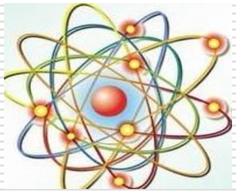
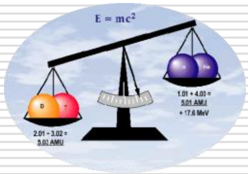




第4章　正弦电流电路

4.10 含互感元件的正弦电路

4.11 理想变压器

开课教师：　王灿

开课单位：机电学院--电气工程学科

4.10 含互感元件的正弦电流电路

基本要求：掌握互感元件方程的相量形式及其应用，会用支路电流法或回路电流法列写含互感电路的方程，掌握含互感电路的等效化简。

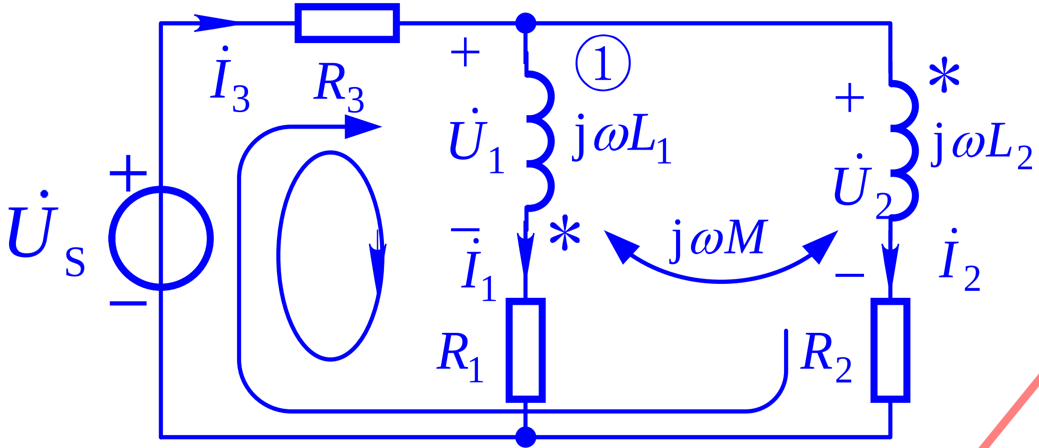
说明：分析含互感的正弦电路的基本方法是列写相量形式的电路方程。

其次，当两个耦合线圈相串联或存在公共节点时，还可以通过消去互感，变换成等效的不含互感电路来分析，这也是一种简便有效的方法。

因为互感元件方程一般是用电流来表示电压所以在列写电路方程时应以电流为待求量，也就是列写支路电流方程或回路电流方程。

[例4.18]

列出图示电路的方程。　　　　　　　　支路电流法



耦合电感特性方程

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \mathrm{j}\omega L_1\dot{I}_1 - \mathrm{j}\omega M\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 &= -\mathrm{j}\omega M\dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega L_2\dot{I}_2\end{aligned}\right\}$$

对节点①和回路列写KCL和KVL方程

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0 \qquad (1)$$

$$R_1\dot{I}_1 + \dot{U}_1 + R_3\dot{I}_3 = \dot{U}_S \qquad (2)$$

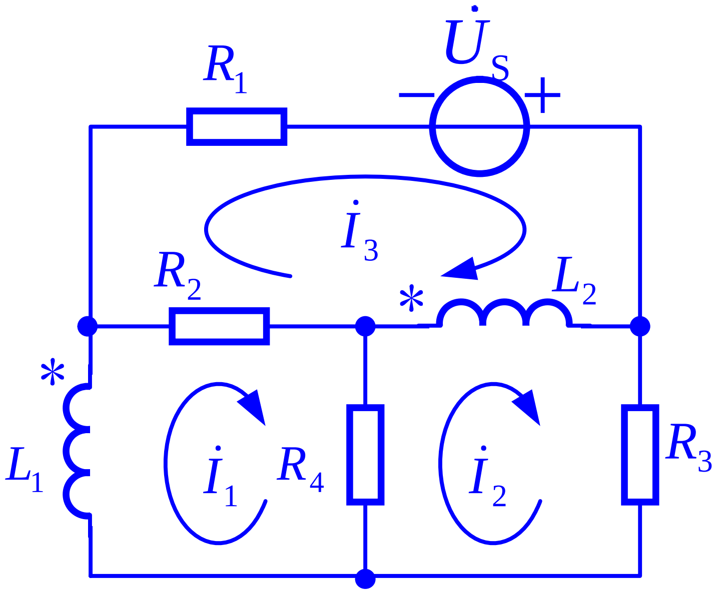
$$R_2\dot{I}_2 + \dot{U}_2 + R_3\dot{I}_3 = \dot{U}_S \qquad (3)$$

$$\dot{U}_S = (R_1 + \mathrm{j}\omega L_1)\dot{I}_1 - \mathrm{j}\omega M\dot{I}_2 + R_3\dot{I}_3$$

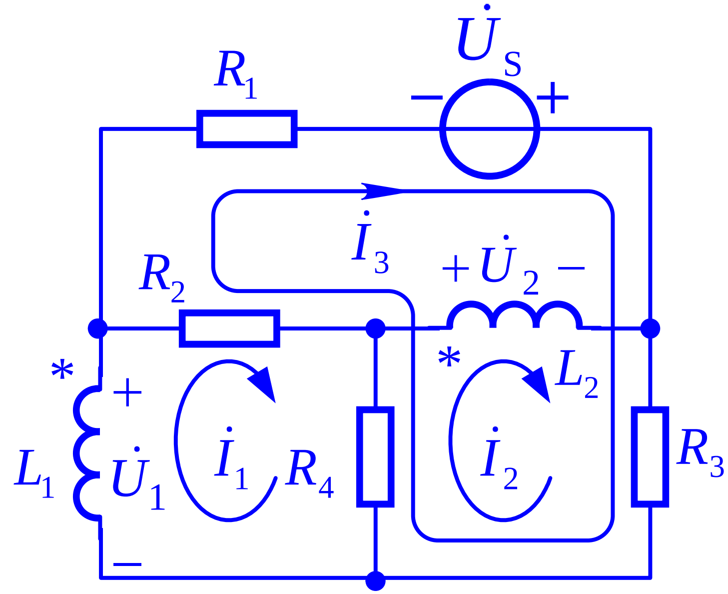
$$\dot{U}_S = -\mathrm{j}\omega M\dot{I}_1 + (R_2 + \mathrm{j}\omega L_2)\dot{I}_2 + R_3\dot{I}_3$$

[例4.19]

列出图示电路的回路电流方程。



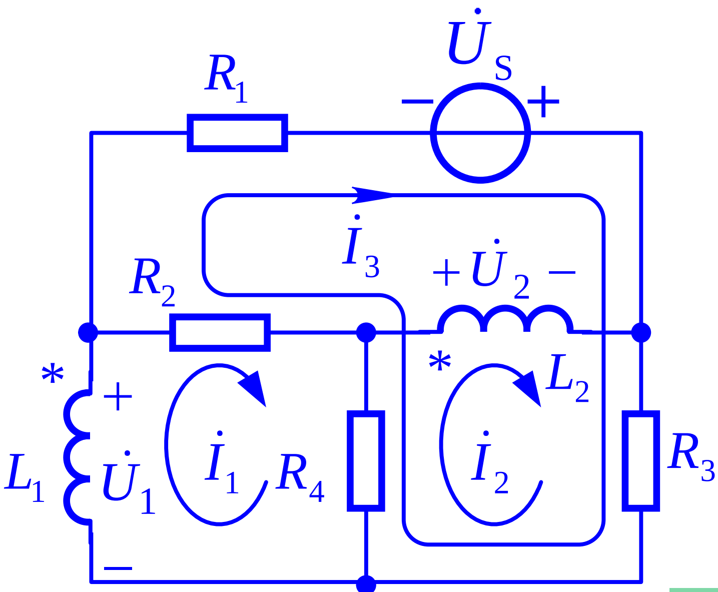
每个回路中均含有耦合电感线圈



只有两个回路含有耦合电感线圈

- 耦合电感特性方程列些复杂程度加大
- 回路方程复杂

[例4.19]



耦合电感特性方程

$$\dot{U}_1=-\mathrm{j}\omega L_1\dot{I}_1+\mathrm{j}\omega M\dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2=-\mathrm{j}\omega M\dot{I}_1+\mathrm{j}\omega L_2\dot{I}_2$$

回路1 $(R_2+R_4)\dot{I}_1-\dot{U}_1-R_4\dot{I}_2-(R_2+R_4)\dot{I}_3=0$

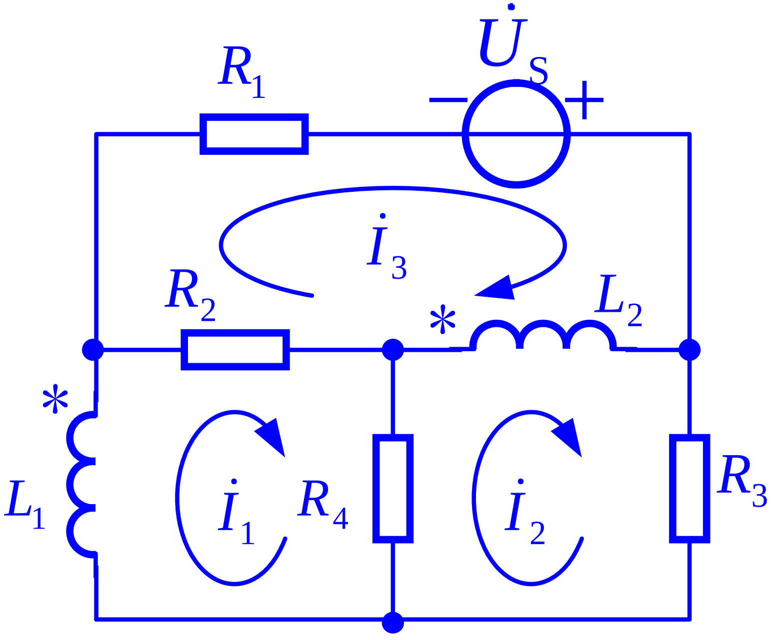
回路2 $-R_4\dot{I}_1+(R_3+R_4)\dot{I}_2+\dot{U}_2+(R_3+R_4)\dot{I}_3=0$

回路3 $-(R_2+R_4)\dot{I}_1+(R_3+R_4)\dot{I}_2+(R_1+R_2+R_3+R_4)\dot{I}_3=\dot{U}_S$

$$(R_2+R_4+\mathrm{j}\omega L_1)\dot{I}_1-(R_4+\mathrm{j}\omega M)\dot{I}_2-(R_2+R_4)\dot{I}_3=0$$

$$-(R_4+\mathrm{j}\omega M)\dot{I}_1+(R_3+R_4+\mathrm{j}\omega L_2)\dot{I}_2+(R_3+R_4)\dot{I}_3=0$$

[例4.19]



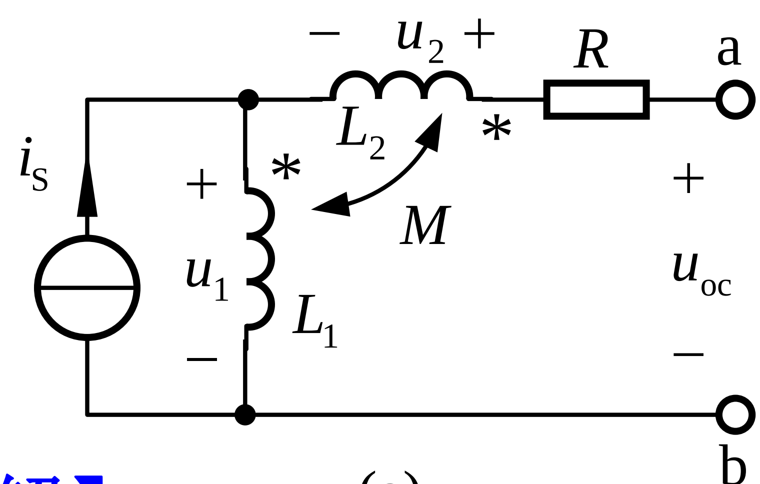
回路1 $(R_2 + R_4 + j\omega L_1)\dot{I}_1 - (R_4 + j\omega M)\dot{I}_2 - (R_2 - j\omega M)\dot{I}_3 = 0$

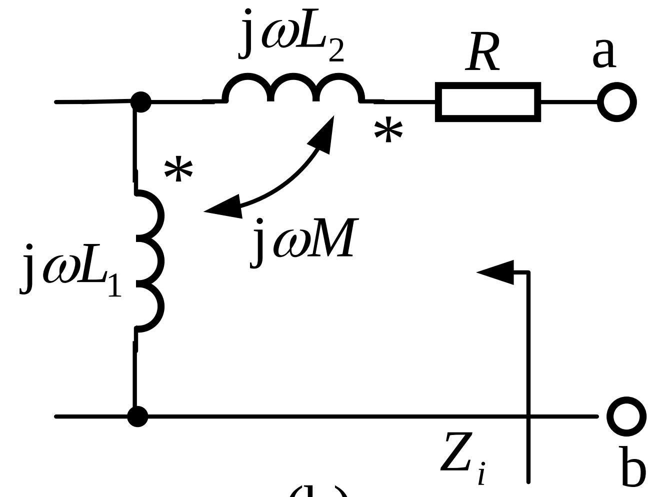
回路2 $-(R_4 + j\omega M)\dot{I}_1 + (R_3 + R_4 + j\omega L_2)\dot{I}_2 - j\omega L_2\dot{I}_3 = 0$

回路3 $-(R_2 - j\omega M)\dot{I}_1 - j\omega L_2\dot{I}_2 + (R_1 + R_2 + j\omega L_2)\dot{I}_3 = \dot{U}_S$

2. 含互感电路的等效化简

[例4.20]已知 R=20Ω，L_1=0.1H，L_2=0.4H，**耦合系数** k=0.85，$i_S = 3\sqrt{2}\cos(100t)\text{A}$。**求一端口的戴维南等效电路。**





【解】

计算互感 $$M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0.17\text{H}$$

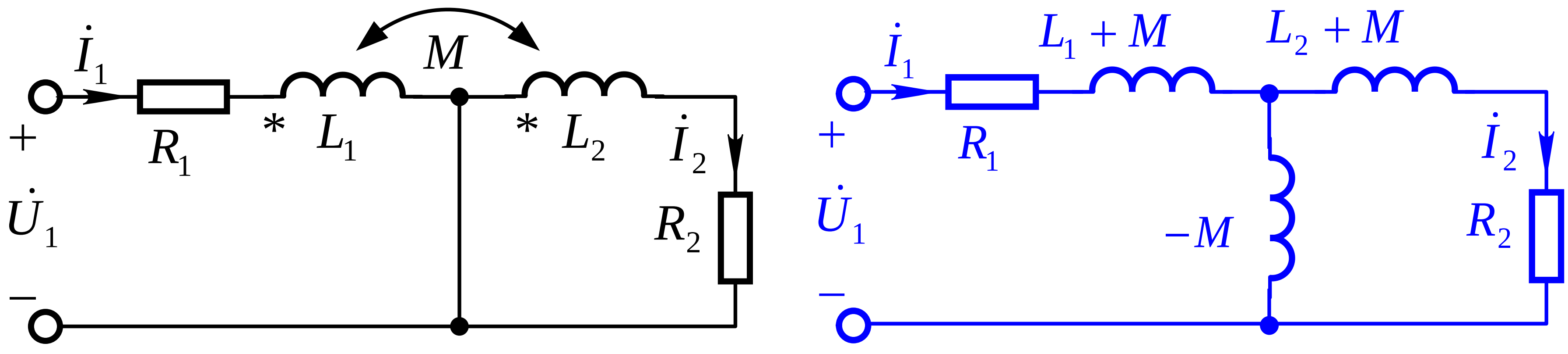
a，b端开路电压 $$\dot{U}_{oc} = \dot{U}_2 + \dot{U}_1 = j\omega M\dot{I}_S + j\omega L_1\dot{I}_S = j81\text{V}$$

求得等效阻抗

$$Z_i = R + j\omega L_{eq} = R + j\omega(L_1 + L_2 + 2M) = (20 + j84)\Omega$$

[例4.21]

已知图中 $\dot{U}_1 = 20\angle 0^0\text{V}$, $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $\omega L_1 = 2\Omega$, $\omega L_2 = 4\Omega$, $\omega M = 1\Omega$, 求电流 $\dot{I}_1$、$\dot{I}_2$。



(a) (b)

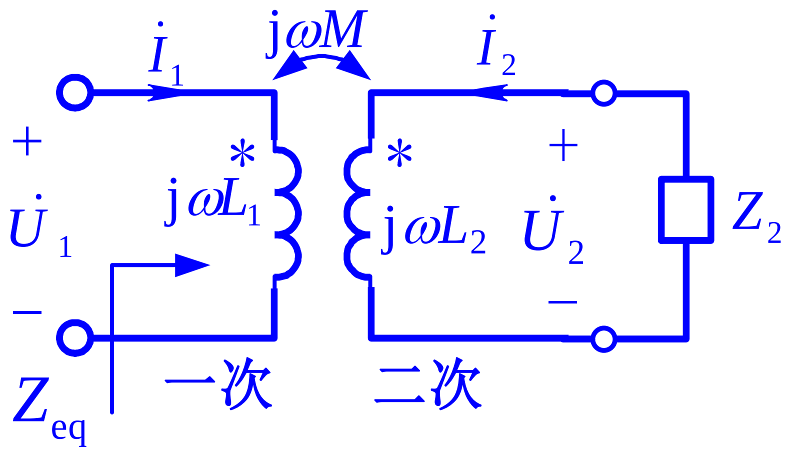
【解】

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{R_1 + j\omega(L_1 + M) + \dfrac{-j\omega M[R_2 + j\omega(L_2 + M)]}{-j\omega M + R_2 + j\omega(L_2 + M)}} = 7.06\angle -41.42°\text{A}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{-j\omega M}{-j\omega M + j\omega(L_2 + M) + R_2} \times \dot{I}_1 \approx 1.25\angle -176.4°\text{A}$$

4.10 含互感元件的正弦电流电路

(1) 互感在电路中常用于传输和变换作用，其电路结构如图所示，此时可将二次侧线圈所在的电路等效到一次侧。



从一次侧看进去时，相当于无源一端口网络，可用阻抗来等效。对互感一次侧和二次侧所在回路分别列写KVL方程得

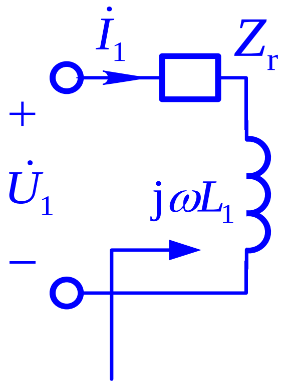
$$\left.\begin{aligned} \mathrm{j}\omega L_1\dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega M\dot{I}_2 &= \dot{U}_1 \\ \mathrm{j}\omega M\dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega L_2\dot{I}_2 + Z_2\dot{I}_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

4.10 含互感元件的正弦电流电路

即求得从一次侧看进去的等效阻抗为

$$Z_{\mathrm{eq}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{(\omega M)^2}{Z_2 + \mathrm{j}\omega L_2} + \mathrm{j}\omega L_1 = Z_{\mathrm{r}} + \mathrm{j}\omega L_1$$

等效电路如图所示

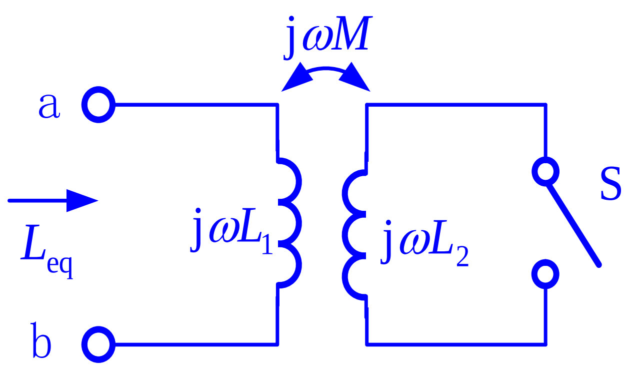


$$\text{其中 } Z_{\mathrm{r}} = \frac{(\omega M)^2}{Z_2 + \mathrm{j}\omega L_2} = \frac{(\omega M)^2}{\text{二次侧回路总阻抗}} = R_{\mathrm{r}} + \mathrm{j}X_{\mathrm{r}}$$

[例4.22]

(应用一次侧等效电路) 下图所示为耦合系数测试电路。设开关S分别处于断开和接通位置时，用*LCR*表(一种测量二端电感、电容、电阻参数的仪器)测得ab端等效电感为L_{OC}=0.8H，L_{SC}=0.1H。试根据上述结果计算互感的耦合系数。

【解】



开关断开时，一次侧电感就是此时的等效电感，即

$$L_{OC} = L_1$$

当开关接通时，输入端口等效阻抗

$$Z_{eq} = j\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{Z_2 + j\omega L_2} = j\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{j\omega L_2} = j\omega\left(\frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2}\right) = j\omega L_{SC}$$

[例4.22]

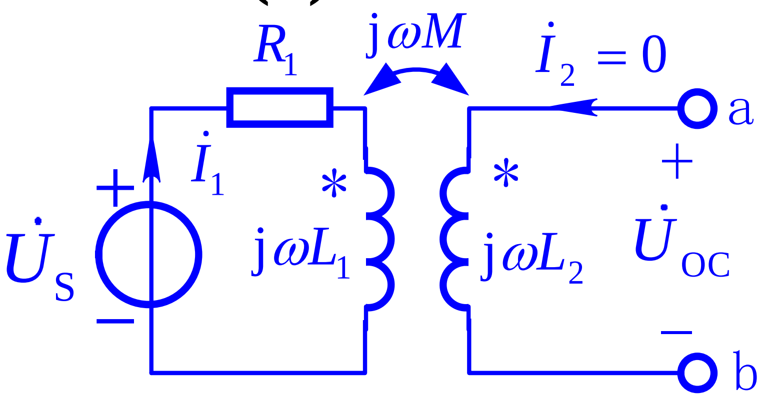
$$Z_{\mathrm{eq}} = \mathrm{j}\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{Z_2 + \mathrm{j}\omega L_2} = \mathrm{j}\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{\mathrm{j}\omega L_2} = \mathrm{j}\omega\left(\frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2}\right) = \mathrm{j}\omega L_{\mathrm{SC}}$$

$$\left.\begin{aligned} L_{\mathrm{SC}} &= \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2} \quad (2) \\ L_{\mathrm{OC}} &= L_1 \quad (1) \\ k &= \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} k &= \sqrt{1 - L_{\mathrm{SC}}/L_{\mathrm{OC}}} \\ &= \sqrt{1 - 0.1/0.8} \approx 0.935 \end{aligned}$$

(2) 当互感线圈的一次侧接电源，则从二次侧看进去时相当于含独立源一端口网络，可用戴维南电路或诺顿电路来等效。

[例4.23]

求图 (a)电路的戴维南等效电路。



(a)

【解】

当二次侧开路时

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}_S &= R_1\dot{I}_1+\mathrm{j}\omega L_1\dot{I}_1\\ \dot{U}_{OC} &= \mathrm{j}\omega M\dot{I}_1\end{aligned}\right\}$$

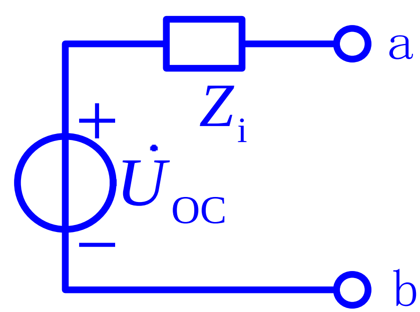
解得 $\dot{U}_{OC}=\dfrac{\mathrm{j}\omega M}{R_1+\mathrm{j}\omega L_1}\dot{U}_S$

计算戴维南等效阻抗

$$Z_i = Z_r' + \mathrm{j}\omega L_2$$

$$=\frac{(\omega M)^2}{\text{一次侧回路总阻抗}}+\mathrm{j}\omega L_2$$

$$=\frac{(\omega M)^2}{R_1+\mathrm{j}\omega L_1}+\mathrm{j}\omega L_2$$



(b)

4.11 理想变压器

基本要求：熟练掌握理想变压器特性方程，理解实际变压器与理想变压器的关系、理想变压器的电阻变换作用。

理想变压器是实际电磁耦合元件的一种理想化模型

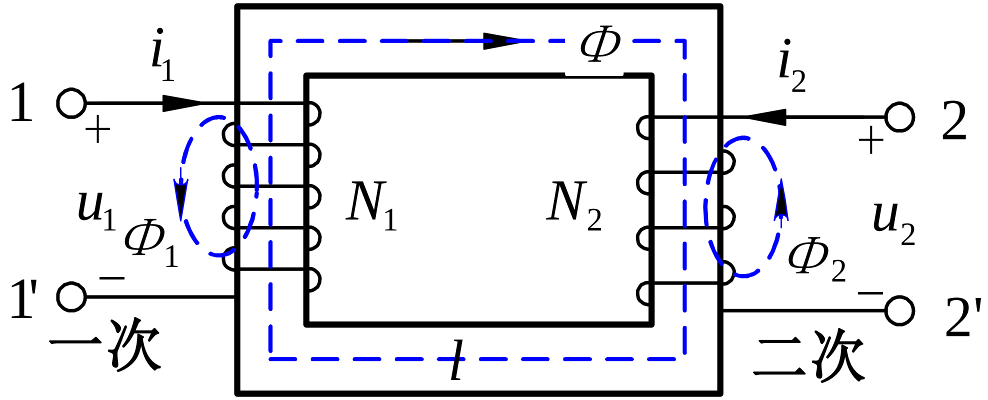


图4. 56 变压器示意图

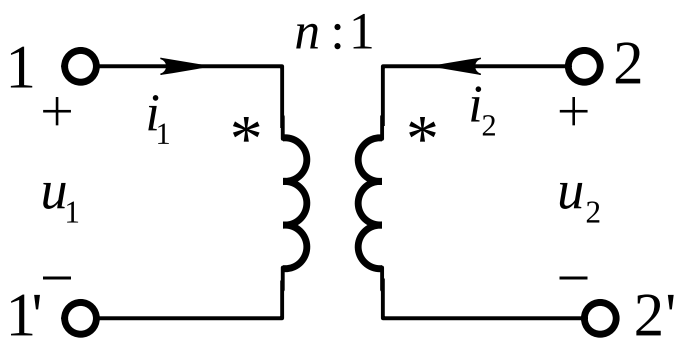


图4.57 理想变压器的符号

4.11 理想变压器

理想化认为

1) 铁心的磁导率 $\mu \to \infty$ $\longrightarrow H = B/\mu = 0$

2)每个线圈的漏磁通为零,即两个线圈为全耦合

3)线圈电阻为零, 端口电压等于感应电动势

4)铁心的损耗为零

$$\Psi_1 = N_1\Phi, \quad u_1 = \frac{\mathrm{d}\Psi_1}{\mathrm{d}t} = N_1\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t},$$

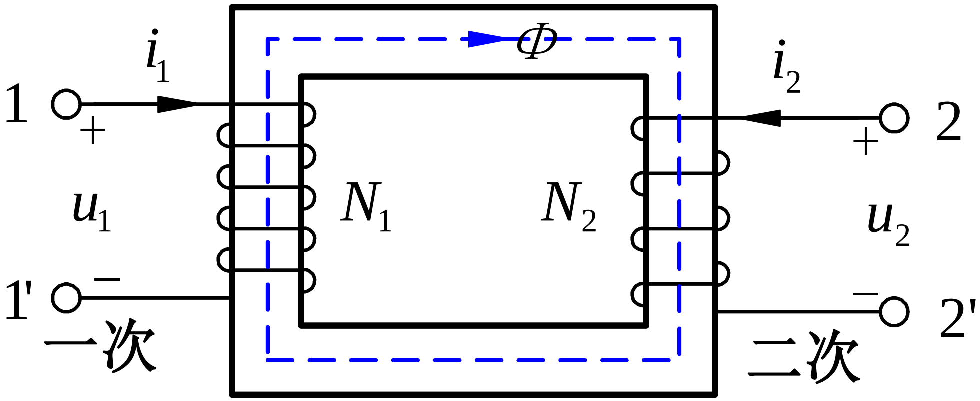
$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = N_1 i_1 + N_2 i_2 = 0 \qquad \Psi_2 = N_2\Phi \qquad u_2 = \frac{\mathrm{d}\Psi_2}{\mathrm{d}t} = N_2\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

变压器端口方程:

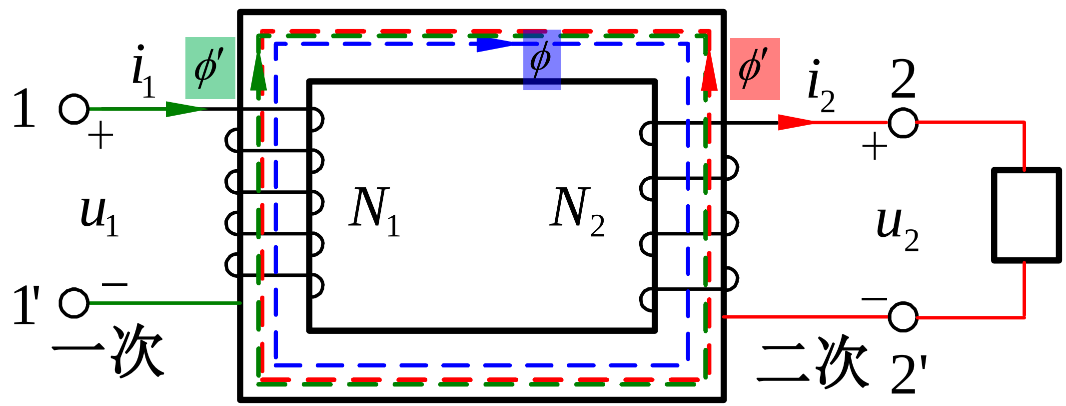
$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} = n \text{ 或 } u_1 = nu_2$$

$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{N_2}{N_1} = -\frac{1}{n} \text{ 或 } i_1 = (-1/n)i_2$$

4.11 理想变压器



变压器空载



变压器带载

4.11 理想变压器

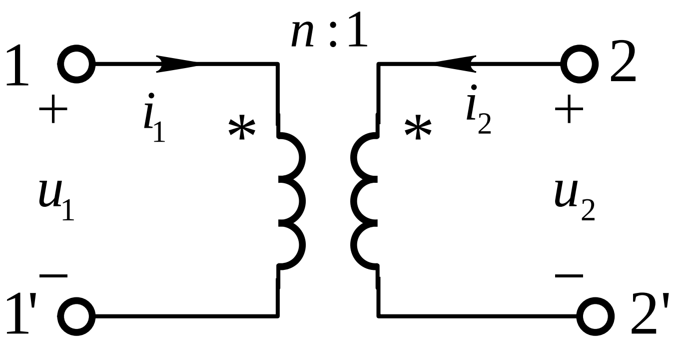


图4.57 理想变压器的符号

$$\frac{u_1}{u_2}=\frac{N_1}{N_2}=n\text{ 或 }u_1=nu_2$$

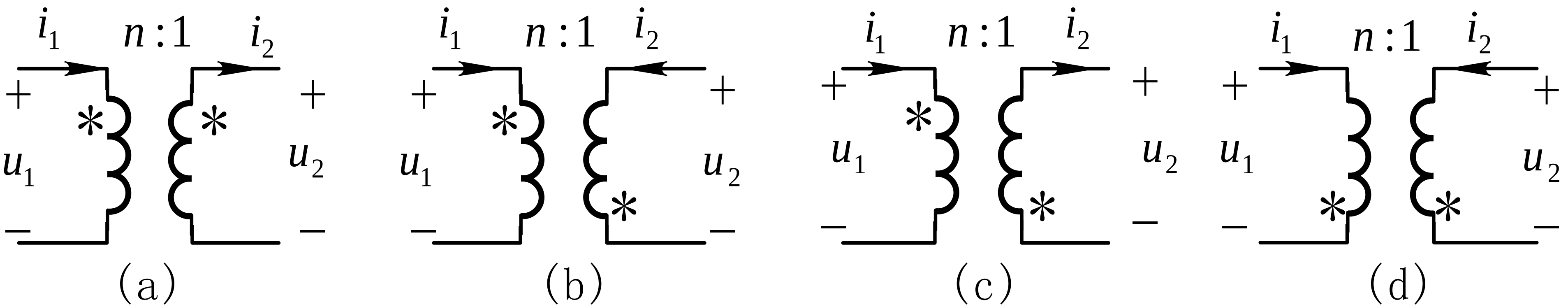
电压u_1、u_2的参考方向相对同名端相同，否则改变方程的正负号

$$\frac{i_1}{i_2}=-\frac{N_2}{N_1}=-\frac{1}{n}\text{ 或 }i_1=(-1/n)i_2$$

电流i_1、i_2的参考方向相对同名端相同，否则改变方程的正负号

4.11 理想变压器

理想变压器方程与 *u*、*i* 的参考方向和两线圈同名端位置有关



对应的特性方程分别为(注意符号)

$$\begin{cases} u_1 = nu_2 \\ i_1 = \dfrac{1}{n} i_2 \end{cases}$$
(a)

$$\begin{cases} u_1 = -nu_2 \\ i_1 = \dfrac{1}{n} i_2 \end{cases}$$
(b)

$$\begin{cases} u_1 = -nu_2 \\ i_1 = -\dfrac{1}{n} i_2 \end{cases}$$
(c)

$$\begin{cases} u_1 = nu_2 \\ i_1 = -\dfrac{1}{n} i_2 \end{cases}$$
(d)

4.11 理想变压器

理想变压器输入的总功率：

$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2 = (nu_2)(-\frac{i_2}{n}) + u_2 i_2 = -u_2 i_2 + u_2 i_2 = 0$$

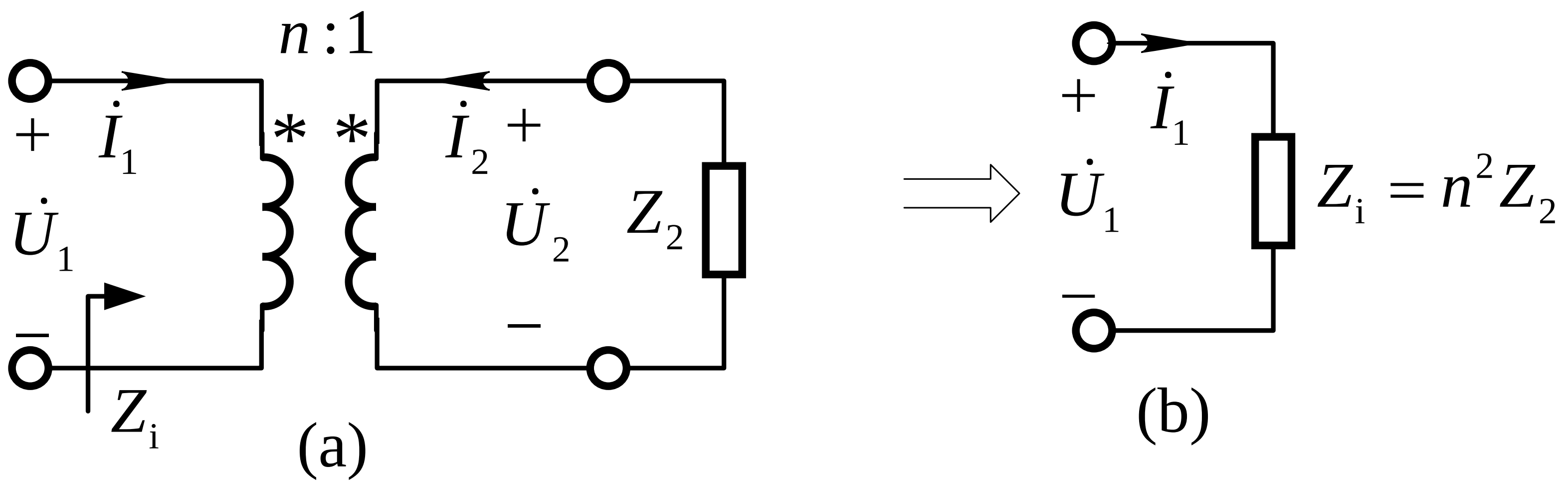
说明： 变压器元件不仅是无源的，而且每一瞬间输入功率等于输出功率，即传输过程中既无能量的损耗，也无能量的存储，属于非能元件。

相量模型：

$$\begin{cases} u_1 = nu_2 \\ i_1 = -\dfrac{1}{n} i_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{U}_1 = n\dot{U}_2 \\ \dot{I}_1 = -\dot{I}_2 / n \end{cases}$$

4.11 理想变压器

变压器可用于变换阻抗

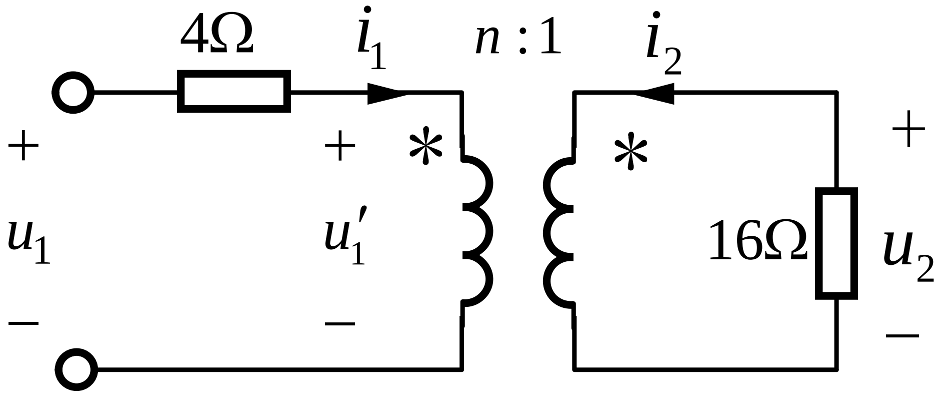


$$Z_i = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{n\dot{U}_2}{-\dot{I}_2 / n} = n^2 Z_2$$

当理想变压器输出端口接阻抗Z_2时，折算到输入端口的等效电阻为n^2Z_2。

[补充4.21]

图示电路中，要求 $u_2 = u_1$,变比**n**应为多少?



【解】由变压器特性方程可知

$$\begin{cases} u_1' = nu_2 \\ i_1 = -\dfrac{1}{n} i_2 = -\dfrac{1}{n} \times \left(-\dfrac{u_2}{16}\right) \end{cases}$$

对左回路应用KVL方程

$$u_1 = 4i_1 + u_1' = 4i_1 + nu_2$$

$$u_2 = u_1$$

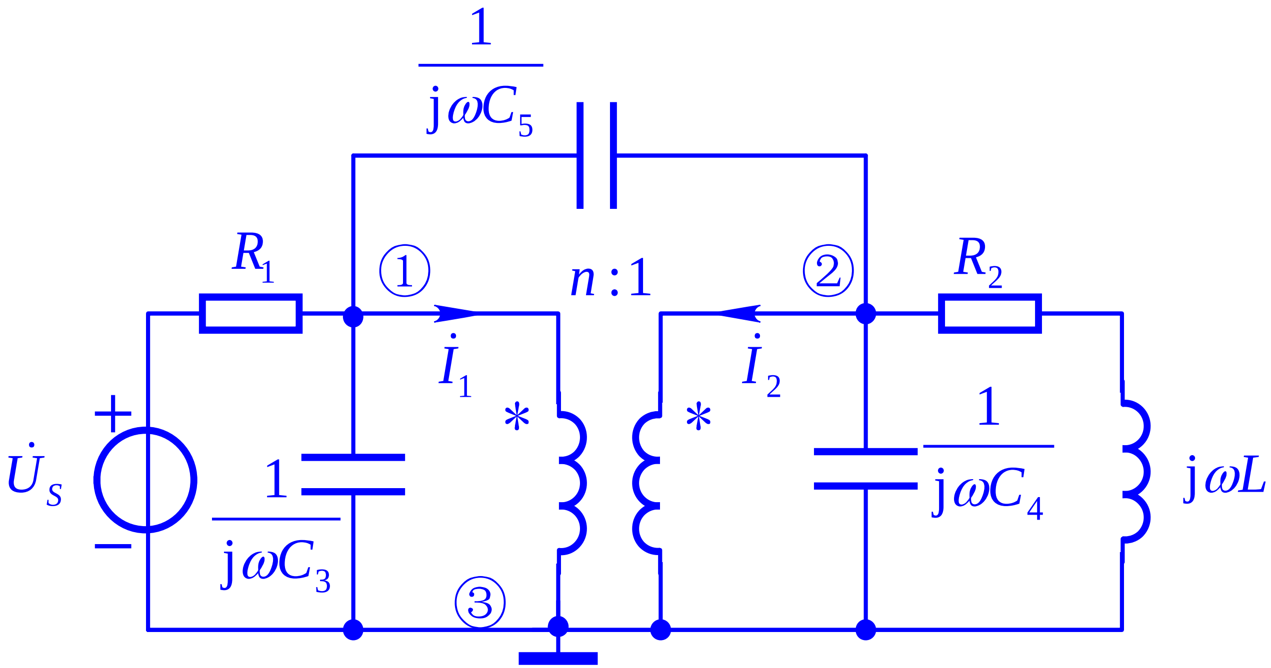
$$u_1 = \left(\frac{1}{4n} + n\right)u_2 = \left(\frac{1}{4n} + n\right)u_1$$

$$\frac{1}{4n} + n = 1$$

$$\Rightarrow n = 0.5$$

[例4.24]

列写图示电路的改进节点电压方程。



理想变压器

特性方程

$$\dot{U}_{n1} = n\dot{U}_{n2}$$

$$\dot{I}_1 = (-1/n)\dot{I}_2$$

【解】

$$(\frac{1}{R_1} + j\omega C_3 + j\omega C_5)\dot{U}_{n1} - j\omega C_5 \dot{U}_{n2} + \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_S}{R_1}$$

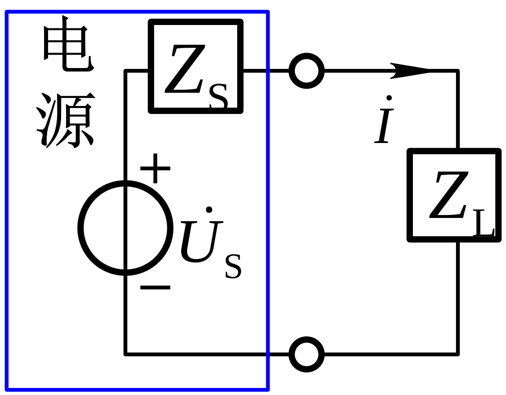
$$-j\omega C_5 \dot{U}_{n1} + (\frac{1}{R_2 + j\omega L} + j\omega C_4 + j\omega C_5)\dot{U}_{n2} + \dot{I}_2 = 0$$

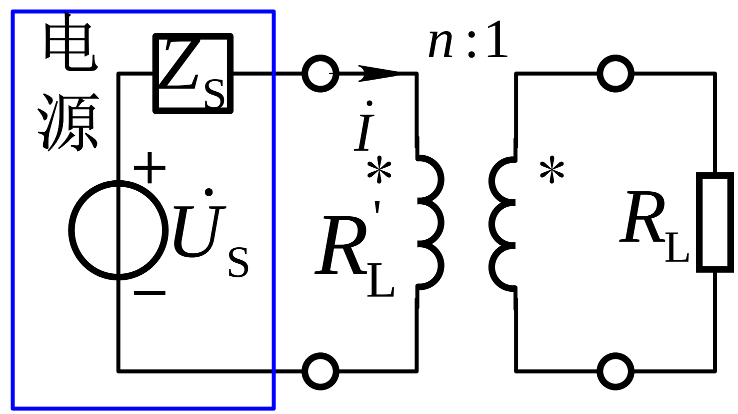
[补充4.22]

设电路中电源电压 $\dot{U}_S = 12\angle 0^\circ \text{ V}$ 、内阻抗 $Z_S = (3 + j4)\Omega$

(1)图(a)中负载阻抗Z_L可任意改变，求此电源可发出的最大功率。

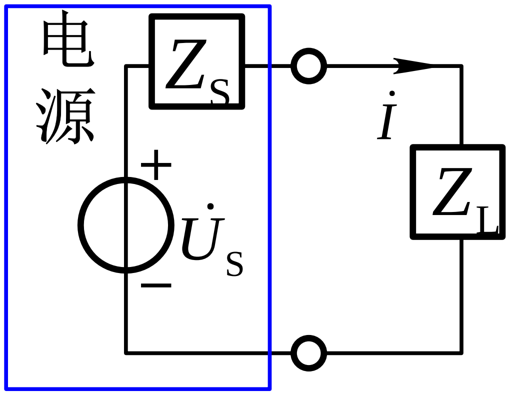
(2) 图(b)中通过理想变压器接一电阻负载R_L=20Ω，问变比*n*为多少，电源可发出最大功率，求此最大功率。





(b)

[补充4.22]

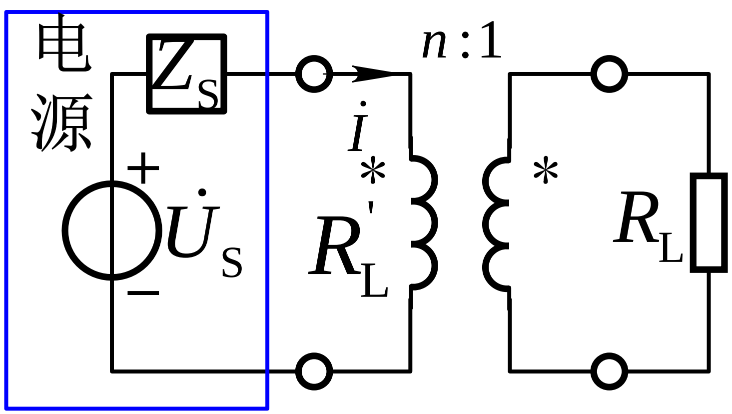


(a)

(1) 当 $Z_L = \overset{*}{Z}_S = (3 - j4)\Omega$

电源发出最大功率

$$P_{max} = \frac{U_S^2}{4R_L} = \frac{12^2}{4\times 3}\mathrm{W} = 12\mathrm{W}$$



(b)

(2)图(b)中R_L折算到理想变压器的一次侧为

$$R_L' = n^2 R_L$$

当 $R_L' = n^2 R_L = |Z_S|$ 时，

负载吸收功率即为电源发出最大功率

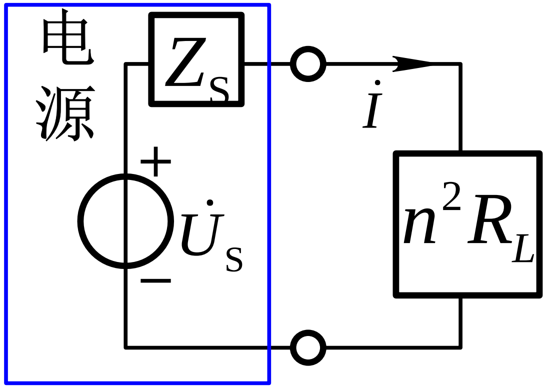
[补充4.22]

$$n^2 R_{\mathrm{L}} = \sqrt{(3\Omega)^2 + (4\Omega)^2} = 5\Omega$$

$$n = \sqrt{5\Omega / 20\Omega} = 1/2$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{\mathrm{S}}}{Z_{\mathrm{S}} + n^2 R_{\mathrm{L}}} = \frac{12\angle 0^\circ\ \mathrm{V}}{(3 + \mathrm{j}4)\Omega + 20\Omega / 4}$$

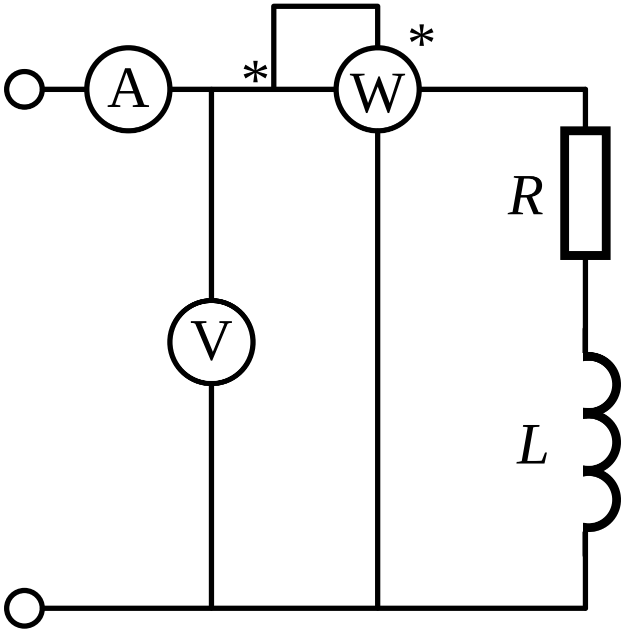
$$= \frac{12\mathrm{V}}{(8 + \mathrm{j}4)\Omega} = 1.34\angle -26.6^\circ\ \mathrm{A}$$

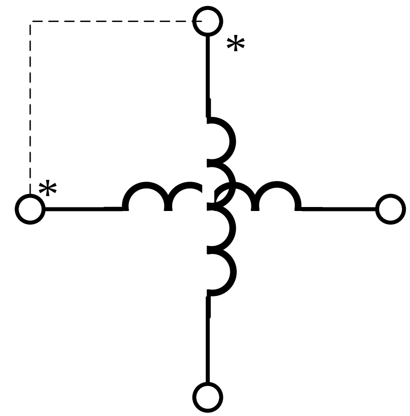


电源发出的最大功率

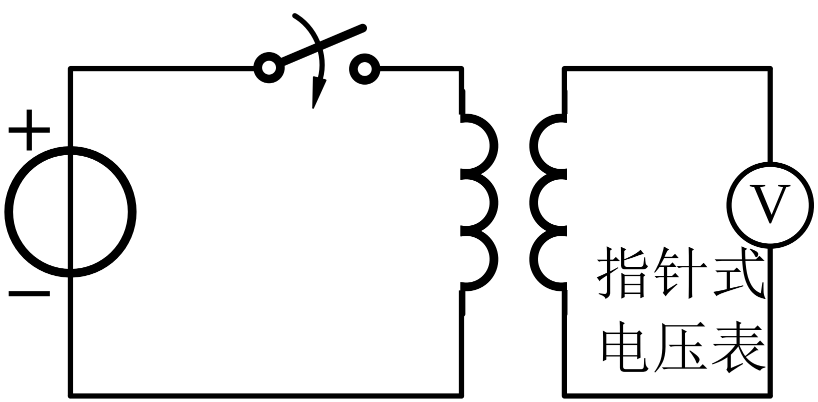
$$P_{\max} = I^2 n^2 R_{\mathrm{L}} = (1.34\mathrm{A})^2 \times 20\Omega / 4 = 9\mathrm{W}$$

知识补充





实验法测同名端



本章小结

1 正弦量基本概念 $f(t)=A_m\cos(\omega t+\psi)$

振幅　角频率　初相位

有效值 $I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt}$　　$I=I_m/\sqrt{2}=0.707I_m$

相位差 $\varphi=(\omega t+\psi_u)-(\omega t+\psi_i)=\psi_u-\psi_i$

参考正弦量 $f(t)=A_m\cos\omega t$

正弦量与相量 $f(t)=A_m\cos(\omega t+\psi)$

$$\rightleftharpoons \quad \dot{A}_m=A_m e^{j\psi}=A_m\angle\psi$$

本章小结

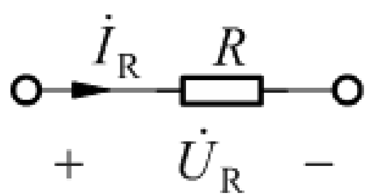
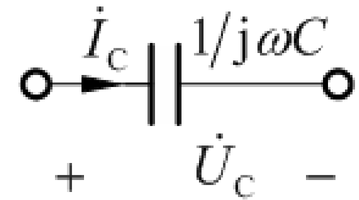
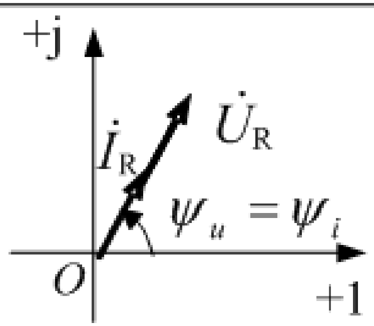
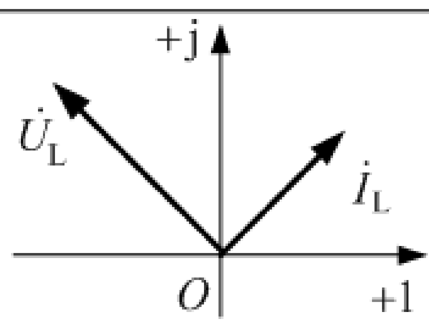
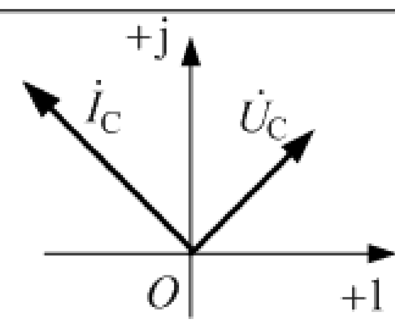
2 电路的相量形式

（1）基尔霍夫定律的相量形式

① **KCL:** $\sum \dot{I}_{\mathrm{m}} = 0$ 或 $\sum \dot{I} = 0$

② **KVL:** $\sum \dot{U}_{\mathrm{m}} = 0$ 或 $\sum \dot{U} = 0$

（2）RLC元件上电压、电流关系

电路元件	电阻元件	电感元件	电容元件
时域VCR	$u_R = Ri_R$	$u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$	$i_C = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$
相量VCR	$\dot{U}_R = R\dot{I}_R$	$\dot{U}_L = \mathrm{j}\omega L\dot{I}_L$	$\dot{U}_C = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}_C$
相量模型			
有效值关系	$U_R = RI_R$	$U_L = \omega LI_L = X_LI_L$	$U_C = X_CI_C$
相位关系	$\psi_u - \psi_i = 0$	$\psi_u - \psi_i = 90^\circ$	$\psi_u - \psi_i = -90^\circ$
相量图			

本章小结

3 阻抗和导纳

阻抗 Z 等于端口电压相量与电流向量之比，即

$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\frac{U\angle\psi_u}{I\angle\psi_i}=\frac{U}{I}\angle(\psi_u-\psi_i)=|Z|\angle\varphi$$

导纳Y等于端口电流向量与电压相量之比，即

$$Y=\frac{\dot{I}}{\dot{U}}=\frac{I\angle\psi_i}{U\angle\psi_u}=\frac{I}{U}\angle(\psi_i-\psi_u)=|Y|\angle\varphi_Y$$

Y 与 Z 的等效

$$Y=\frac{1}{Z}=\frac{1}{R+\mathrm{j}X}=\frac{R}{R^2+X^2}-\mathrm{j}\frac{X}{R^2+X^2}$$

本章小结

4 正弦稳态电路分析步骤：

(1) 将电阻、电感和电容用阻抗或导纳表示；

(2) 将激励源、支路电压和电流用相量表示；

(3) 在电路相量模型中用线性直流电路的分析方法（回路法，节点法，电路定理）求解响应的相量；

(4) 根据相量与正弦量的对应关系，得到响应的正弦函数表达式。

本章小结

5 正弦稳态电路的功率

$$u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\psi_u);\quad i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\psi_i)$$

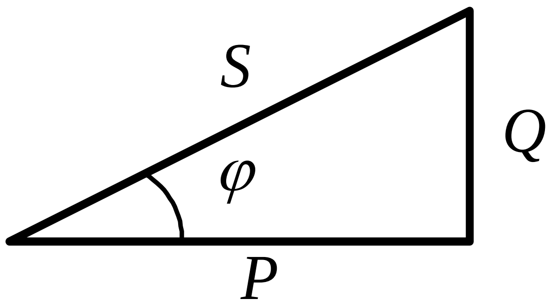
瞬时功率 $p(t)=u(t)\times i(t)$

有功功率 $P=UI\cos\varphi=UI\lambda$

无功功率 $Q=UI\sin\varphi$

视在功率 $S=UI=\sqrt{P^2+Q^2}$

复功率 $\tilde{S}=P+\mathrm{j}Q=UI\cos\varphi+\mathrm{j}UI\sin\varphi=\dot{U}\overset{*}{I}$



功率三角形

本章小结

6 最大功率传输定理

负载可以任意改变时，它获得最大功率的条件是

$$Z_L = R_L + \mathrm{j}X_L = R_S - \mathrm{j}X_S$$

获得最大功率为

$$P_{L\max} = \frac{U_S^2}{4R_S}$$

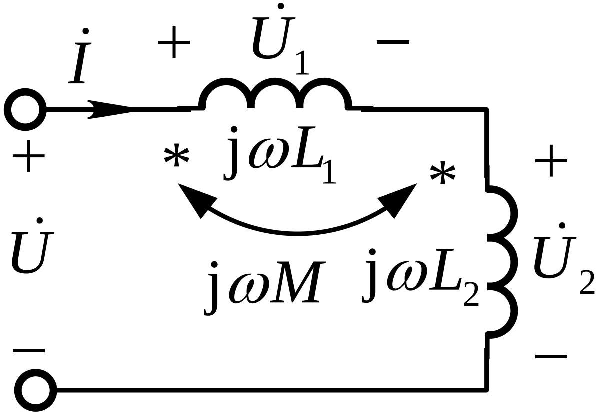
7 耦合电感

$$\begin{cases} u_1 = L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u_2 = M \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

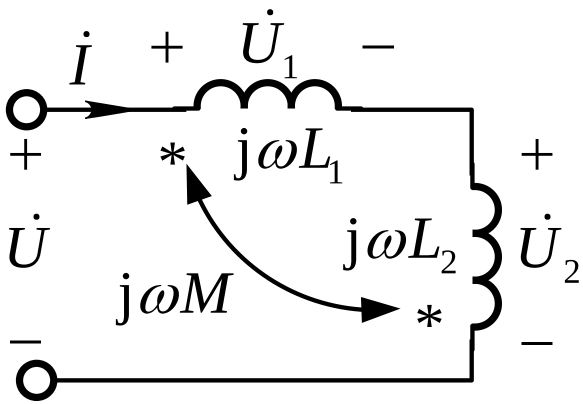
$$\dot{U}_1 = \mathrm{j}\omega L_1 \dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega M \dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = \mathrm{j}\omega M \dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega L_2 \dot{I}_2$$

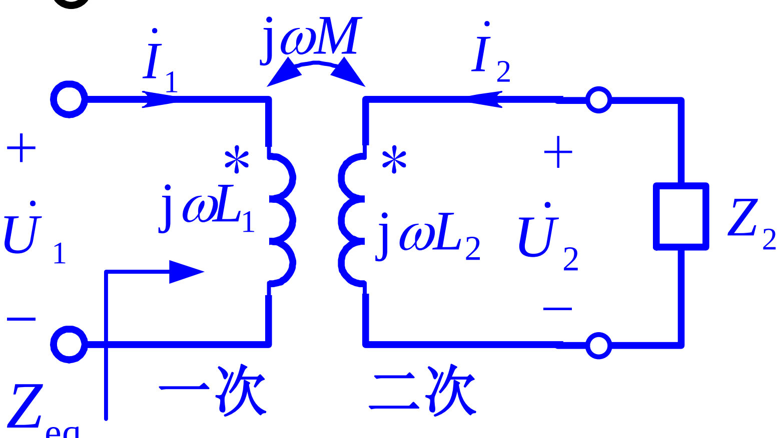
本章小结



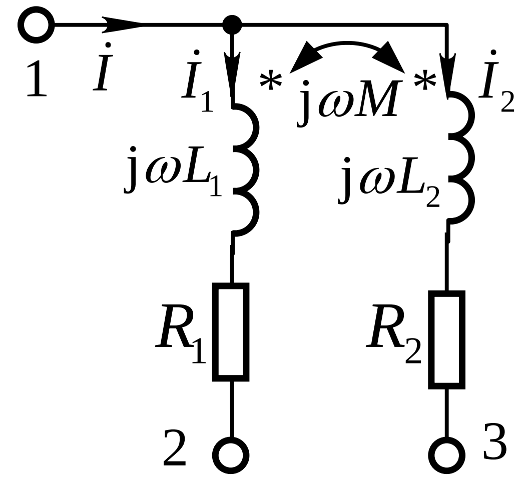
$\dot{I}$
$+\ \dot{U}_1\ -$
$j\omega L_1$
$j\omega M$
$j\omega L_2$
$+\ \dot{U}\ -$
$+\ \dot{U}_2\ -$



$\dot{I}$
$+\ \dot{U}_1\ -$
$j\omega L_1$
$j\omega M$
$j\omega L_2$
$+\ \dot{U}\ -$
$+\ \dot{U}_2\ -$

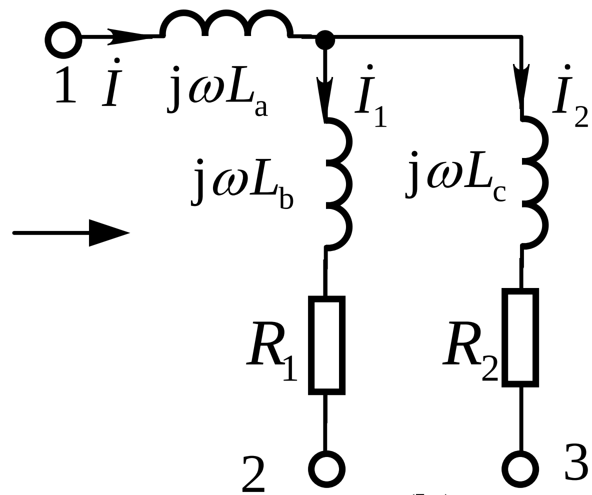


$\dot{I}_1$
$j\omega M$
$\dot{I}_2$
$+\ \dot{U}_1\ -$
$j\omega L_1$
$j\omega L_2$
$+\ \dot{U}_2\ -$
Z_2
Z_{eq}
一次
二次



1
$\dot{I}$
$\dot{I}_1$
$j\omega M$
$\dot{I}_2$
$j\omega L_1$
$j\omega L_2$
R_1
R_2
2
3

(a)



1
$\dot{I}$
$j\omega L_a$
$\dot{I}_1$
$\dot{I}_2$
$j\omega L_b$
$j\omega L_c$
R_1
R_2
2
3

(b)

本章小结

8 理想变压器

$$\begin{cases} u_1 = nu_2 \\ i_1 = -i_2 / n \end{cases}$$

变压、变流阻抗变换器

$$Z_\mathrm{i} = n^2 Z_2$$

谢　　谢！