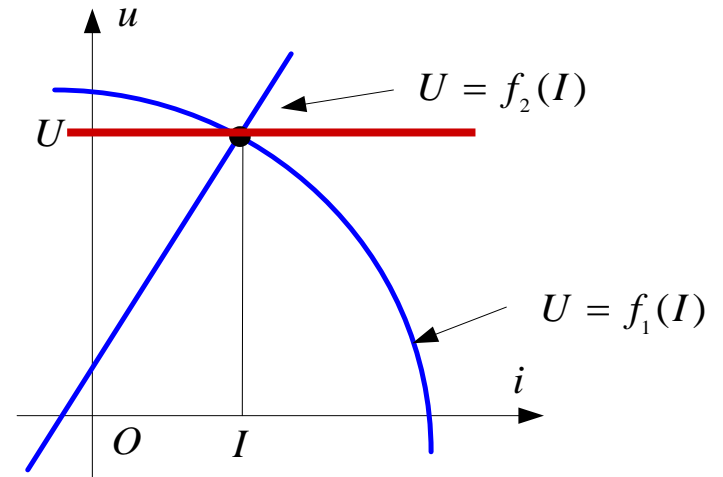
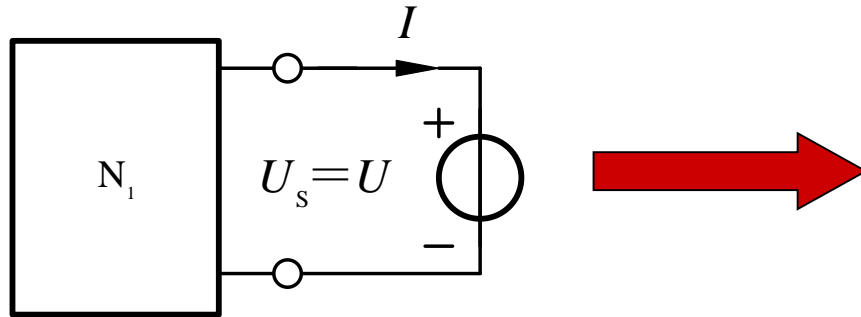
**置换定理：** 在任意线性和非线性电路中，若某一端口的电压和电流为 $U$ 和 $I$ ，则可用 $U_S=U$ 的电压源或 $I_S=I$ 的电流源来**置换**此一端口，而不影响电路中其它部分的电流和电压。

**证明：**



设 $N_1$ 和 $N_2$ 的端口电压、电流关系分别为 $U=f_1(I)$ 和 $U=f_2(I)$ ，则此时电路的解为？

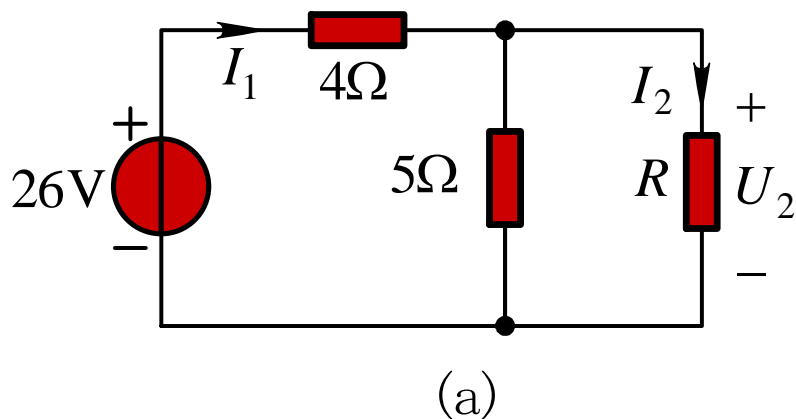
# 3.1 置換定理



## 3.1 置换定理

【例题3.1】图(a)所示电路，已知 $I_2=2\text{A}$ ，求电阻 $R$ 和电流 $I_1$ 。

解：根据置换定理，用 $2\text{A}$ 电流源置换电阻 $R$ 。列

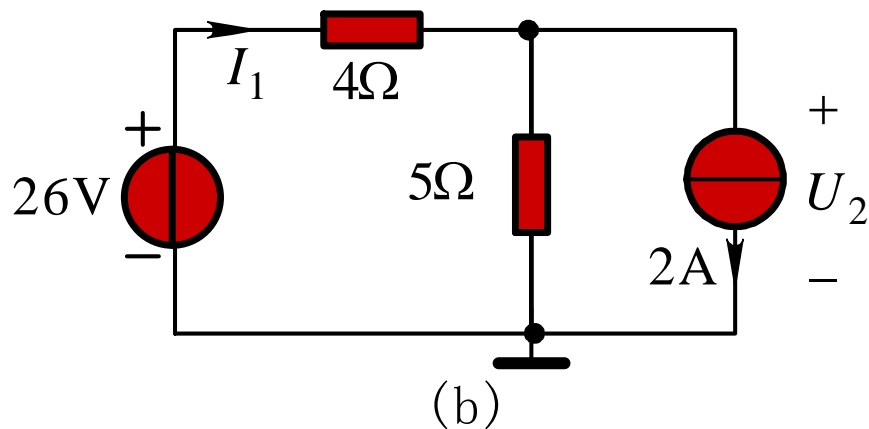


$$\left(\frac{1}{4\Omega} + \frac{1}{5\Omega}\right)U_2 = \frac{26\text{V}}{4\Omega} - 2\text{A}$$

$$\Rightarrow U_2 = 10\text{V}$$

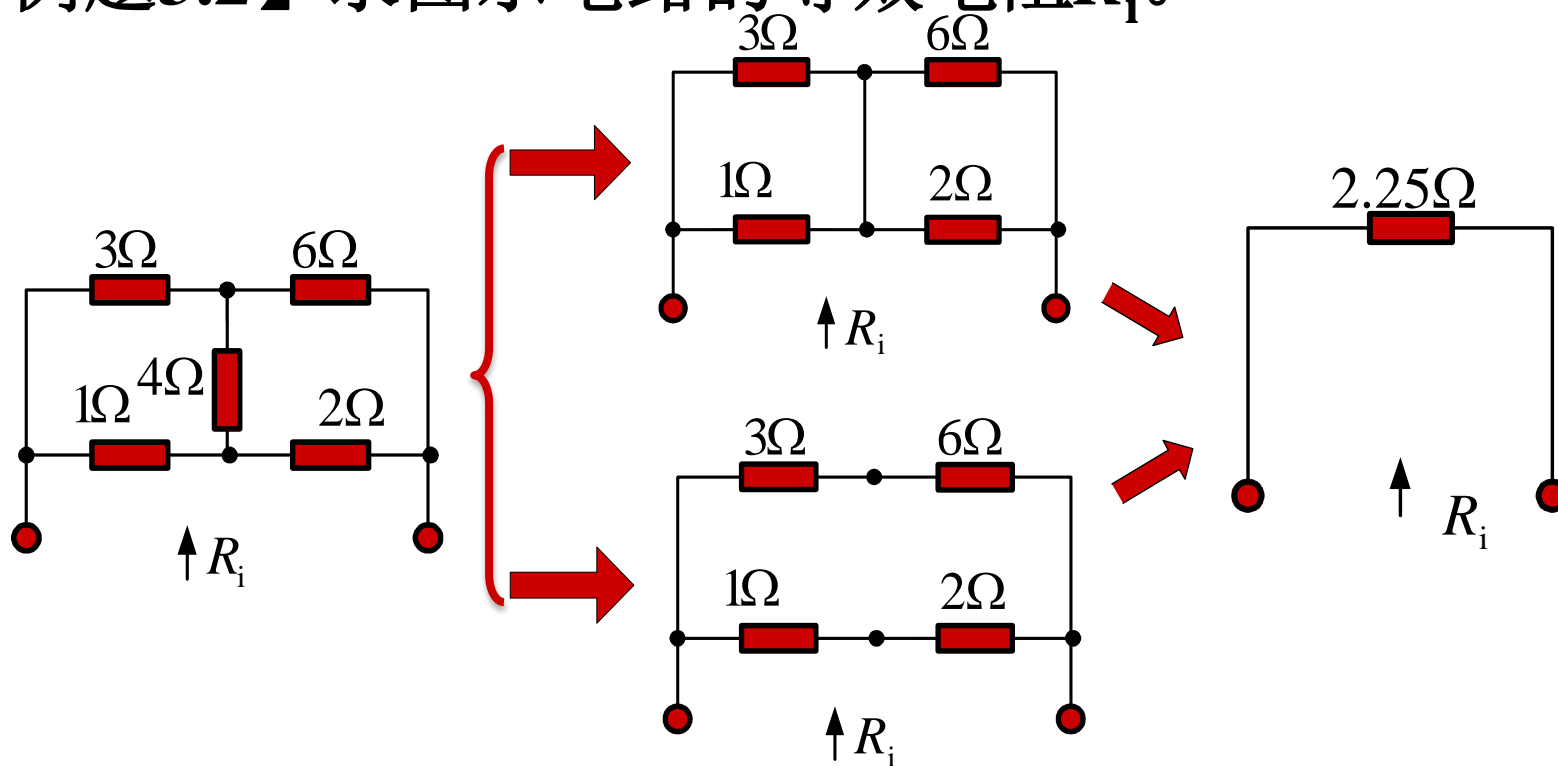
$$\Rightarrow R = \frac{U_2}{I_2} = 5\Omega$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{26\text{V} - U_2}{4\Omega} = 4\text{A}$$



## 3.1 置换定理

【例题3.2】求图示电路的等效电阻 $R_i$ 。



$$R_i = \frac{1 \times 3}{1 + 3} \Omega + \frac{2 \times 6}{2 + 6} \Omega = 2.25 \Omega$$

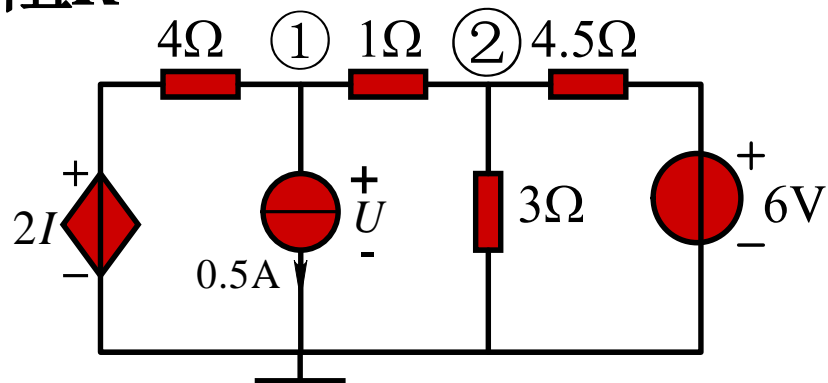
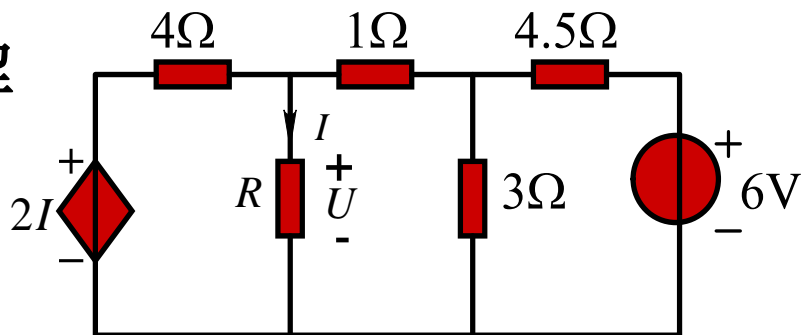
$$R_i = \frac{(1 + 2) \times (3 + 6)}{(1 + 2) + (3 + 6)} \Omega = 2.25 \Omega$$



## 3.1 置换定理

【例题3.3】已知 $I=0.5\text{A}$ ，求电阻 $R$

解



$$\begin{cases} \left(\frac{1}{4\Omega} + \frac{1}{2\Omega}\right)U_{n1} - \frac{1}{1\Omega}U_{n2} = \frac{2I}{4\Omega} - 0.5\text{A} \\ -\frac{1}{1\Omega}U_{n1} + \left(\frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{3\Omega} + \frac{1}{4.5\Omega}\right)U_{n2} = \frac{6\text{V}}{4.5\Omega} \end{cases}$$

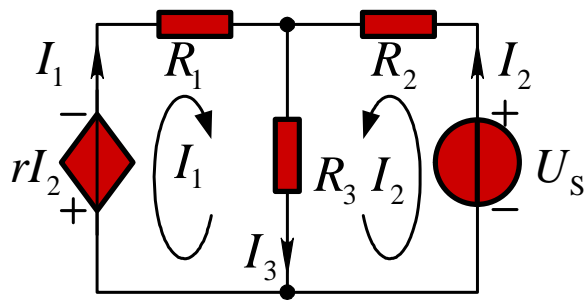
$$I = 0.5\text{A}$$

$$\Rightarrow U_{n1} = 1\text{V} \quad R = \frac{U_{n1}}{I} = 2\Omega$$

## 3.2 齐性定理和叠加定理

基本要求：透彻理解并熟练应用齐性定理和叠加定理。

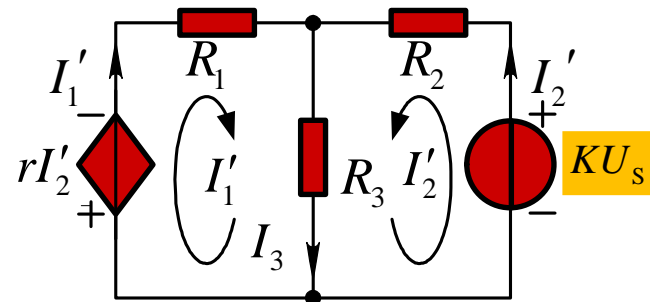
求图示电路的支路电流 $I_1$ 和 $I_2$ 。



$$\left. \begin{aligned} (R_1 + R_3)I_1 + (R_3 + r)I_2 &= 0 \\ R_3I_1 + (R_2 + R_3)I_2 &= U_s \end{aligned} \right\} \times K$$

$$\left. \begin{aligned} (R_1 + R_3)(KI_1) + (R_3 + r)(KI_2) &= 0 \\ R_3(KI_1) + (R_2 + R_3)(KI_2) &= KU_s \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & R_3 + r \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} KI_1 \\ KI_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ KU_s \end{bmatrix}$$



$$\left. \begin{aligned} (R_1 + R_3)I'_1 + (R_3 + r)I'_2 &= 0 \\ R_3I'_1 + (R_2 + R_3)I'_2 &= KU_s \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & R_3 + r \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I'_1 \\ I'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ KU_s \end{bmatrix}$$

$$I'_1 = KI_1, I'_2 = KI_2$$

## 3.2 齐性定理和叠加定理

**齐性定理**：在**只有一个激励** $X$ 作用的线性电路中，设任一响应为 $Y$ ，记作 $Y=f(X)$ ，若将该**激励乘以常数** $K$ ，则对应的响应 $Y'$ 也等于原来**响应乘以同一常数**，即 $Y'=f(KX)=Kf(X)=KY$ 。

$$I_1 = -\frac{R_3 + r}{R_1 R_2 + R_3 (R_1 + R_3 - r)} U_s = A_1 U_s$$

$$I_2 = \frac{R_1 + R_3}{R_1 R_2 + R_3 (R_1 + R_3 - r)} U_s = A_2 U_s$$

$$\begin{aligned} I'_1 &= KI_1 = A_1 (KU_s) \\ I'_2 &= KI_2 = A_2 (KU_s) \end{aligned}$$

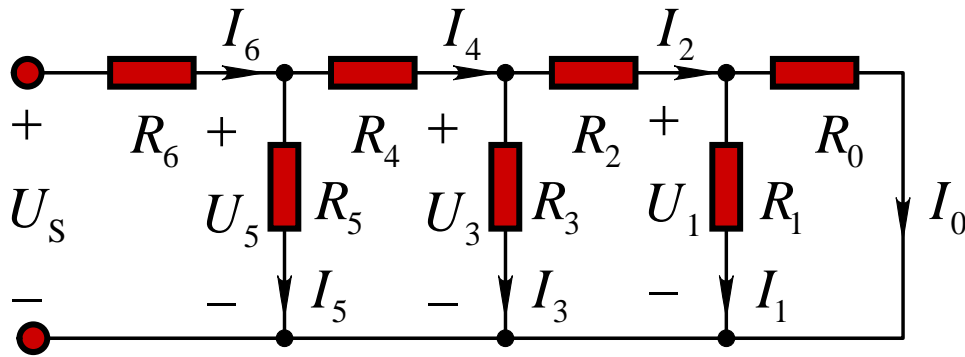
$$\begin{aligned} I_1 &= A_1 U_s \\ I_2 &= A_2 U_s \end{aligned}$$

**直观表述为**：若电路中**只有一个激励**，则**响应与激励成正比**，比例系数取决于电路的结构和参数，与激励源无关

## 3.2 齐性定理和叠加定理

【例题3.4】图示电路中电阻 $R_0=R_2=R_4=R_6=4\Omega$ ， $R_1=R_3=R_5=8\Omega$ 。(1)若使 $I_0=1\text{A}$ ，求 $U_S$ 的值。(2)若 $U_S=66\text{V}$ ，求各支路电流。

解



$$I_0 = 1\text{A}$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{R_0 I_0}{R_1} = 0.5\text{A}$$

$$\Rightarrow I_2 = I_1 + I_0 = 1.5\text{A}$$

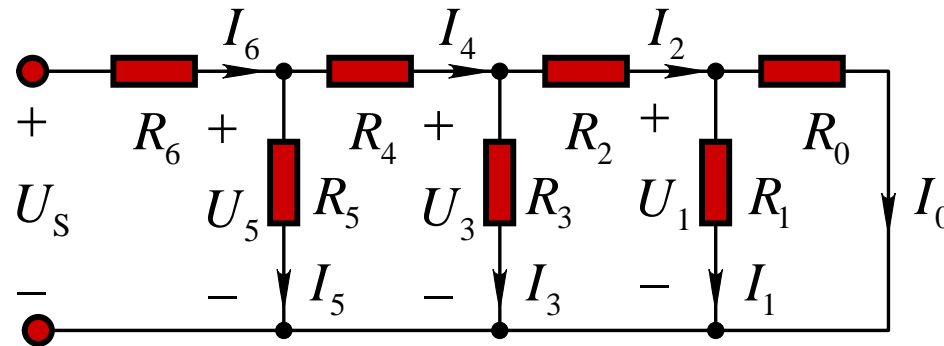
$$\Rightarrow I_3 = \frac{U_3}{R_3} = \frac{R_2 I_2 + R_1 I_1}{R_3} = 1.25\text{A} \quad \Rightarrow I_4 = I_2 + I_3 = 2.75\text{A}$$

$$\Rightarrow I_5 = \frac{U_5}{R_5} = \frac{R_4 I_4 + R_3 I_3}{R_5} = 2.625\text{A} \quad \Rightarrow I_6 = I_4 + I_5 = 5.375\text{A}$$

$$\Rightarrow U_S = R_6 I_6 + R_5 I_5 = 42.5\text{V}$$

## 3.2 齐性定理和叠加定理

$U_S = 66V$  时是42.5V的1.553倍，所以电路中所有的电压、电流均应该增大1.553倍，据此可以求出电路中其它各处电压电流。



$$k = \frac{66V}{42.5V} = 1.553$$

$$I'_4 = kI_4 = 4.27A$$

$$I'_1 = kI_1 = 1.553 \times 0.5 = 0.776A$$

$$I'_5 = kI_5 = 4.08A$$

$$I'_2 = kI_2 = 1.553 \times 1.5 = 2.33A$$

$$I'_6 = kI_6 = 8.35A$$

$$I'_3 = kI_3 = 1.94A$$

## 3.2 齐性定理和叠加定理

【例题3.5】求图示梯形电路的电压 $U$ ，已知 $U_s = 10\text{V}$ 。

解：假设  $U' = 2\text{V}$

则

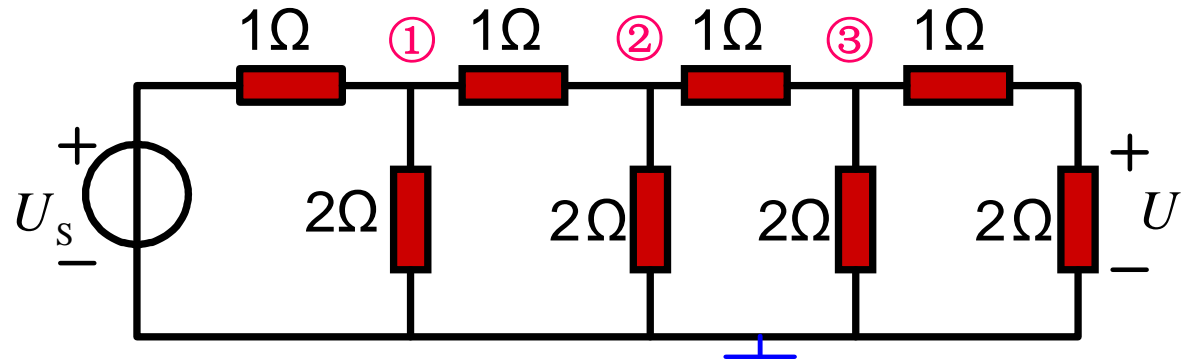
$$U'_{n3} = 3\text{V}$$

$$U'_{n2} = \left(1 + \frac{3}{2}\right)\text{A} \times 1\Omega + 3\text{V} = \frac{11}{2}\text{V}$$

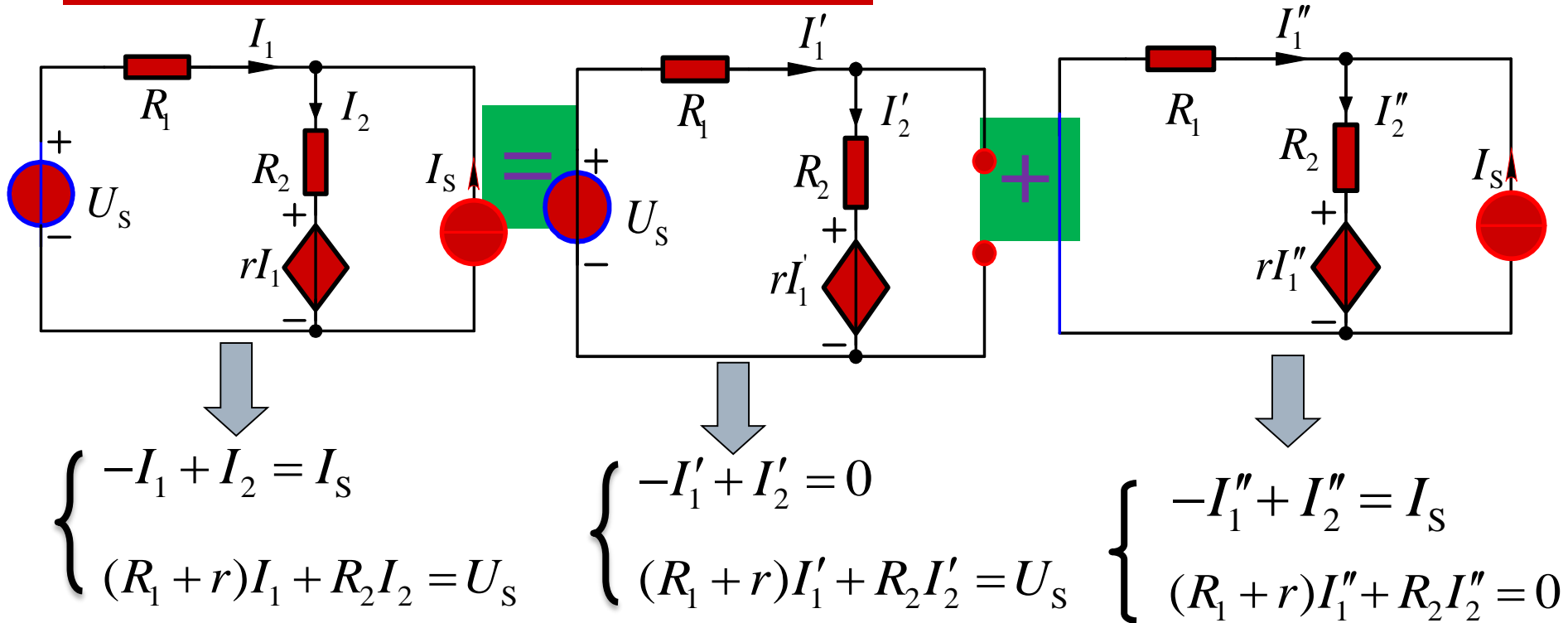
$$U'_{n1} = \left(\frac{5}{2}\text{A} + \frac{5.5\text{V}}{2\Omega}\right) \times 1\Omega + U'_{n2} = \frac{43}{4}\text{V}$$

$$U'_s = \left(\frac{21}{4} + \frac{43}{8}\right)\text{A} \times 1\Omega + U'_{n1} = \frac{171}{8}\text{V}$$

$$U = \frac{U_s}{U'_s} U' = \frac{10\text{V}}{171\text{V}/8\text{V}} \times 2\text{V} = 0.936\text{V}$$



## 3.2 齐性定理和叠加定理



$$\begin{cases} I_1 = \frac{-R_2}{R_1 + R_2 + r} I_s + \frac{1}{R_1 + R_2 + r} U_s \\ I_2 = \frac{R_1 + r}{R_1 + R_2 + r} I_s + \frac{1}{R_1 + R_2 + r} U_s \end{cases} \quad \begin{cases} I'_1 = \frac{1}{R_1 + R_2 + r} U_s \\ I'_2 = \frac{1}{R_1 + R_2 + r} U_s \end{cases} \quad \begin{cases} I''_1 = \frac{-R_2}{R_1 + R_2 + r} I_s \\ I''_2 = \frac{R_1 + r}{R_1 + R_2 + r} I_s \end{cases}$$

## 3.2 齐性定理和叠加定理

---

**叠加定理**：在**线性电路**中，由几个独立电源共同作用产生的响应等于各个独立电源单独作用时产生相应响应的代数叠加。

注：

- 1 叠加定理只适合于线性电路，**不适用于非线性电路**；
- 2 电压、电流**叠加时要注意方向**；
- 3 **功率**不是激励的线性函数，因此**不能**用每个独立电源作用时的功率**叠加**来求得总功率；
- 4 **叠加定理只是对独立电源而言**，在独立电源单独作用时，**受控源**要保留在电路中，其控制量就是电路中相对应的电压和电流；



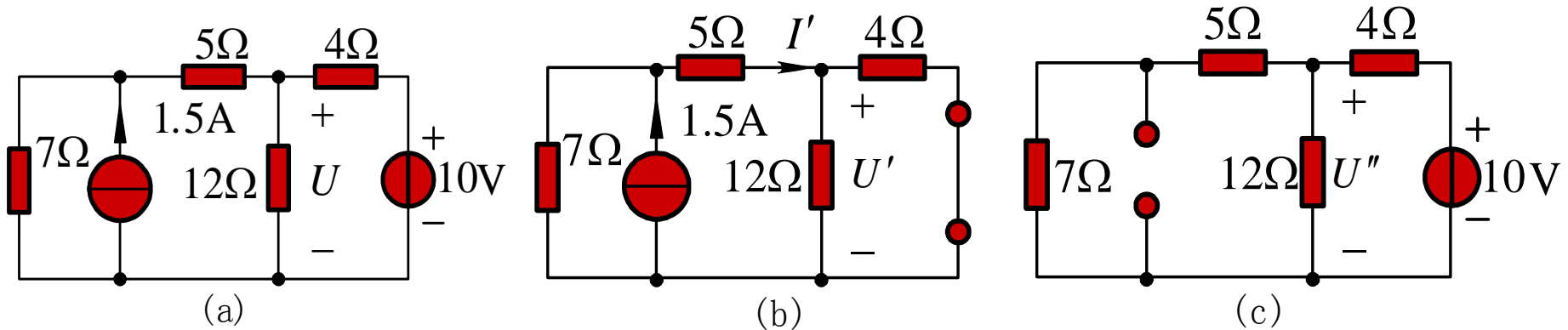
## 3.2 齐性定理和叠加定理

---

- 5 各独立电源“**单独作用**”，即每个独立电源逐个作用一次。各个独立电源也可以**分组作用各一次**，但必须保证每个独立电源只能参与叠加一次，**不能多次作用，也不能一次也不作用**。也可以将某个电源的激励值分成若干个不同的激励值作用多次，只要各次激励值之和等于总激励值即可。
- 6 某个（组）独立源作用，同时意味着其它独立电源不起作用，**不作用的电压源用短路线代替，不作用的电流源用开路代替**。
- 7 **线性直流电路**的任一**响应是**该电路中**所有独立电源的线性组合**。

## 3.2 齐性定理和叠加定理

【例题3.6】用叠加定理计算电压  $U$ 。



解：

$$I' = \frac{7\Omega \times 1.5\text{A}}{(4 \parallel 12)\Omega + (5 + 7)\Omega} = 0.7\text{A}$$

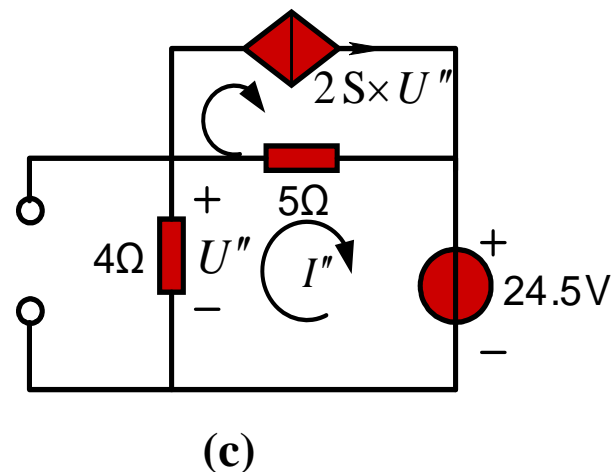
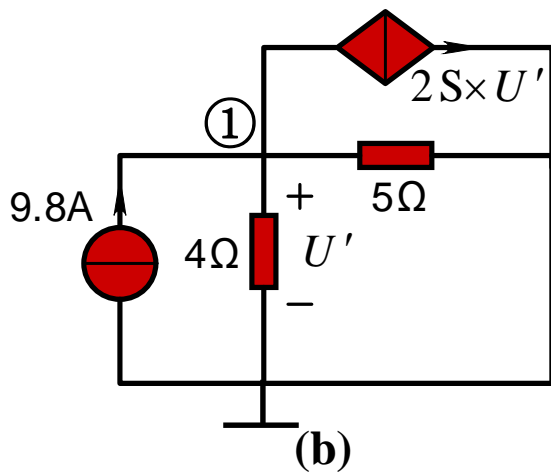
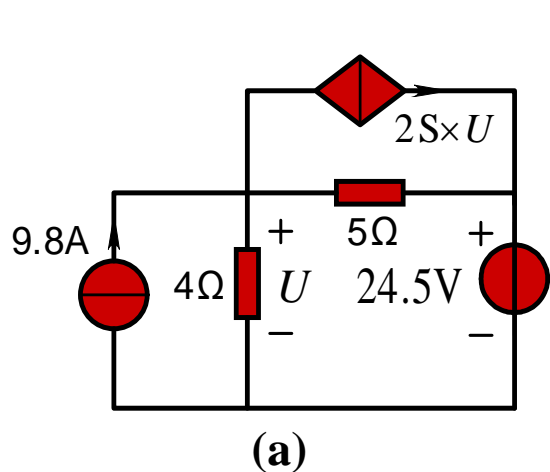
$$U' = (4 \parallel 12)\Omega \times I' = 2.1\text{V}$$

$$U'' = \frac{(5 + 7) \parallel 12}{(5 + 7) \parallel 12 + 4} \times 10\text{V} = 6\text{V}$$

$$U = U' + U'' = 8.1\text{V}$$

## 3.2 齐性定理和叠加定理

【例题3.7】用叠加定理计算电压 $U$ 。



解:

电流源单独作用

$$\left(\frac{1}{4\Omega} + \frac{1}{5\Omega}\right)U' = 9.8\text{A} - 2\text{S} \times U' \Rightarrow U' = 4\text{V}$$

电压源单独作用

$$(4\Omega + 5\Omega)I'' - 5\Omega \times 2\text{S}U'' = -24.5\text{V}$$

$$U'' = -4\Omega \times I''$$

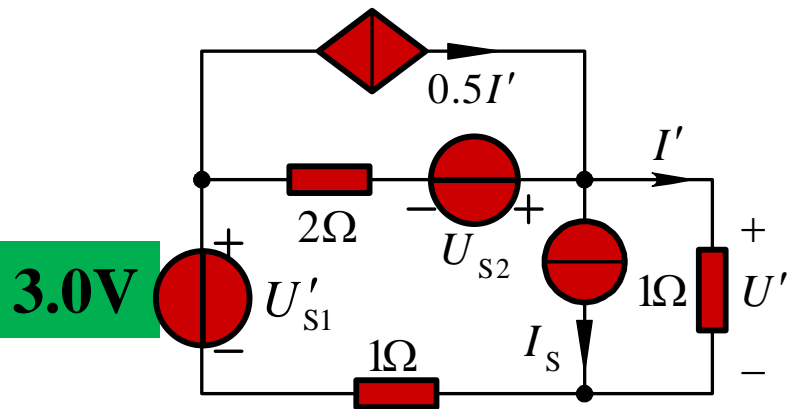
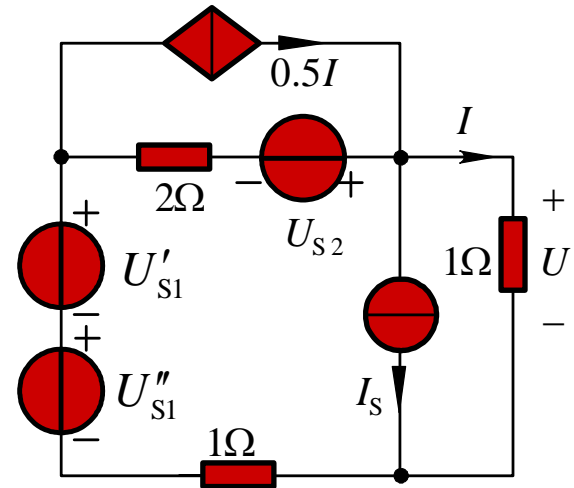
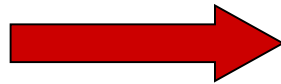
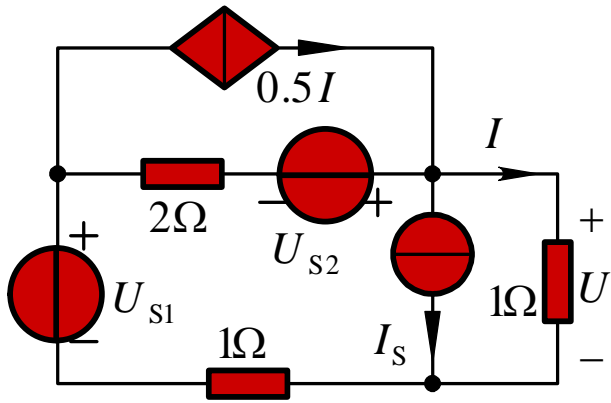
$$\Rightarrow I'' = -0.5\text{A} \quad U'' = -4\Omega I'' = 2\text{V}$$

根据叠加定理

$$U = U' + U'' = 6\text{V}$$

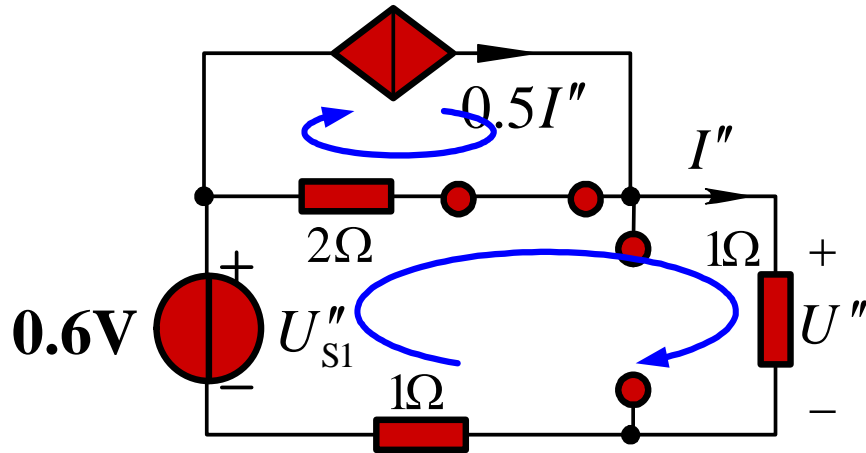
## 3.2 齐性定理和叠加定理

【例题3.8】 已知当 $U_{S1}=3\text{V}$ 时，电压 $U=4\text{V}$ 。求当 $U_{S1}=3.6\text{V}$ ，其它条件不变时电压  $U$  的值。



$$U' = 4\text{V}$$

## 3.2 齐性定理和叠加定理



$$(1 + 2 + 1)\Omega \times I'' - 2\Omega \times 0.5I'' = 0.6\text{V}$$

$$I'' = 0.2\text{A}$$

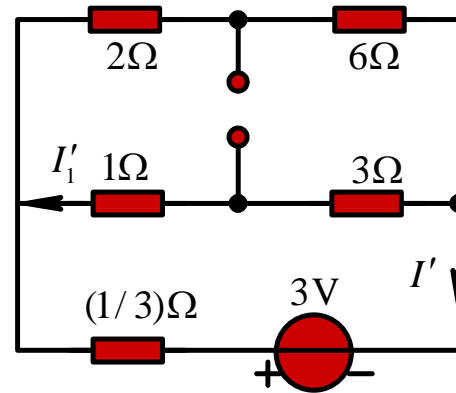
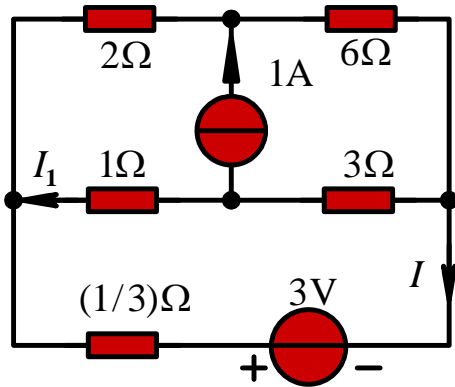
$$U'' = 1\Omega \times I'' = 0.2\text{V}$$

$$U = U' + U'' = 4.2\text{V}$$

## 3.2 齐性定理和叠加定理

【例题3.9】用叠加定理求图示电路的电流 $I$ 及 $1\Omega$ 电阻消耗的功率

解: 1)  $3\text{V}$ 电压源单独作用

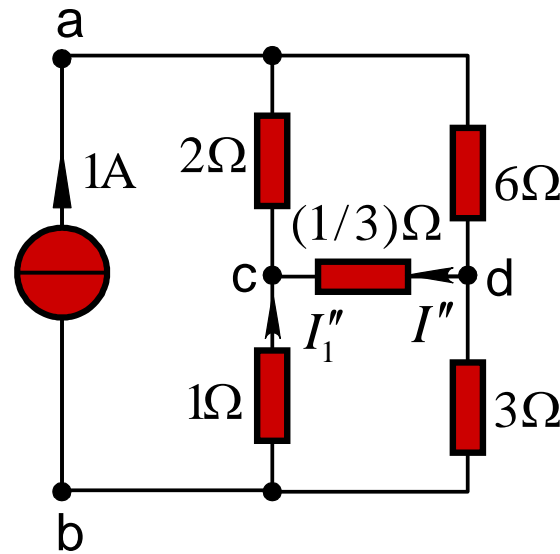
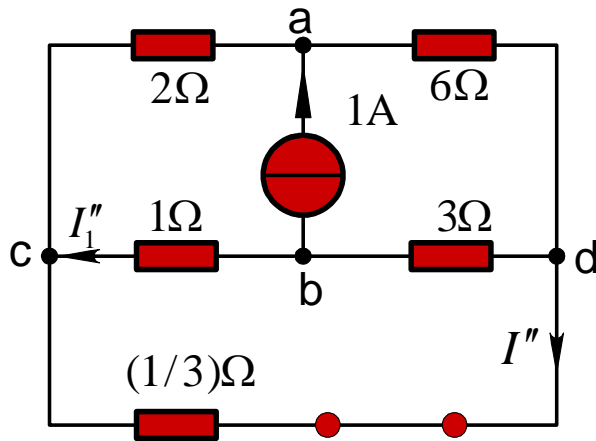


$$I' = \frac{3\text{V}}{\frac{1}{3}\Omega + \frac{4 \times 8}{4 + 8}\Omega} = 1\text{A}$$

$$I'_1 = -I' \times \frac{8\Omega}{4\Omega + 8\Omega} = -\frac{2}{3}\text{A}$$

## 3.2 齐性定理和叠加定理

### 2) 1A电流源单独作用



考虑到电桥平衡  $I'' = 0$

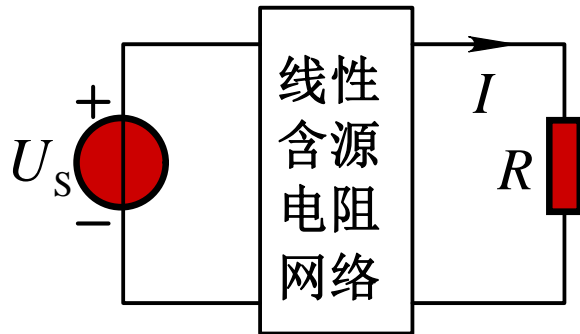
在由分流公式得:  $I''_1 = -1\text{A} \times \frac{3}{1+3} = -\frac{3}{4}\text{A}$

叠加  $I = I' + I'' = 1\text{A}$        $I_1 = I'_1 + I''_1 = -17/12\text{A}$

功率  $P_{1\Omega} = 1\Omega \times I_1^2 = 2.007\text{W}$

## 3.2 齐性定理和叠加定理

【例题3.10】图示电路，当  $U_s = 10\text{V}$  时  $I = 6\text{A}$



$U_s = 15\text{V}$  时  $I = 7\text{A}$

$I = 10\text{A}$  时  $U_s = ?$

解：根据齐性定理和叠加定理

$$I = I' + I'' = I' + kU_s$$

$$\begin{cases} 6\text{A} = I' + k \times 10\text{V} \\ 7\text{A} = I' + k \times 15\text{V} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 0.2\text{S} \\ I' = 4\text{A} \end{cases}$$

$$I = 4\text{A} + 0.2\text{S} \times U_s$$

当  $I = 10\text{A}$  得  $U_s = 30\text{V}$



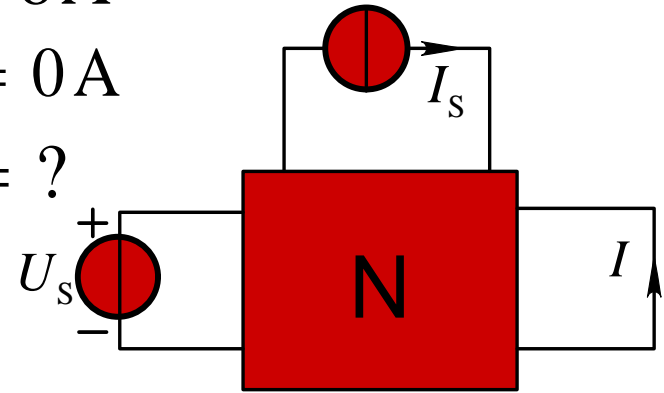
## 3.2 齐性定理和叠加定理

【例题3.11】图示电路，网络N中没有独立电源，当

$$U_s = 8\text{V} \quad I_s = 12\text{A} \quad \text{时，测得} \quad I = 8\text{A}$$

$$U_s = -8\text{V} \quad I_s = 4\text{A} \quad \text{时，测得} \quad I = 0\text{A}$$

求  $U_s = 9\text{V} \quad I_s = 10\text{A}$  时，电流  $I = ?$

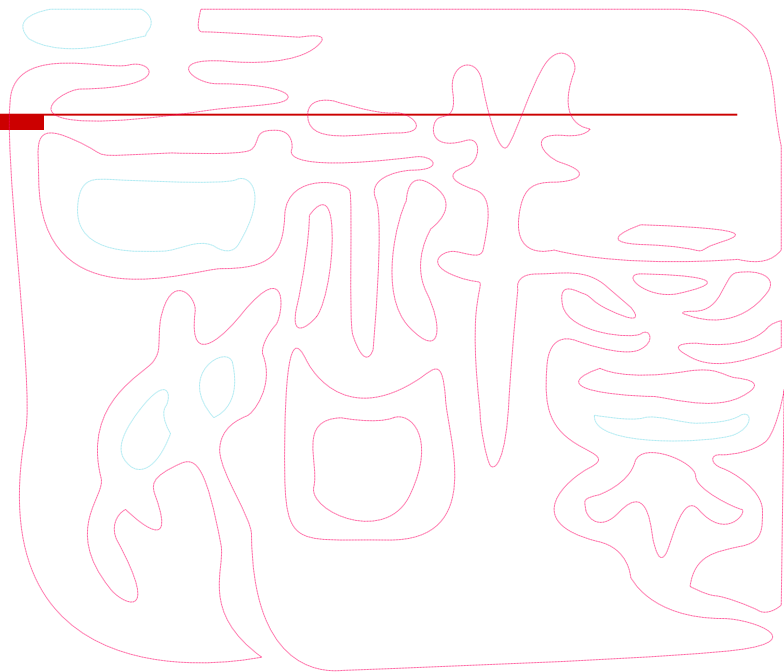


解：  $I = I' + I'' = k_1 I_s + k_2 U_s$

$$\begin{cases} 8\text{A} = 12\text{A} \times k_1 + 8\text{V} \times k_2 \\ 0\text{A} = 4\text{A} \times k_1 - 8\text{V} \times k_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 0.5 \\ k_2 = 0.25\text{S} \end{cases}$$

$$I = 0.5 \times I_s + 0.25\text{S} \times U_s$$

$$\begin{aligned} \text{当 } U_s = 9\text{V}, I_s = 10\text{A} \quad \text{得} \quad I &= 0.5 \times 10\text{A} + 0.25\text{S} \times 9\text{V} \\ &= 7.25\text{A} \end{aligned}$$



谢

谢！

