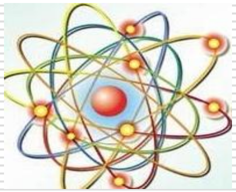
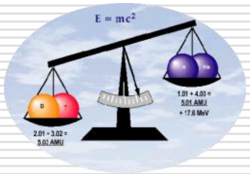




第4章　正弦电流电路

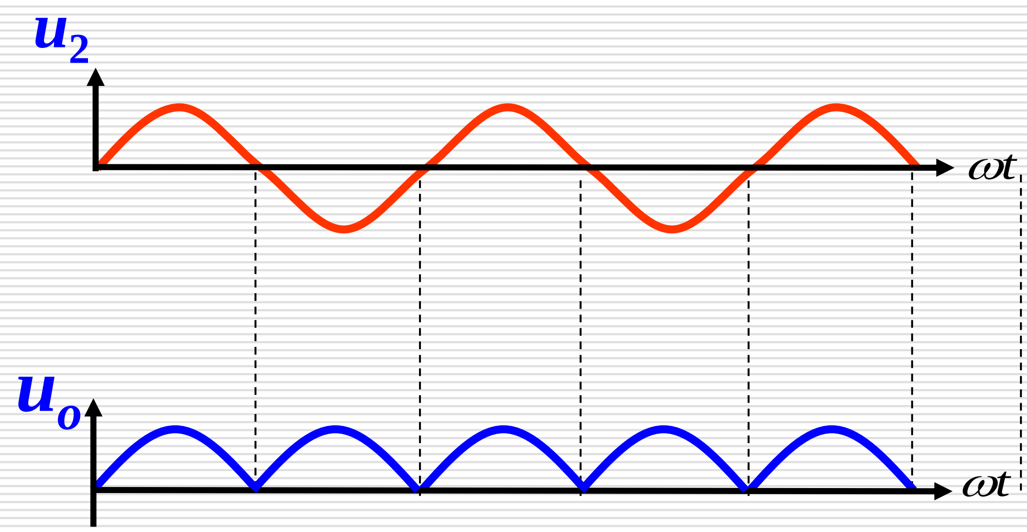
开课教师：　王灿

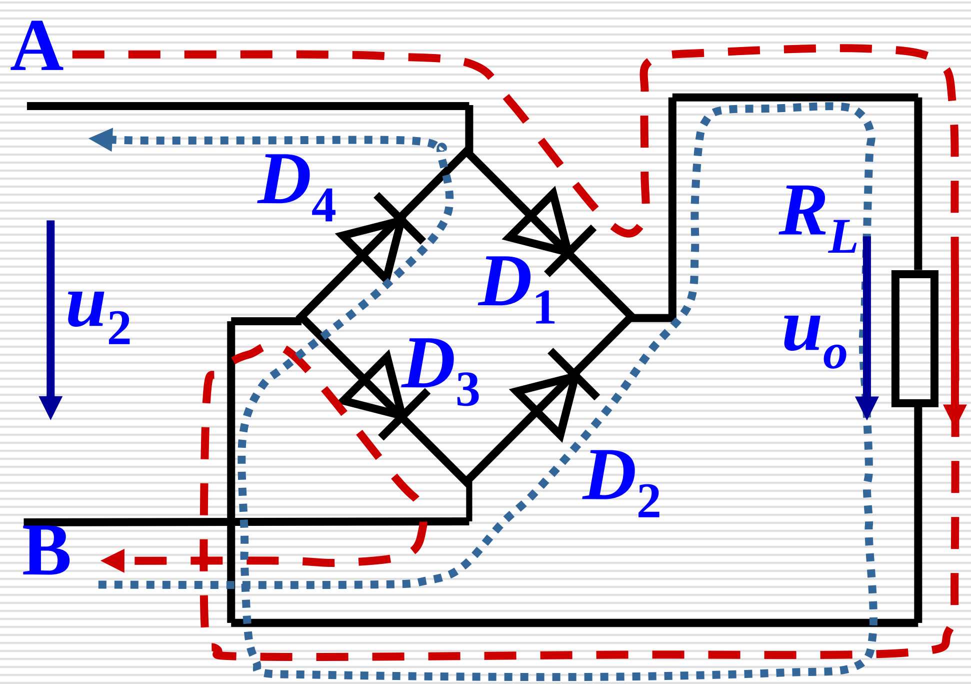
开课单位：机电学院--电气工程学科

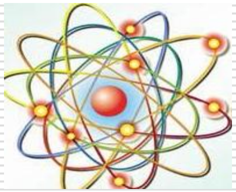
正弦交流电路

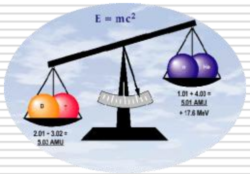
正弦交流电路：正弦交流电路中的电压、电流随时间按正弦规律变化。所有独立源都是同频率的正弦量，并且已工作足够长的时间，其特点是所有电压和电流都是同频率的正弦量，与电源频率相同。

桥式整流电路输出波形

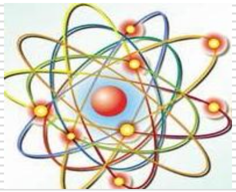


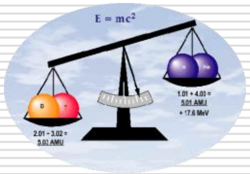




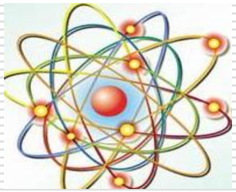


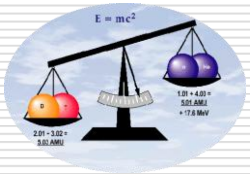
提要 本章将详细介绍借助复数运算来避免三角函数运算的方法，即正弦电流电路的相量分析法。在介绍正弦量的相量表示法、KCL、KVL和元件方程的相量形式的基础上，建立电路方程和电路定理的相量形式，其中涉及相量、阻抗和导纳等重要概念。此外，还介绍了瞬时功率、平均功率、无功功率、视在功率、复功率和功率因数的定义及计算，最后介绍了含耦合电感及理想变压器的正弦电路的计算。





本章目次





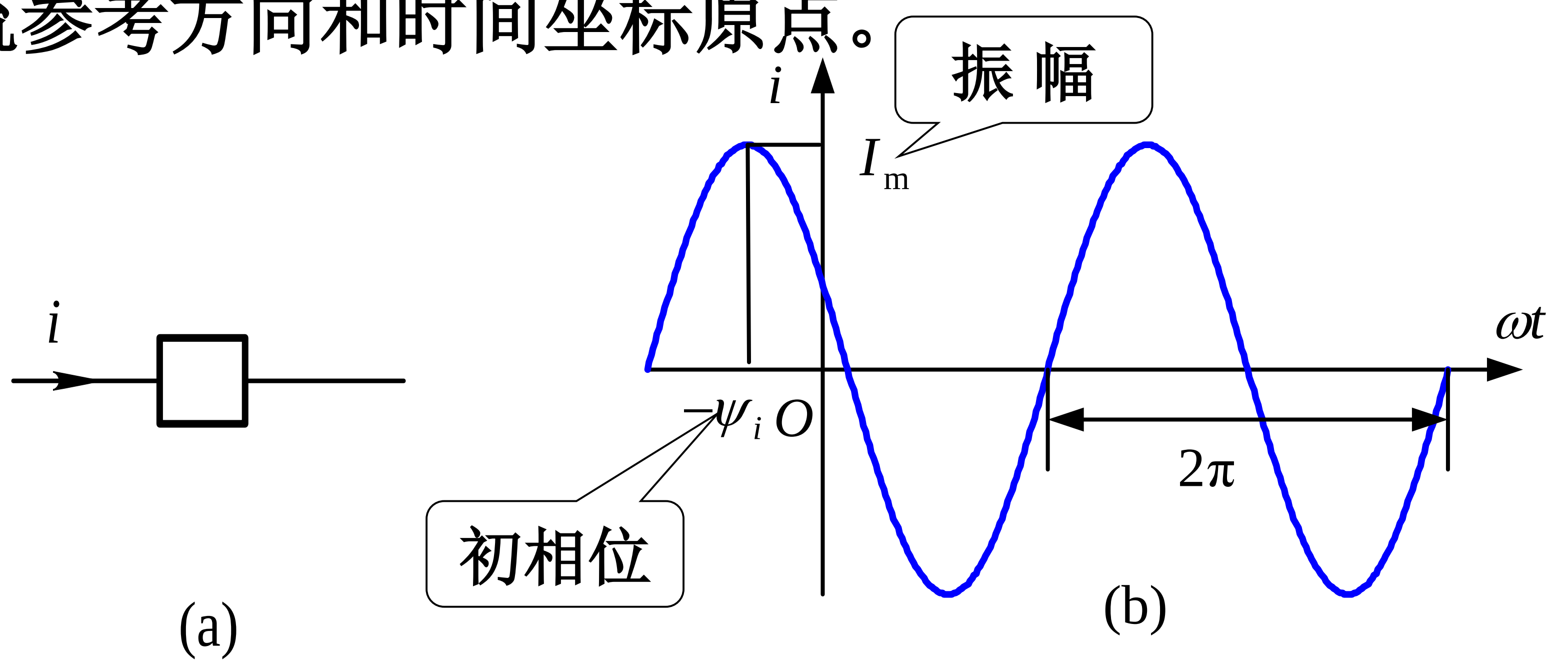
本章目次

4.1 正弦电流

基本要求：掌握正弦量的振幅、角频率和初相位；正弦量的瞬时值、有效值和相位差。

随时间按正弦规律变动的电流称为正弦电流。

指定电流参考方向和时间坐标原点。



正弦电流的波形

4.1 正弦电流

正弦电流的瞬时值表达式：

$$i = I_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \psi_i)$$

振幅或幅值

$i = I_{\mathrm{m}}\big|_{\cos(\omega t+\psi_i)=1}$

角频率

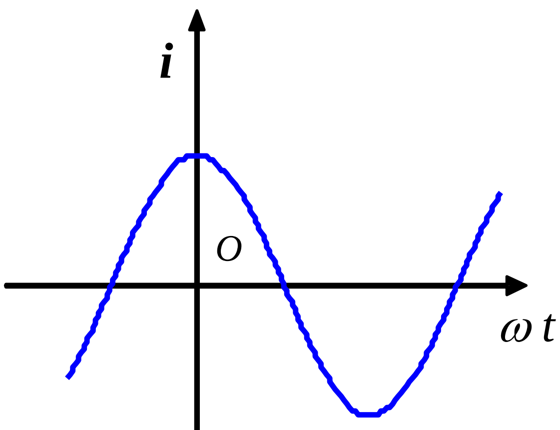
$$\frac{\mathrm{d}(\omega t + \psi_i)}{\mathrm{d}t} = \omega$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

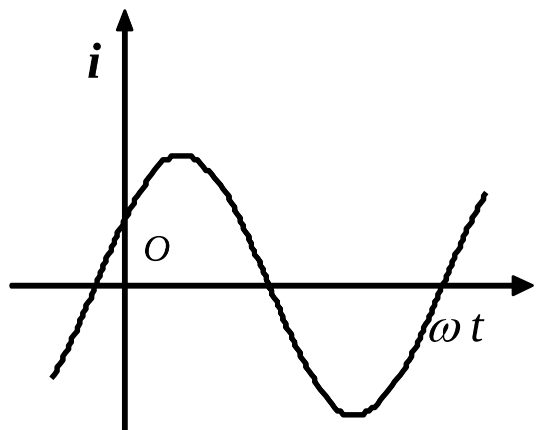
初 相 $\omega t + \psi_i \rightarrow$ 相位

$$(\omega t + \psi_i)\big|_{t=0} = \psi_i$$

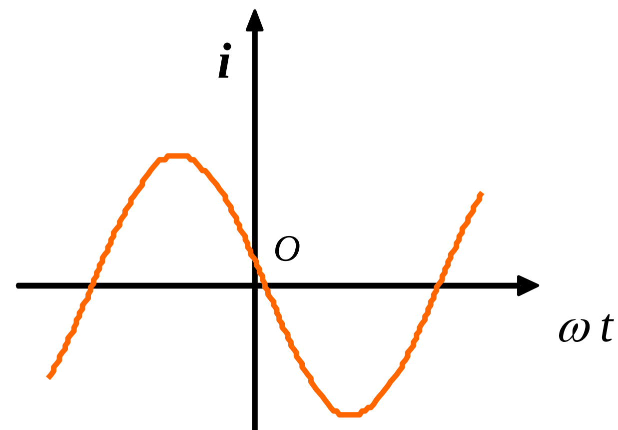
大小与计时起点有关



$\psi_i = 0$



$\psi_i < 0$



$\psi_i > 0$

ψ_i 与计时起点的关系

4.1 正弦电流

我国电力系统标准频率为 50Hz，称为工频，相应的角频率

$$\omega = 2\pi\,\text{rad} \times 50/\text{s} = 100\pi\,\text{rad/s}$$

1 有效值

当周期电流 $i = f(t)$ 和直流 I 分别通过相同的电阻R，若二者作功的平均效果相同，则将此直流 I 的量值规定为周期电流 i 的有效值，用 I 表示。有效值是瞬时值的平方在一个周期内的平均值再开方：

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{T} i^2 \mathrm{d}t}$$

4.1 正弦电流

将 $i = I_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \psi_i)$ 代入得有效值与最大值间的关系

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_{\mathrm{m}}^2 \cos^2(\omega t + \psi_i)\mathrm{d}t} = \frac{I_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}$$

$$i = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \psi_i)$$

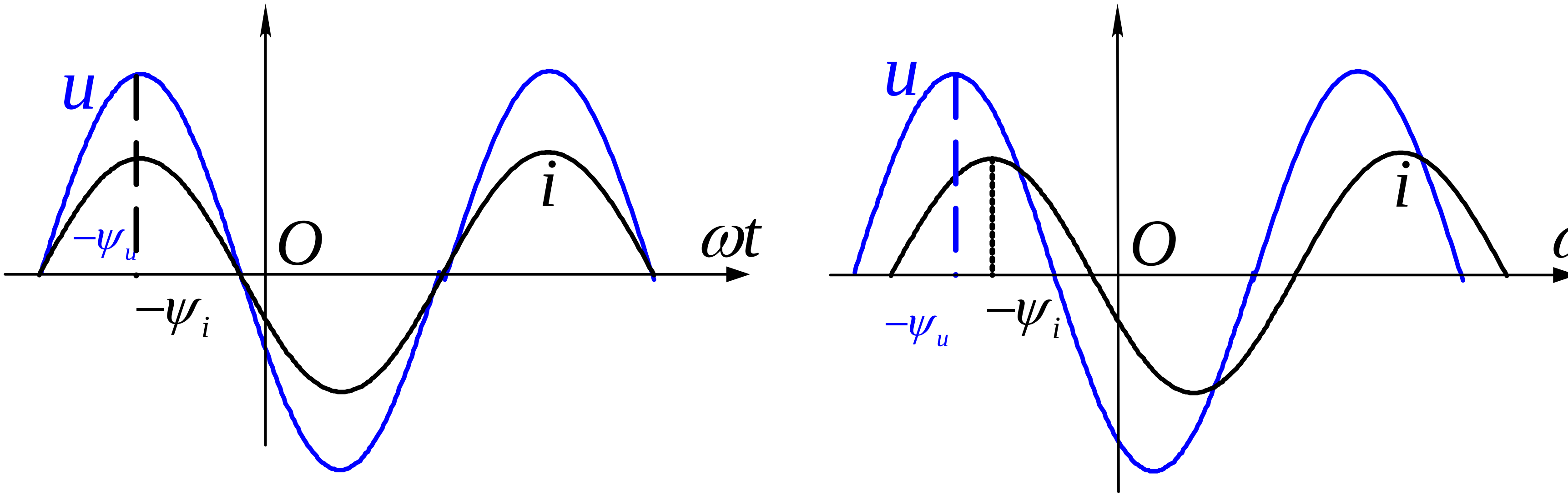
2 相位差

同频率正弦电压 $u = U_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \psi_u)$和正弦电流 $i = I_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \psi_i)$的相位差为初相之差，即

$$(\omega t + \psi_u) - (\omega t + \psi_i) = \psi_u - \psi_i = \varphi$$

若 $\psi_u - \psi_i = 0$ 则称电压、电流为同相。

4.1 正弦电流



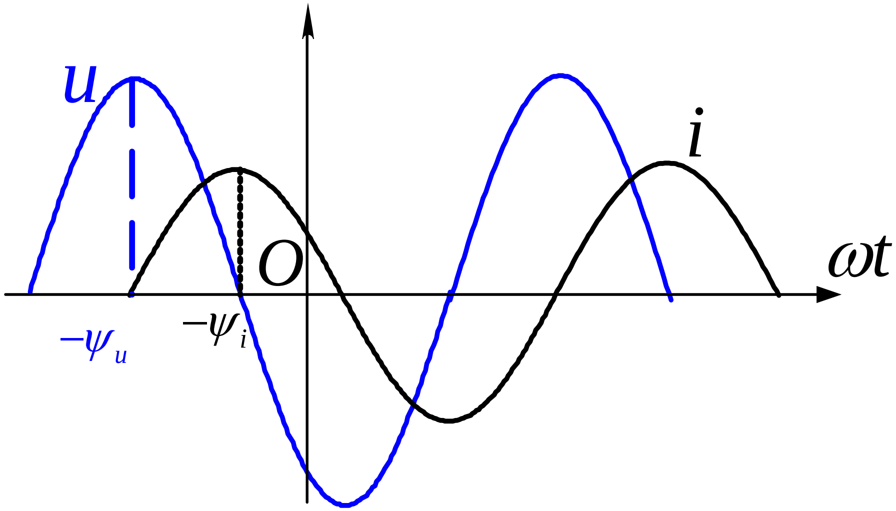
$\varphi > 0$，则称 ***u*** **越前** ***i*** 于 φ，即 ***u*** 比 ***i*** 先达到最大值或先达到零值。

$\varphi < 0$，则称 ***u*** **滞后** ***i*** 于 φ 。

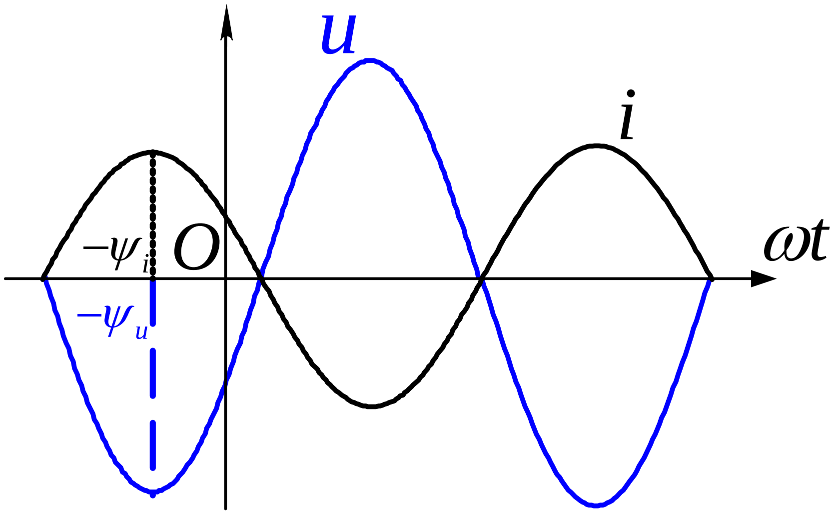
越前或滞后的相角通常以180°为限。

4.1 正弦电流

若两个正弦量的相差为90°，则称它们相位正交。



若两个正弦量的相差为180°则称为相位相反。



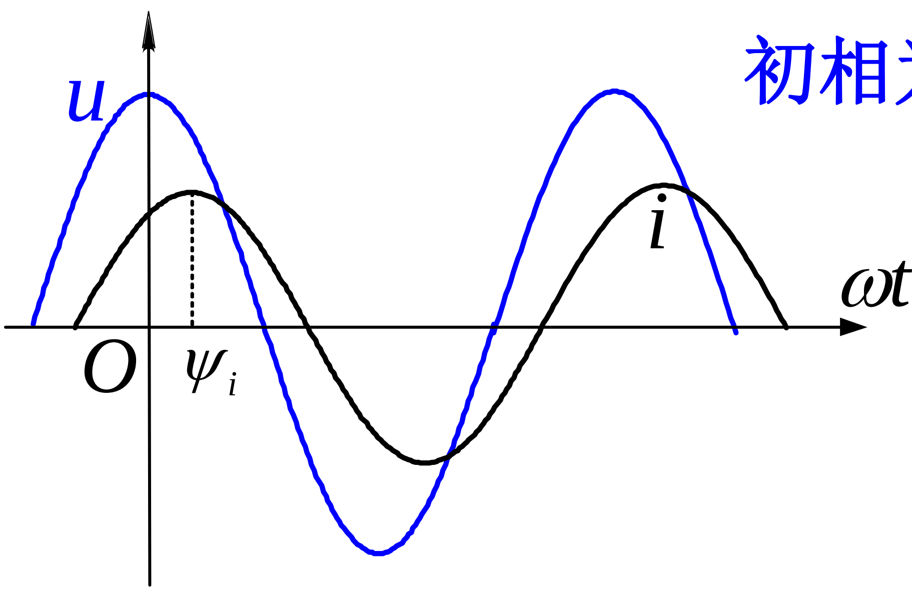
4.1 正弦电流

3 参考正弦量

电压 $\boldsymbol{u}$ 通过最大值的瞬间作为时间坐标原点(**t =0**), 此时$\psi_u = 0$，正弦电压记为

$$u = U_{\mathrm{m}} \cos\omega t$$

初相为零的正弦量称为参考正弦量。

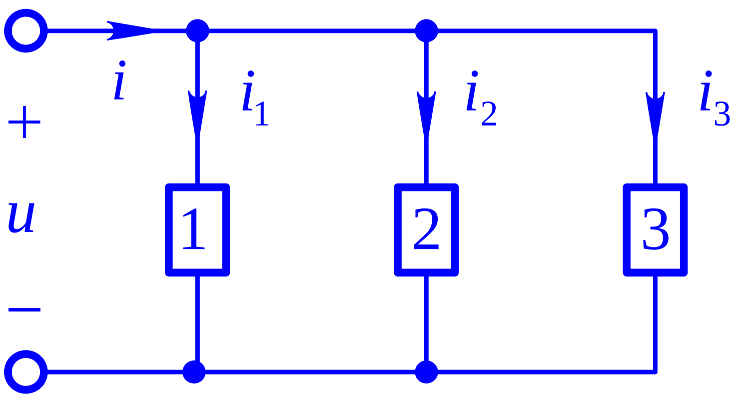


u为参考正弦量的波形

一旦把某一正弦量选作参考正弦量，其它同频率的正弦量的初相也就相应被确定, 图中电流 $i = I_{\mathrm{m}} \cos(\omega t - \psi_i)$ 其初相为 $-\psi_i$，故 $\boldsymbol{i}$ 的波形图较参考正弦量$\boldsymbol{u}$的波形图沿横轴右移 ψ_i 。

[补充4.1]

已知图示电路$u=100\cos(\omega t+10°)\text{V}$、$i_1=2\cos(\omega t+100°)\text{A}$、$i_2=-4\cos(\omega t+190°)\text{A}$、$i_3=5\sin(\omega t+10°)\text{A}$。写出电压和各电流的有效值、初相位，并求电压越前于电流的相位差。



【解】将i_2和i_3写为余弦标准式

$$i_2=-4\cos(\omega t+190°)\text{A}$$

$$=4\cos(\omega t+190°-180°)\text{A}=4\cos(\omega t+10°)\text{A}$$

$$i_3=5\sin(\omega t+10°)\text{A}$$

$$=5\cos(\omega t+10°-90°)\text{A}=5\cos(\omega t-80°)\text{A}$$

[补充4.1]

$u = 100\cos(\omega t + 10°)\text{V}$　　$i_1 = 2\cos(\omega t + 100°)\text{A}$

$i_2 = 4\cos(\omega t + 10°)\text{A}$　　$i_3 = 5\cos(\omega t - 80°)\ \text{A}$

初相位　$\psi_u = 10^\circ,\ \psi_{i_1} = 100^\circ, \psi_{i_2} = 10^\circ, \psi_{i_3} = -80^\circ$

相位差

$$\varphi_1 = \psi_u - \psi_{i_1} = 10^\circ - 100^\circ = -90^\circ$$

$$\varphi_2 = \psi_u - \psi_{i_2} = 10° - 10° = 0^\circ$$

$$\varphi_3 = \psi_u - \psi_{i_3} = 10° - (-80°) = 90^\circ$$

电压、电流的有效值为

$$U = \frac{100}{\sqrt{2}} = 70.7\text{V},\ I_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} = 1.414\text{A}$$

$$I_2 = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2.828\text{A},\ I_3 = \frac{5}{\sqrt{2}} = 3.54\text{A}$$

[补充4.1]

$u = 100\cos(\omega\ t + 10°)\text{V}$

$i_1 = 2\cos(\omega\ t + 100°)\text{A}$

$i_2 = 4\cos(\omega\ t + 10°)\ \text{A}$

$i_3 = 5\cos(\omega\ t - 80°)\ \ \text{A}$

初相位 $\psi_u = 10^\circ,\ \psi_{i_1} = 100^\circ, \psi_{i_2} = 10^\circ, \psi_{i_3} = -80^\circ$

相位差 $\varphi_1 = \psi_u - \psi_{i_1} = 10^\circ - 100^\circ = -90^\circ$

$$\varphi_2 = \psi_u - \psi_{i_2} = 10° - 10° = 0^\circ$$

$$\varphi_3 = \psi_u - \psi_{i_3} = 10° - (-80°) = 90^\circ$$

$u = 100\cos(\omega\ t)\text{V}$

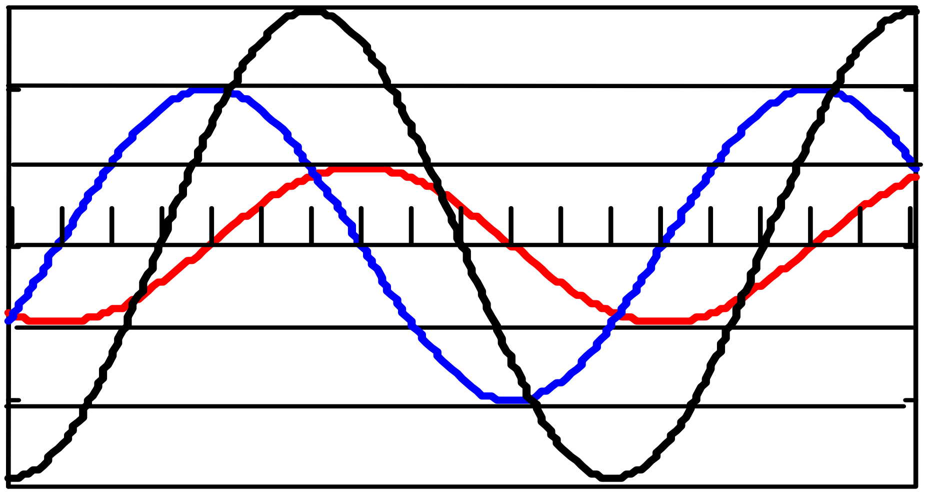
$i_1 = 2\cos(\omega\ t + 90°)\text{A}$

$i_2 = 4\cos(\omega\ t)\ \text{A}$

$i_3 = 5\cos(\omega\ t - 90°)\ \ \text{A}$

[例4.1]

示波器显示三个工频正弦电压的波形如图所示，已知图中纵坐标每格表示5V。试写出各电压的瞬时表达式。



示波器上显示的三个正弦波

设u_1、 u_2 和u_3依次表示图中振幅最大、中等和最小的电压，其幅值分别为15V、10V和5V。

由图可见u_2 比u_1越前60°

u_3比u_1滞后 30°,于是得

取 u_1为参考正弦量，即

$$u_1 = 15\cos(\omega t) \ \text{V}$$

$$u_2 = 10\cos(\omega t + 60^\circ)\text{V}$$

$$u_3 = 5\cos(\omega t - 30^\circ)\text{V}$$

4.2 正弦量的相量表示法

基本要求：掌握正弦量的相量表示法原理、相量运算规则及相量图。

正弦电路电压、电流随时间按正弦规律变化。在含有电感和(或)电容的正弦电路中，元件方程中含有微积分形式。因此，在时域内对正弦电路进行分析时，需要建立含微积分的电路方程。

正弦电流电路 $\xrightarrow{\text{分析}}$ 建立电路方程(含微积分方程) $\xrightarrow{\text{求解}}$ 得时域响应表达式

时域分析过程示意图

4.2 正弦量的相量表示法

思考：正弦函数微积分或几个同频率正弦函数相加减的结果仍是同频率正弦量。能否用一种简单的数学变换方法以避免繁琐的三角函数运算？

→ 相量分析法

4.2 正弦量的相量表示法

1. 复数的表示法

设*A*是一个复数，可表示为

实部　虚部

直角坐标式 $A = a_1 + \mathrm{j}a_2$

模　辐角

极坐标式 $A = |A|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = |A|(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)$

简写为 $A = |A|\angle\theta$

比较有

$$a_1 = |A|\cos\theta \qquad |A| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$a_2 = |A|\sin\theta \qquad \theta = \arctan(a_2/a_1)$$

[补充4.2]

把复数分别化为直角坐标式。

$$A_1 = 10\angle 150^\circ,\ A_2 = 10\angle -180^\circ,\ A_3 = 1\angle 90^\circ,\ A_4 = 1\angle -90^\circ$$

【解】

$$A_1 = 10\angle 150^\circ = 10\cos 150^\circ + j10\sin 150^\circ \approx -8.66 + j5$$

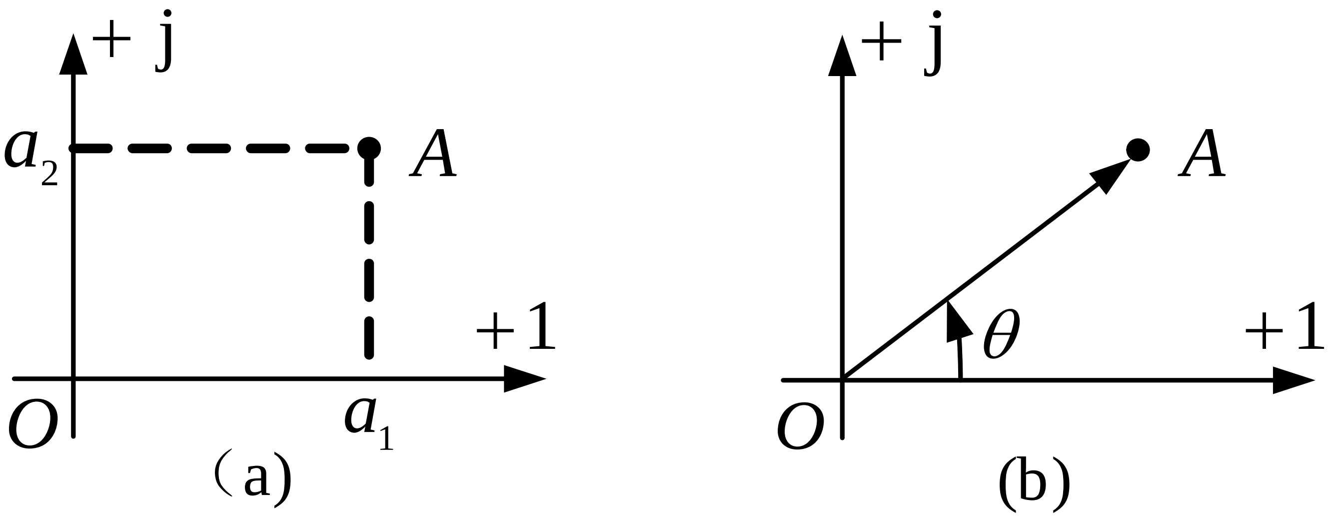
$$A_2 = 10\angle -180^\circ = 10\cos(-180^\circ) + j10\sin(-180^\circ) = -10$$

$$A_3 = 1\angle 90^\circ = \cos 90^\circ + j\sin 90^\circ = j$$

$$A_4 = 1\angle -90^\circ = \cos(-90^\circ) + j\sin(-90^\circ) = -j$$

4.2 正弦量的相量表示法

复数*A*还可以用复平面上的点或有向线段表示。



用复平面上的点或有向线段表示复数

2. 正弦量的相量表示

正弦量一般表达式为: $f(t)=A_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\psi)$

设一复数为 $A_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\psi)}$ 根据欧拉公式得

$$A_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\psi)}=A_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\psi)+\mathrm{j}A_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\psi)$$

得

$$f(t)=A_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\psi)=\mathrm{Re}[A_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\psi)}]$$

$$=\mathrm{Re}[A_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\mathrm{Re}[\dot{A}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

其中 $\dot{A}_{\mathrm{m}}=A_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}=A_{\mathrm{m}}\angle\psi$

最大值相量

正弦量振幅

正弦量初相

4.2 正弦量的相量表示法

$$f(t)=\mathrm{Re}[A_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\mathrm{Re}[\dot{A}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

一个正弦量 $f(t)=A_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\psi)$ 能够唯一地确定其对应的相量 $\dot{A}_{\mathrm{m}}$

$$f(t)\rightleftharpoons\dot{A}_{\mathrm{m}}$$

反之，若已知 $\dot{A}_{\mathrm{m}}$ 和角频率 ω，也能唯一地确定 $\dot{A}_{\mathrm{m}}$ 所代表的正弦量 $f(t)=A_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\psi)$

[例4.2]

写出代表正弦量的相量 $i_1 = 3\cos\omega t$，$i_2 = 4\cos(\omega t - 150°)$，$i_3 = -5\cos(\omega t - 60°)$，$i_4 = 6\sin(\omega t + 30°)$.

【解】

$$i_1 \to \dot{I}_{1m} = 3\angle 0^\circ \ \text{A}$$

$$i_2 \to \dot{I}_{2m} = 4\angle -150^\circ \ \text{A}$$

$$i_3 = -5\cos(\omega t - 60^\circ) = 5\cos(\omega t - 60^\circ + 180^\circ)$$

$$\to \dot{I}_{3m} = 5\angle 120^\circ \ \text{A}$$

$$i_4 = 6\sin(\omega t + 30^\circ) = 6\cos(\omega t + 30^\circ - 90^\circ)$$

$$\to \dot{I}_{4m} = 6\angle -60^\circ \ \text{A}$$

[例4.3]

已知电压相量$\dot{U}_{1m}$=(3-j4)V，$\dot{U}_{2m}$=(-3+j4)V，$\dot{U}_3$=j4V。写出各电压相量所代表的正弦量（设角频率为ω)。

【解】

$$U_{1m}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5\text{ V}\qquad \psi_1=\arctan\frac{-4}{3}=-53.1^\circ$$

$$\dot{U}_{1m}=5\angle-53.1^\circ\text{ V}\quad\rightarrow u_1=5\cos(\omega t-53.1^\circ)$$

$$U_{2m}=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5\text{ V}\qquad \psi_2=\arctan\frac{4}{-3}=126.9^\circ$$

$$\dot{U}_{2m}=5\angle126.9^\circ\text{ V}\quad\rightarrow u_2=5\cos(\omega t+126.9^\circ)$$

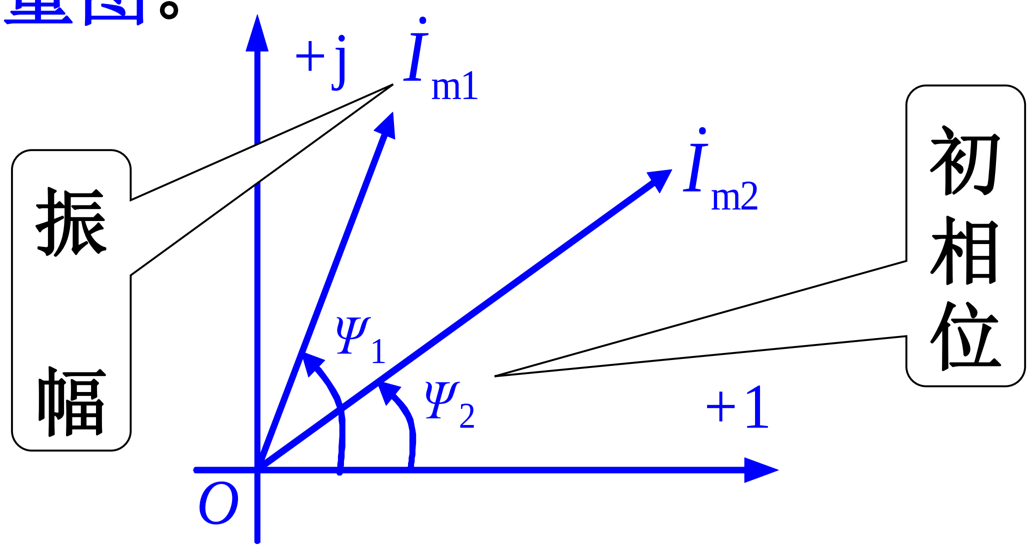
$$\dot{U}_3=\text{j}4\text{ V}=4\angle90^\circ\text{ V}\rightarrow u_3=4\sqrt{2}\cos(\omega t+90^\circ)$$

4.2 正弦量的相量表示法

关于相量说明

1. 相量是复值常量，而正弦量是时间的余弦函数，相量只是代表正弦量，而不等于正弦量。

2. 按着一定的振幅和相位关系画出若干相量的图形 ——相量图。



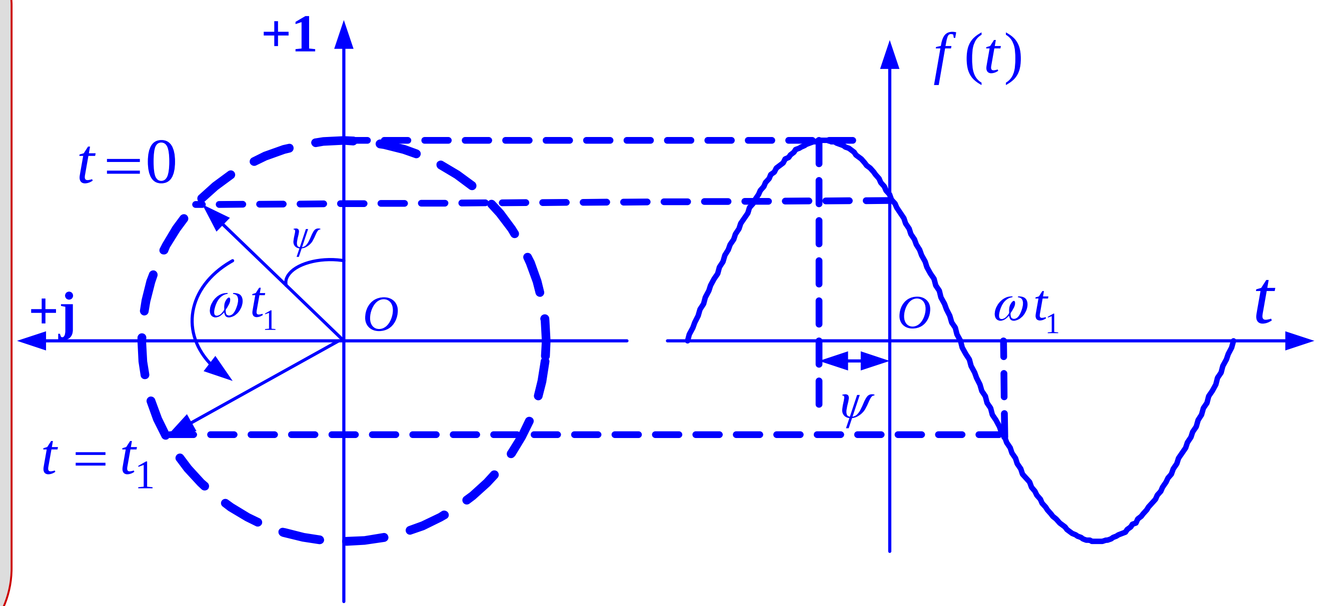
相量图

关于相量说明

3. 复数 $A_m e^{j(\omega t+\psi)}$ 的辐角 $\omega t+\psi$ 是随时间均匀递增的，所以这一有向线段将以原点为圆心反时针方向旋转，旋转角速度为 $\dfrac{d}{dt}(\omega t+\psi)=\omega$

旋转相量—旋转相量任何时刻在实轴上的投影对应于正弦量在同一时刻的瞬时值。

$e^{j\omega t}\rightarrow$ 旋转因子



旋转相量在实轴上的投影对应于正弦波

3. 相量运算规则

(1) 惟一性

两个同频率正弦量相等的充要条件是代表这两个正弦量的相量相等。即对于所有的时间t，

$\mathrm{Re}[\dot{A}_{m1}e^{j\omega t}] = \mathrm{Re}[\dot{A}_{m2}e^{j\omega t}]$ 充要条件为 $\dot{A}_{m1} = \dot{A}_{m2}$

(2) 线性性质

N个同频率正弦量线性组合（具有实系数）的相量等于各个正弦量相量的同样的线性组合。设

$f_k(t) = \mathrm{Re}[\dot{A}_{mk}e^{j\omega t}]$ ，(b_k 为实数)，则

$$\sum_{k=1}^{N} b_k \cdot f_k(t) = \mathrm{Re}[(\sum_{k=1}^{N} b_k \dot{A}_{mk})e^{j\omega t}] \quad \sum_{k=1}^{N} b_k \cdot f_k(t) \rightleftharpoons \sum_{k=1}^{N} b_k \dot{A}_{mk}$$

3. 相量运算规则

(3) 微分规则

正弦量(角频率为ω) 时间导数的相量等于表示原正弦量的相量乘以因子 jω。

设 $f(t)=\mathrm{Re}[\dot{A}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$， 则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)=\mathrm{Re}[\mathrm{j}\omega\dot{A}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)\rightleftharpoons \mathrm{j}\omega\dot{A}_{\mathrm{m}}$$

由于采用相量表示正弦量，正弦量对时间求导运算变换为用 jω 乘以代表它们的相量的运算。

[例4.4]

设电感的磁链为正弦量 $\psi = \mathrm{Re}[\dot{\psi}_{\mathrm{m}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$，它所引起的感应电压也是同频率的正弦量 $u = \mathrm{Re}[\dot{U}_{\mathrm{m}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$，写出电压相量和磁链相量的关系。

【解】 当u和ψ的参考方向符合右螺旋定则时

$$u = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}$$

根据正弦量的相量表示的惟一性和微分规则，与上述微分关系对应的相量关系式为

$$\dot{U}_{\mathrm{m}} = \mathrm{j}\omega \dot{\psi}_{\mathrm{m}} \quad 或 \quad \dot{\psi}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega} \dot{U}_{\mathrm{m}}$$