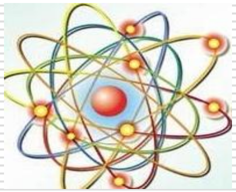
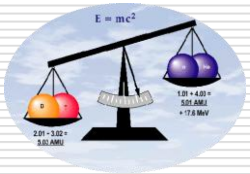




第3章 电路定理

3.4-3.6节

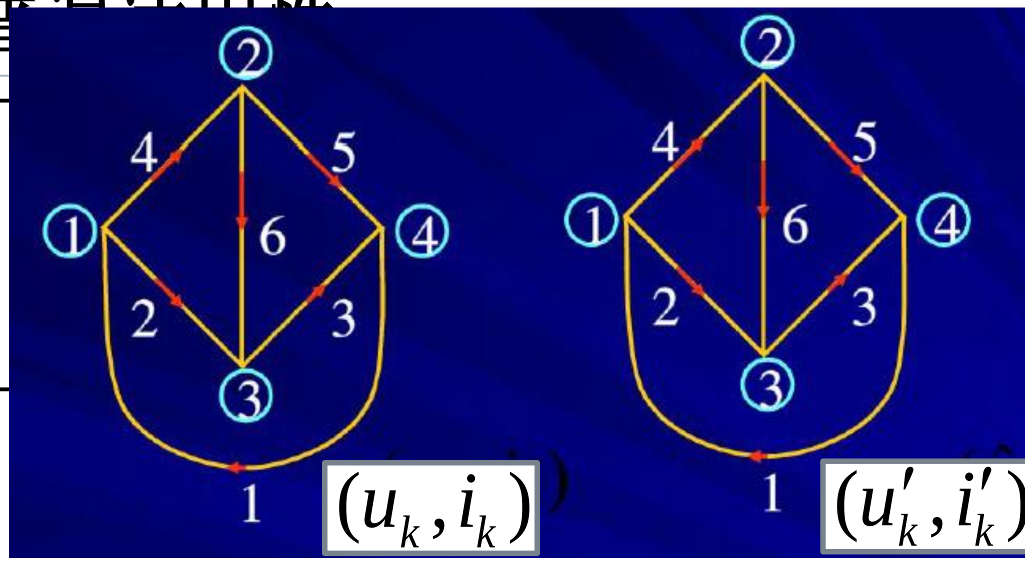
特勒根定理、互易定理、对偶原理

开课教师： 王灿
开课单位：机电学院--电气工程学科

3.4 特勒根定理

基本要求：理解特勒根定理的内容、证明过程、物理意义和普

1. 定理



结构相同：

(1) 节点数与支路数分别相同；

(2) 节点与支路的连接关系也分别相同；

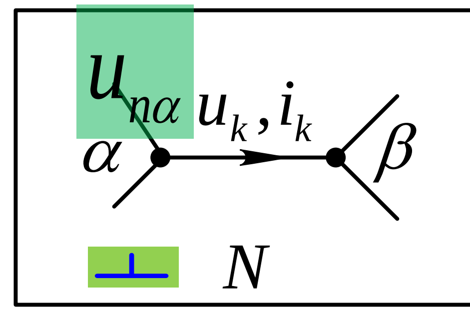
(3) 节点与支路的编号也相同；

(4) 对应的支路具有相同的u，i关联参考方向。

3.4 特勒根定理

特勒根定理：电路N中各支路电压u_k与电路 N'中对应支路电流 i'_k 的乘积之和等于零，即

$$\sum_{k=1}^{b} u_k i'_k = 0 \qquad \text{同样} \qquad \sum_{k=1}^{b} u'_k i_k = 0$$



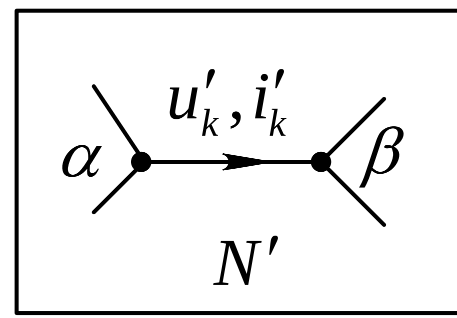
(a)

证明：

$$u_k i'_k = (u_{n\alpha} - u_{n\beta}) i'_{\alpha\beta} = u_{n\alpha} i'_{\alpha\beta} - u_{n\beta} i'_{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{b} u_k i'_k = \sum_{\text{所有支路}} (u_{n\alpha} i'_{\alpha\beta} + u_{n\beta} i'_{\beta\alpha})$$

$$i'_{\alpha\beta} = -i'_{\beta\alpha}$$



(b)

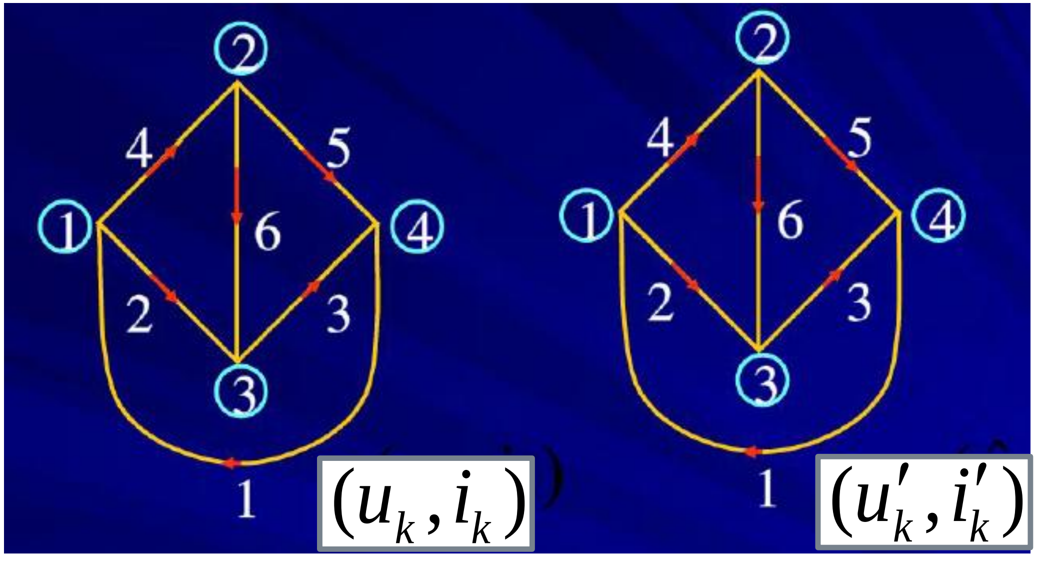
在整个电路中存在与某节点相关的信息：

$$u_{n\alpha} \sum_{1}^{x} i'_{\alpha x} \qquad x\text{---与}\alpha\text{节点相连的全部支路}$$

$$\Rightarrow \sum_{1}^{x} i'_{\alpha x} = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{b} u_k i'_k = 0$$

3.4 特勒根定理

特勒根定理：电路N中各支路电压u_k与电路 N'中对应支路电流 i_k' 的乘积之和等于零，即



$$\begin{matrix} ① \\ ② \\ ③ \end{matrix} \begin{cases} -i_1' + i_2' + i_4' = 0 \\ -i_4' + i_5' + i_6' = 0 \\ -i_2' + i_3' - i_6' = 0 \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{b} u_k i_k' = u_1 i_1' + u_2 i_2' + \cdots + u_6 i_6'$$

$$= -u_{n1} i_1' + (u_{n1} - u_{n3}) i_2' + u_{n3} i_3' + (u_{n1} - u_{n2}) i_4' + u_{n2} i_5' + (u_{n2} - u_{n3}) i_6'$$

$$= u_{n1}(-i_1' + i_2' + i_4') + u_{n2}(-i_4' + i_5' + i_6') + u_{n3}(-i_2' + i_3' - i_6')$$

3.4 特勒根定理

将特勒根定理用于一个电路N（即N'也是N），得到：

$$\sum_{k=1}^{b} u_k i_k = 0$$

式中u_k与i_k参考方向相同，它们的乘积表示支路k吸收的功率，即

$$p_k = u_k i_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{b} p_k = 0$$

意义：在任一瞬间，一个电路中各支路吸收功率的代数和等于零。这就是电路的功率守恒定理。

特勒根定理应用于不同电路中时，虽然具有相同的形式，但却不具备任何物理意义，所以称为似功率守恒定理

3.4 特勒根定理

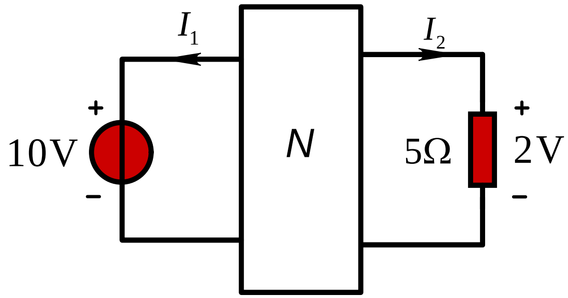
注：

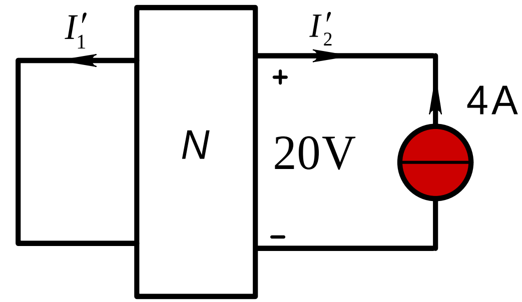
1)、 两个电路的对应电压和电流的参考方向取向要一致

2)、同一个电路各支路电压、电流参考方向的取向要一致 (全关联或全非关联)

3.4 特勒根定理

【例题3.19】 N为纯电阻网络，利用特勒根定理求出电流 I_1'。





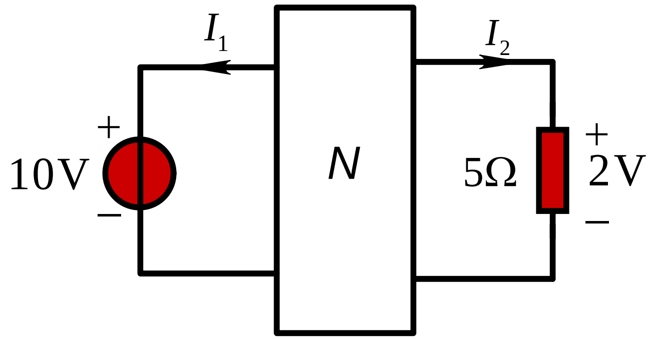
解：设网络内共有b条支路，各支路电压和电流取关联参考方向，由特勒根定理得

$$\left.\begin{aligned} U_1 I_1' + U_2 I_2' + \sum_{k=3}^{b} U_k I_k' = 0 \\ U_1' I_1 + U_2' I_2 + \sum_{k=3}^{b} U_k' I_k = 0 \end{aligned}\right\}$$

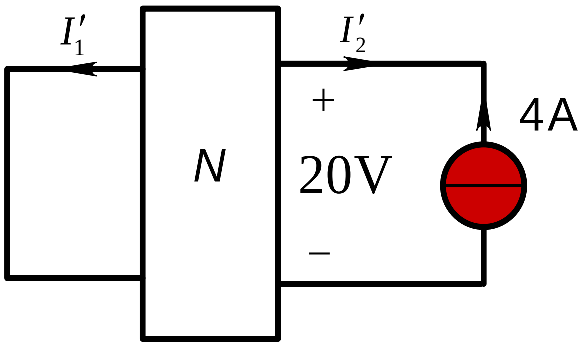
$$\sum_{k=3}^{b} U_k I_k' = \sum_{k=3}^{b} R_k I_k I_k' = \sum_{k=3}^{b} R_k I_k' I_k = \sum_{k=3}^{b} U_k' I_k$$

$$\boxed{U_1 I_1' + U_2 I_2' = U_1' I_1 + U_2' I_2}$$

3.4 特勒根定理



(a)



(b)

代入已知条件：

对于图**(a)** $U_1 = 10\text{V}, U_2 = 2\text{V}, I_2 = \dfrac{2\text{V}}{5\Omega} = 0.4\text{A}$

对于图**(b)** $U_1' = 0, U_2' = 20\text{V}, I_2' = -4\text{A}$

计算 I_1'

$$U_1 I_1' + U_2 I_2' = U_1' I_1 + U_2' I_2$$

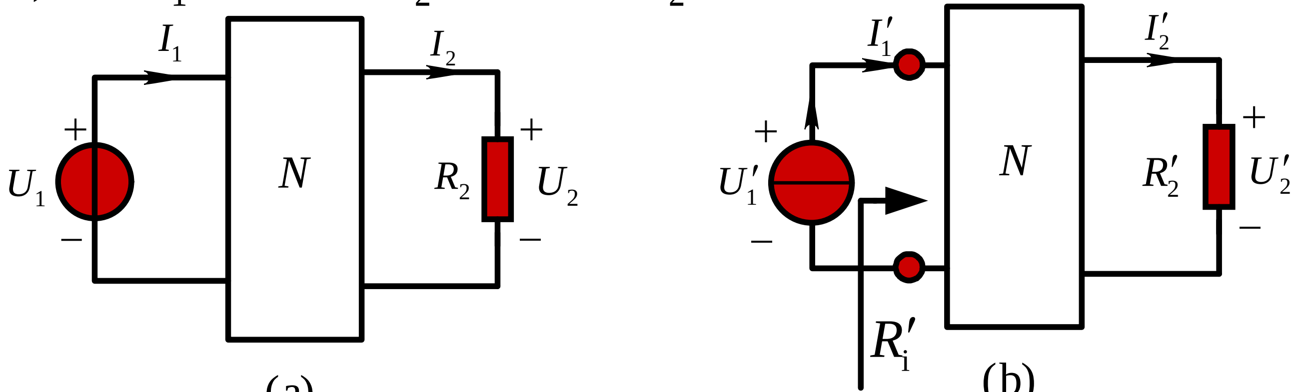
$$10\text{V} \times I_1' + 2\text{V} \times (-4\text{A}) = 0 \times I_1 + 20\text{V} \times 0.4\text{A} \Rightarrow I_1' = 1.6\text{A}$$

3.4 特勒根定理

【例题3.20】图示电路中N为纯二端电阻网络，

在图(a)中 $U_1 = 4\text{V}, R_2 = 2\Omega, I_1 = 1\text{A}, I_2 = 0.5\text{A}$；

在图(b)中 $I_1' = 2\text{A}, R_2' = 4\Omega, U_2' = 3.2\text{V}$ 求等效电阻 R_i'。



(a) (b)

解：由特勒根定理得 $-U_1 I_1' + U_2 I_2' = -U_1' I_1 + U_2' I_2$

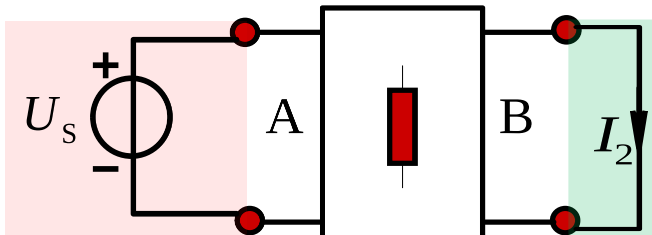
代入已知条件：$U_2 = R_2 I_2 = 2\Omega \times 0.5\text{A} = 1\text{V}$ $\quad I_2' = \dfrac{U_2'}{R_2'} = \dfrac{3.2\text{V}}{4\Omega} = 0.8\text{A}$

$$-4\text{V} \times 2\text{A} + 1\text{V} \times 0.8\text{A} = -U_1' \times 1\text{A} + 3.2\text{V} \times 0.5\text{A}$$

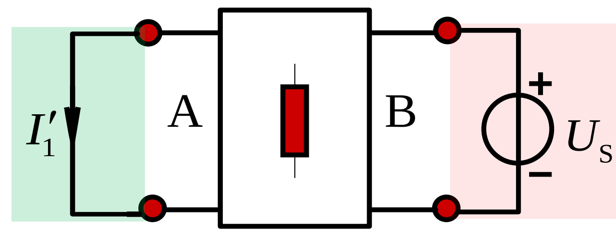
$$\Rightarrow U_1' = 8.8\text{V} \quad \Rightarrow R_i' = \frac{U_1'}{I_1'} = \frac{8.8\text{V}}{2\text{A}} = 4.4\Omega$$

3.5 互易定理

基本要求：理解电路的互易性质，掌握互易定理的内容和用互易定理分析电路的方法.



(a)



(b)

$$I_2 = I_1'$$

定理(第一种形式)：对于含有一个独立电压源和若干线性二端电阻的电路，当此电压源在某一端口A作用时，在另一端口B产生的短路电流等于把此电压源移到端口B作用而在端口A所产生的短路电流。

证明：

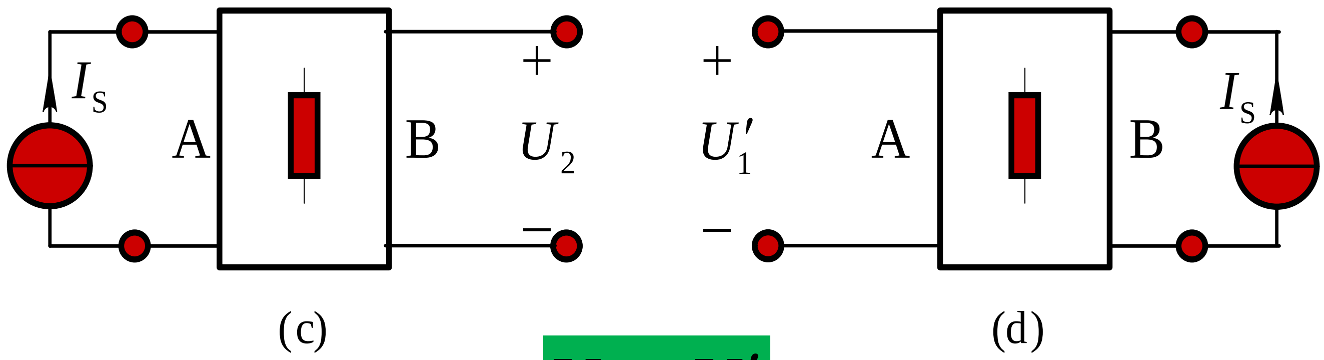
$$U_1 I_1' + U_2 I_2' = U_1' I_1 + U_2' I_2$$

$$U_S I_1' + 0 \times I_2' = 0 \times I_1 + U_S I_2$$

$$U_{S1} I_1' + 0 \times I_2' = 0 \times I_1 + U_{S2}' I_2$$

$$\frac{U_{S1}}{U_{S2}'} = \frac{I_2}{I_1'}$$

3.5 互易定理

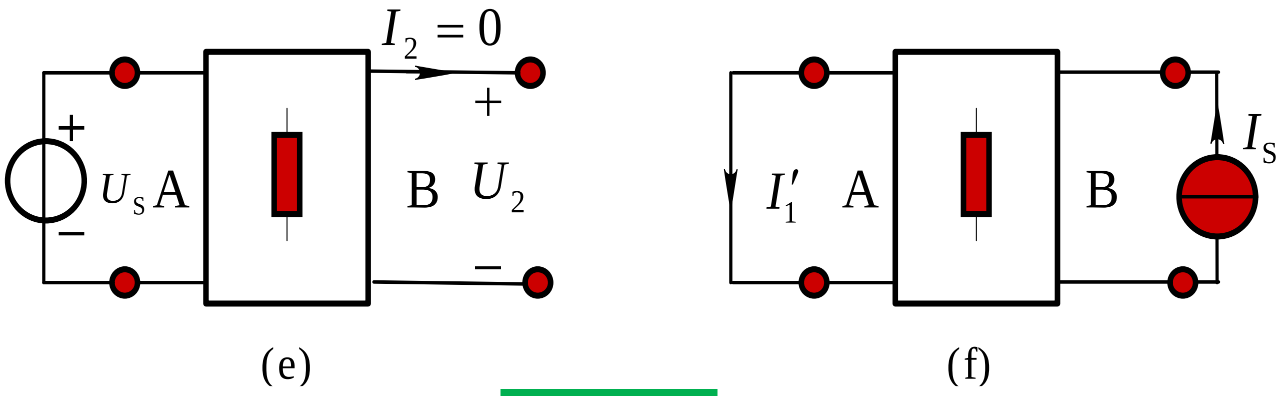


$$U_2 = U_1'$$

定理(第二种形式)：对于含有一个独立电流源和若干线性二端电阻的电路，当此电流源在某一端口A作用时，在另一端口B产生的开路电压等于把此电流源移到端口B作用而在端口A所产生的开路电压。

$$\frac{I_{S1}}{I_{S2}'} = \frac{U_2}{U_1'}$$

3.5 互易定理



$$U_2 = I_1'$$

定理(第三种形式)**：** 对于图示电路,如果在数值上I_S与U_S相等,则U_2与 I_1'在数值上也相等。其中I_S 与 I_1'、U_S与U_2 分别取同样单位。

$$\Rightarrow \frac{U_2}{U_S} = \frac{I_1'}{I_S}$$

3.5 互易定理

注意：

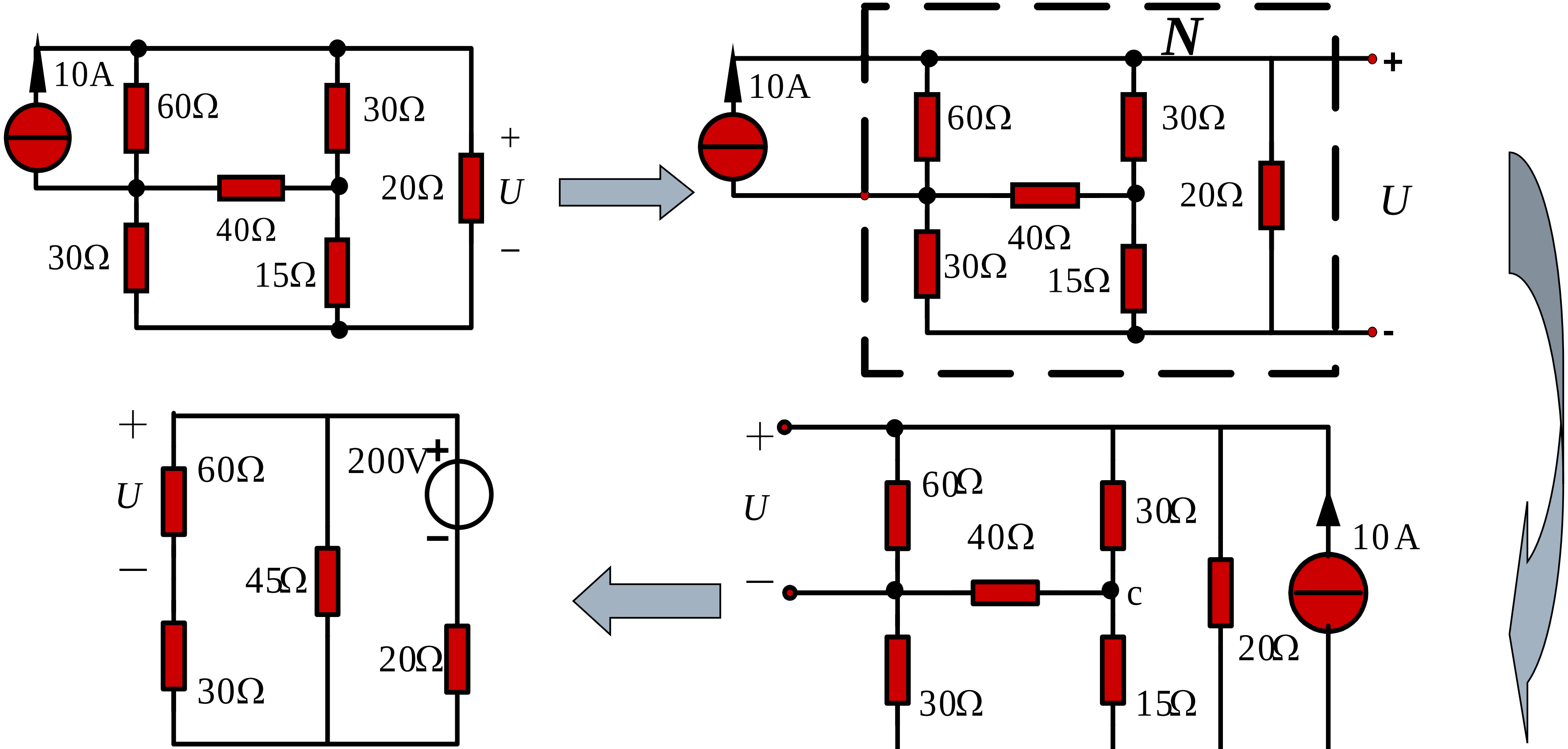
(1) 互易定理只适用于线性电路，不适用于非线性电路；

(2) 应用互易定理时要注意参考方向，如果两个网络的端口电压和电流的参考方向不一致，则应在不一致的电流和电压前加负号；

(3) 在激励与响应互换位置时，电路其余结构不能发生变化。

3.5 互易定理

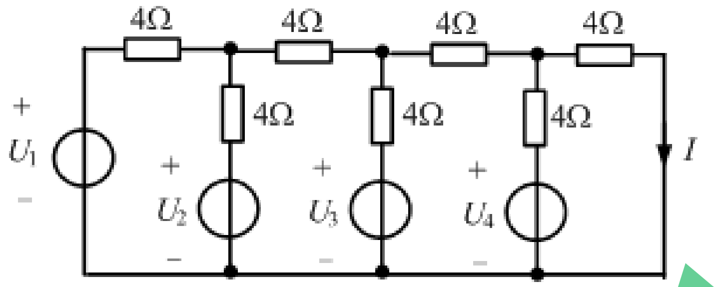
【例题3.21】 用互易定理求图示电路电压 U 。



解： $$U=\frac{200\text{V}}{\left(20+\dfrac{90\times45}{90+45}\right)\Omega}\times\frac{90\Omega\times45\Omega}{(90+45)\Omega}\times\frac{60\Omega}{90\Omega}=80\text{V}$$

3.5 互易定理

【例题3.22】图示电路电流 I 可以写成 $I=K_1U_1+K_2U_2+K_3U_3+K_4U_4$。试借助互易定理求各比例系数$K_i(i=1,\dots,4)$。

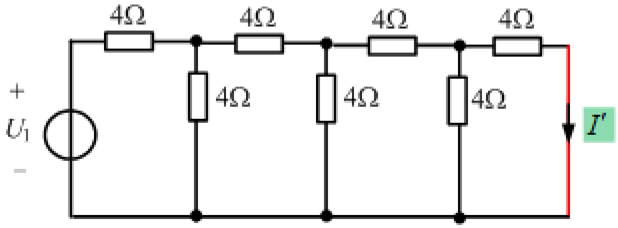


解：各独立电源单独作用时产生的电流 I 的量值就是相应的比例系数：

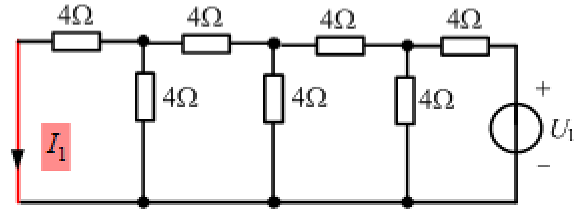
$$I = I' + I'' + I''' + I''''$$

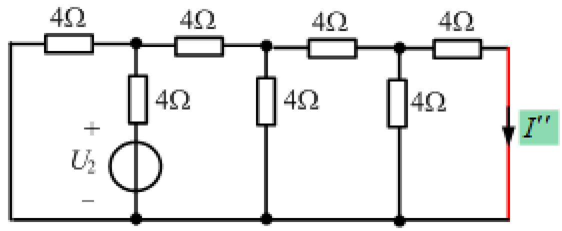
$$= k_1U_1 + k_2U_2 + k_3U_3 + k_4U_4$$

3.5 互易定理

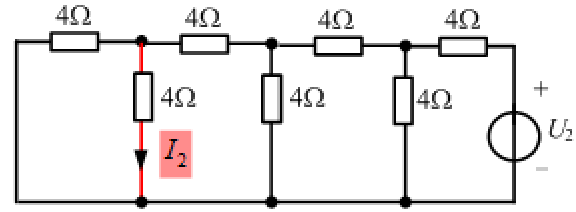


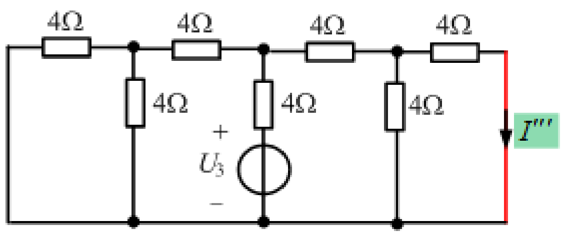
$I' = I_1$



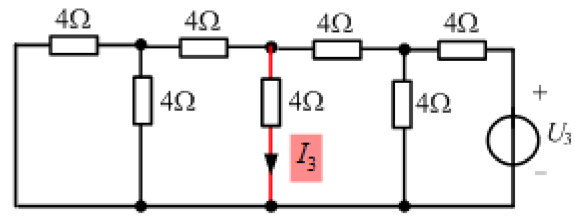


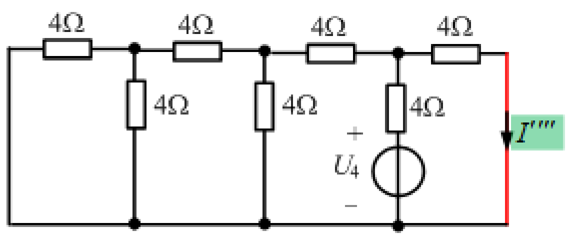
$I'' = I_2$



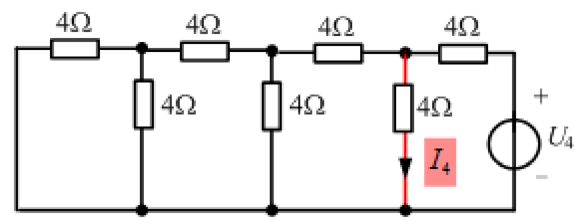


$I''' = I_3$





$I'''' = I_4$

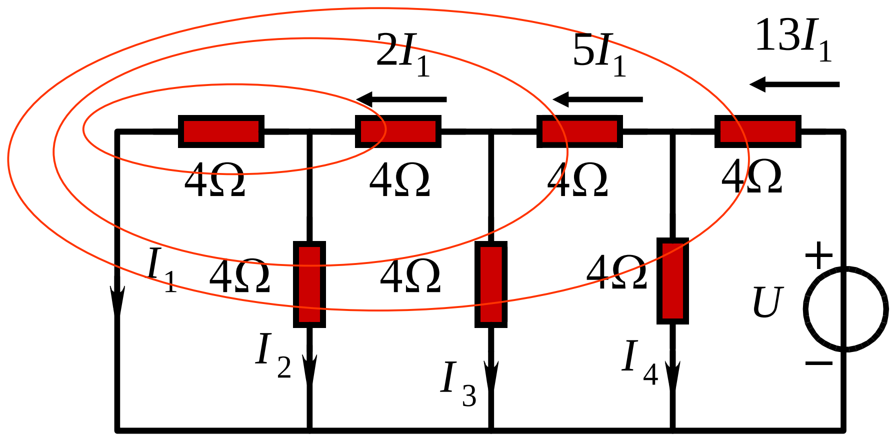


$$I = I' + I'' + I''' + I'''' = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$
$$= k_1U_1 + k_2U_2 + k_3U_3 + k_4U_4$$

令$U_1 = U_2 = U_3 = U_4 = U$

则$k_1 = \dfrac{I_1}{U}$，$k_2 = \dfrac{I_2}{U}$，$k_3 = \dfrac{I_3}{U}$，$k_4 = \dfrac{I_4}{U}$

3.5 互易定理



设 $U_1 = U_2 = U_3 = U_4 = U$ =1V

$\Rightarrow I_2 = I_1$

$\Rightarrow I_3 = [4(I_1 + I_2) + 4I_2]/4 = 3I_1$

$\Rightarrow I_4 = [4(I_1 + I_2 + I_3) + 4I_3]/4 = 8I_1$

$\Rightarrow U = 4(I_1 + I_2 + I_3 + I_4) + 4I_4 = 84I_1$ =1V

$\Rightarrow I_1 = \dfrac{1}{84}\text{A}$

$\Rightarrow K_1 = \dfrac{I_1}{U} = \dfrac{1}{84}\text{S}$

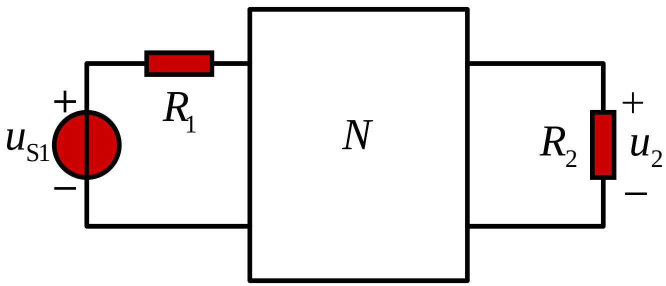
$\Rightarrow K_2 = \dfrac{I_2}{U} = \dfrac{1}{84}\text{S}$

$\Rightarrow K_3 = \dfrac{I_3}{U} = \dfrac{3I_1}{U} = \dfrac{1}{28}\text{S}$

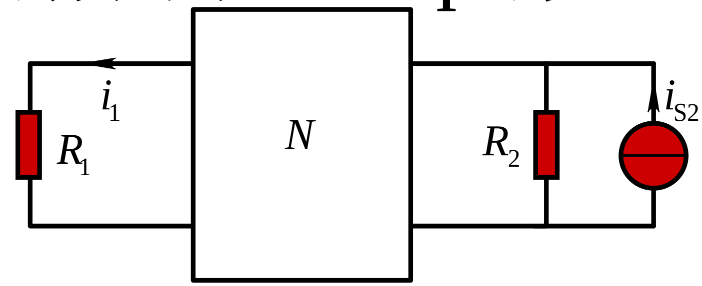
$\Rightarrow K_4 = \dfrac{I_4}{U} = \dfrac{8I_1}{U} = \dfrac{2}{21}\text{S}$

3.5 互易定理

【例题3.23】图(a)在电压源u_{s1}的作用下，电阻R_2上的电压为u_2，求图(b)在电流源i_{s2}的作用下电流i_1的值。

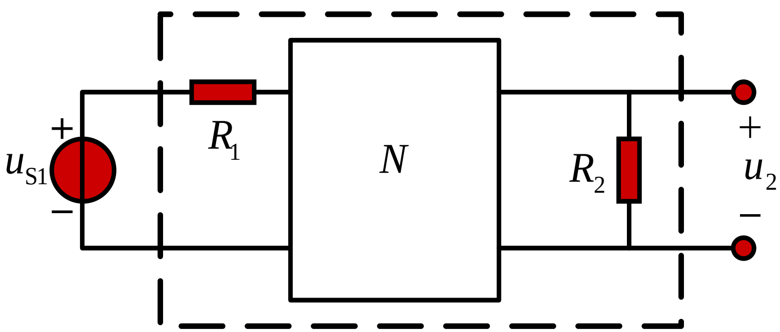


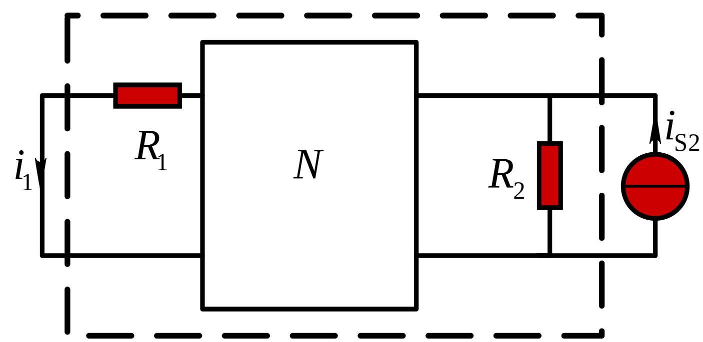
(a)



(b)

解:





$$\frac{u_2}{u_{S1}} = \frac{i_1}{i_{S2}} \quad \Rightarrow \quad i_1 = \frac{u_2}{u_{S1}} i_{S2}$$

3.5 对偶原理

基本要求：了解对偶原理，并能应用对偶原理理解一些电路中的规律。

如果电路中某一定理(或方程、关系式等)的表述是成立的，则将其中的概念(变量、参数、元件、结构等)用其对偶因素置换所得的对偶表述也一定是成立的。这就是对偶原理 。

表3.1 部分对偶因素

对偶因素	
电压	电流
基尔霍夫电压定律	基尔霍夫电流定律
电阻	电导
电压源	电流源

3.5 对偶原理

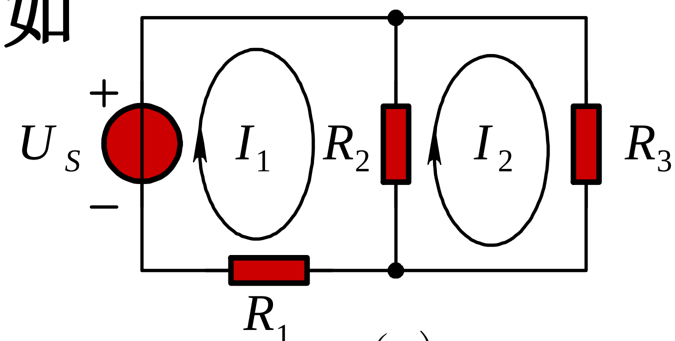
续表3.1 部分对偶因素

对偶因素	
电压控制电流源	电流控制电压源
电压控制电压源	电流控制电流源
节点	网孔
串联	并联
星形联结	三角形联结
开路	短路
自阻	自导
互阻	互导
戴维南定理	诺顿定理
互易定理表述一	互易定理表述二

3.5 对偶原理

例如电阻串联时总电阻等于各电阻之和是成立的，那么电导并联时总电导等于各电导之和也是成立的。

例如

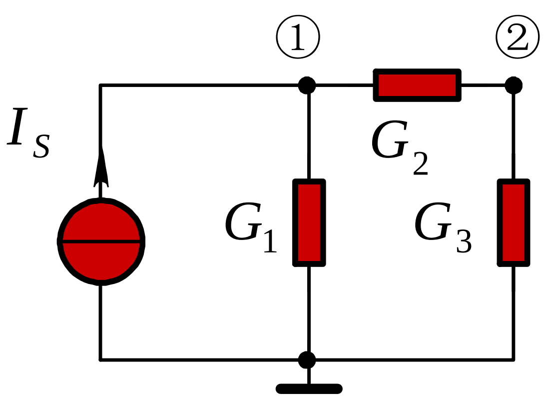


（a）

$$\begin{cases}(R_1+R_2)I_1-R_2I_2=U_S\\-R_2I_1+(R_2+R_3)I_2=0\end{cases}$$

根据对偶原理

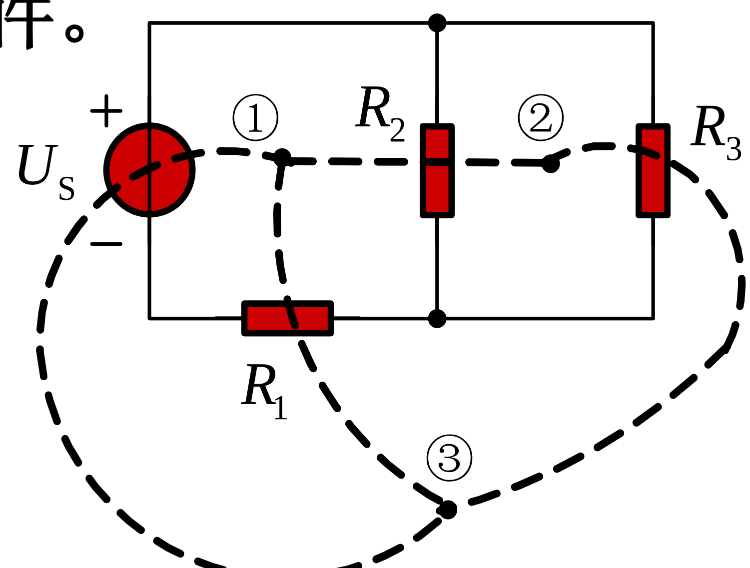
$$\begin{cases}(G_1+G_2)U_{n1}-G_2U_{n2}=I_S\\-G_2U_{n1}+(G_2+G_3)U_{n2}=0\end{cases}$$



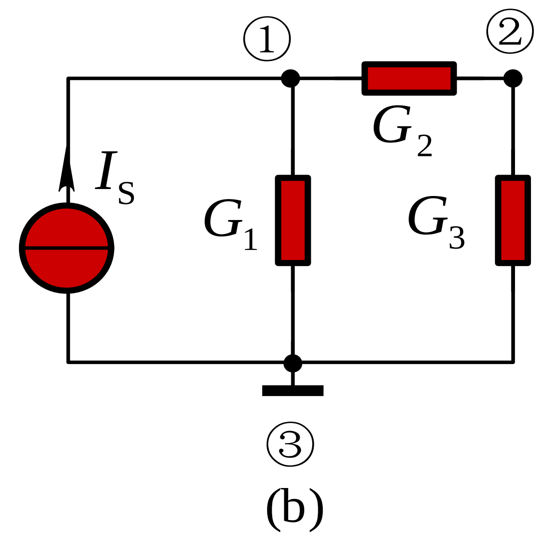
（b）

3.5 对偶原理

由一个平面电路可直接画出其对偶电路。在每一个网孔内标出一个节点，作为其对偶电路的独立节点，在网孔外标出的节点对应非独立节点(参考节点)。把所标出的节点①、②、③用虚线互相连接便是对偶电路的支路。每两个节点间的每个连线只通过一个元件，把此元件换成对偶元件，便得到对偶电路相应支路的元件。



(a)



(b)

本章小节

1. 置换定理：在任意线性或非线性电路中，若某一端口网络的端口电压为U，端口电流为I，则用$U_S=U$的电压源或$I_S=I$的电流源置换该一端口，如果置换后的电路有唯一解，则置换不影响电路其它部分的电压、电流。

2. 齐性定理：对只有一个激励作用的线性电路，当该激励乘以系数K时，由此而引起的所有响应也相应地改变到原来量值 的K倍。

3. 叠加定理：在线性电路中，由几个独立电源共同作用产生的响应等于各个独立电源单独作用时产生相应响应的代数叠 加。

齐性定理和叠加定理是反映线性电路本质的重要定理。

本章小节

4. 戴维南定理:线性含源一端口网络的对外作用可以用戴维南电路等效代替，其等效源电压等于此一端口网络的开路电压，其等效电阻是此一端口网络内部各独立电源置零后所得不含独立源一端口网络的等效电阻。

5. 诺顿定理：线性含源一端口网络的对外作用可以用诺顿电路等效代替，其等效源电流等于此一端口网络的短路电流，其等效电导是此一端口网络内部各独立电源置零后所得不含独立源一端口网络的等效电导。

本章小节

6. 特勒根定理： 对于两个结构相同的电路 N和 N'有

$$\sum_{k=1}^{b} u_k i'_k = 0 \qquad \sum_{k=1}^{b} u'_k i_k = 0$$

特勒根定理用于同一电路便得到功率守恒定理，即

$$\sum_{k=1}^{b} p_k = 0$$

7. 互易定理： 互易定理的三种形式可归纳为：在含有一个独立源和若干线性二端电阻的电路中，若响应与激励互换位置，且满足将激励置零时互换前后的电路是相同的，则响应之比等于激励之比。

谢　　谢！