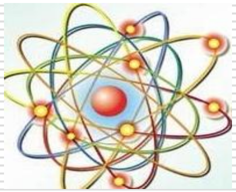
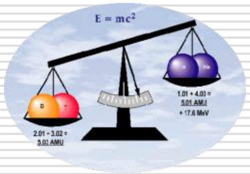




第4章　正弦电流电路

开课教师：　王灿

开课单位：机电学院--电气工程学科

4.3 基尔霍夫定律的相量形式

回顾：1. 复数的表示法

设*A*是一个复数，可表示为

实部　虚部

直角坐标式　$A = a_1 + \mathrm{j}a_2$

模　辐角

极坐标式　$A = |A|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = |A|(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)$

简写为　$A = |A|\angle\theta$

比较有　$a_1 = |A|\cos\theta$　$|A| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$a_2 = |A|\sin\theta$　$\theta = \arctan(a_2/a_1)$

4.3 基尔霍夫定律的相量形式

回顾：2. 正弦量的相量表示法

正弦量一般表达式为: $f(t) = A_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \psi)$

设一复数为 $A_{\mathrm{m}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\psi)}$ 根据欧拉公式得

$$A_{\mathrm{m}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\psi)} = A_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \psi) + \mathrm{j} A_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \psi)$$

得 $f(t) = A_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \psi) = \mathrm{Re}[A_{\mathrm{m}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\psi)}]$

$$= \mathrm{Re}[A_{\mathrm{m}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \mathrm{Re}[\dot{A}_{\mathrm{m}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

其中 $\underbrace{\dot{A}_{\mathrm{m}}}_{\text{最大值相量}} = \underbrace{A_{\mathrm{m}}}_{\text{正弦量振幅}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\underbrace{\psi}_{\text{正弦量初相}}} = A_{\mathrm{m}} \angle \psi$

4.3 基尔霍夫定律的相量形式

回顾：2. 正弦量的相量表示法

$$f(t) = \mathrm{Re}[A_{\mathrm{m}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \mathrm{Re}[\dot{A}_{\mathrm{m}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

一个正弦量 $f(t) = A_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \psi)$ 能够唯一地确定其对应的相量 $\dot{A}_{\mathrm{m}}$

$$f(t) \rightleftharpoons \dot{A}_{\mathrm{m}}$$

反之，若已知 $\dot{A}_{\mathrm{m}}$ 和角频率 ω，也能唯一地确定 $\dot{A}_{\mathrm{m}}$ 所代表的正弦量 $f(t) = A_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \psi)$

4.3 基尔霍夫定律的相量形式

回顾：3. 交流（正弦）电路

$$u_S(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi)$$

对于一个正弦电路，当电路中含有动态元件时，通常会关注：1）.稳态解；2）.暂态解（过渡过程）。

若要求1），则需列写电路的微分方程。

正弦电流电路 —分析→ 建立电路方程(含微积分方程) —求解→ 得时域响应表达式

正弦电流电路 —分析→ 建立电路方程(代数方程) —求解→ 得相量形式表达式

4.3 基尔霍夫定律的相量形式

基本要求：透彻理解相量形式的基尔霍夫定律方程，比较与线性直流电路相应方程的异同。

基尔霍夫电流定律KCL的相量形式：

基尔霍夫电流定律方程的时域形式为 $\sum i = 0$

即：在集中电路中，[redacted]流进（或流出）节点端子电流的相量代数和恒等于零。

当方程中各电流均为同频率的正弦量时，根据相量的唯一性和线性性质，得基尔霍夫电流定律方程的相量形式

$$\sum \dot{I}_{\mathrm{m}} = 0 \text{ 或 } \sum \dot{I} = 0$$

$$\dot{I}_{\mathrm{m}} = I_{\mathrm{m}} \angle \psi_i$$

$$\dot{I} = I \angle \psi_i$$

4.3 基尔霍夫定律的相量形式

证明基尔霍夫电流定律KCL的相量形式：

假设某电路，根据**KCL** $i_1=i_2+i_3$，若电流均为正弦量

$$\begin{cases} i_1=\sqrt{2}\mathrm{I}_1\cos(\omega \mathrm{t}+\varphi_1)=\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\mathrm{I}_1 e^{j(\omega \mathrm{t}+\varphi_1)}\right] \\ i_2=\sqrt{2}\mathrm{I}_2\cos(\omega \mathrm{t}+\varphi_2)=\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\mathrm{I}_2 e^{j(\omega \mathrm{t}+\varphi_2)}\right] \\ i_3=\sqrt{2}\mathrm{I}_3\cos(\omega \mathrm{t}+\varphi_3)=\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\mathrm{I}_3 e^{j(\omega \mathrm{t}+\varphi_3)}\right] \end{cases}$$

$$\mathrm{Re}\left[e^{j\omega \mathrm{t}}\left(\mathrm{I}_1 e^{j\varphi_1}-\mathrm{I}_2 e^{j\varphi_2}-\mathrm{I}_3 e^{j\varphi_3}\right)\right]$$

$$=\mathrm{Re}\left[e^{j\omega \mathrm{t}}\left(\dot{\mathrm{I}}_1-\dot{\mathrm{I}}_2-\dot{\mathrm{I}}_3\right)\right]=0$$

对所有时间 ***t*** 成立，可得：$\dot{\mathrm{I}}_1-\dot{\mathrm{I}}_2-\dot{\mathrm{I}}_3=0$

$$\dot{\mathrm{I}}_1=\dot{\mathrm{I}}_2+\dot{\mathrm{I}}_3$$

4.3 基尔霍夫定律的相量形式

基尔霍夫电压定律KVL的相量形式：

基尔霍夫电压定律方程的时域形式为 $\sum u = 0$

在集中参数电路中，任意时刻回路全部元件端对的电压代数和恒等于零。

相量形式：

$$\sum \dot{U}_{\mathrm{m}} = 0 \text{ 或 } \sum \dot{U} = 0$$

在集中参数正弦电流电路中，沿任一回路全部元件端对的电压相量代数和恒等于零。

[例4.5]

图 (a) 已知 $u_1 = 6\sqrt{2}\cos(\omega t + 30°)$ V，$u_2 = 4\sqrt{2}\cos(\omega t + 60°)$ V
求节点2与3之间的电压 u_{23}， 并画出电压相量图。

设代表电压u_1、u_2、u_{23}的相量分别为 $\dot{U}_1$、$\dot{U}_2$、$\dot{U}_{23}$

【解】

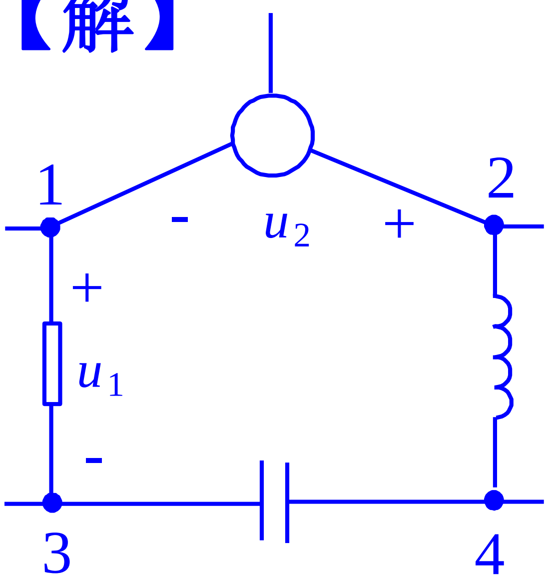


图 a

$$\dot{U}_1 = 6\angle 30^\circ \text{ V} \quad 、\quad \dot{U}_2 = 4\angle 60^\circ \text{ V}$$

沿回路1231列相量形式的KVL方程为

$$\dot{U}_{23} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 6\angle 30^\circ + 4\angle 60^\circ$$

$$\approx (5.2 + \text{j}3) + (2 + \text{j}3.5) = 9.7\angle 42.1^\circ$$

$$u_{23} = 9.7\sqrt{2}\cos(\omega t + 42.1^\circ) \text{ V}$$

[例4.5]

$$\dot{U}_1 = 6\angle 30^\circ \text{V}=5.2+\text{j}3 \quad 、\quad \dot{U}_2 = 4\angle 60^\circ \text{V}=2+\text{j}3.5$$

$$\dot{U}_{23} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 9.7\angle 42.1^\circ = 7.2 + \text{j}6.5$$

电压相量图

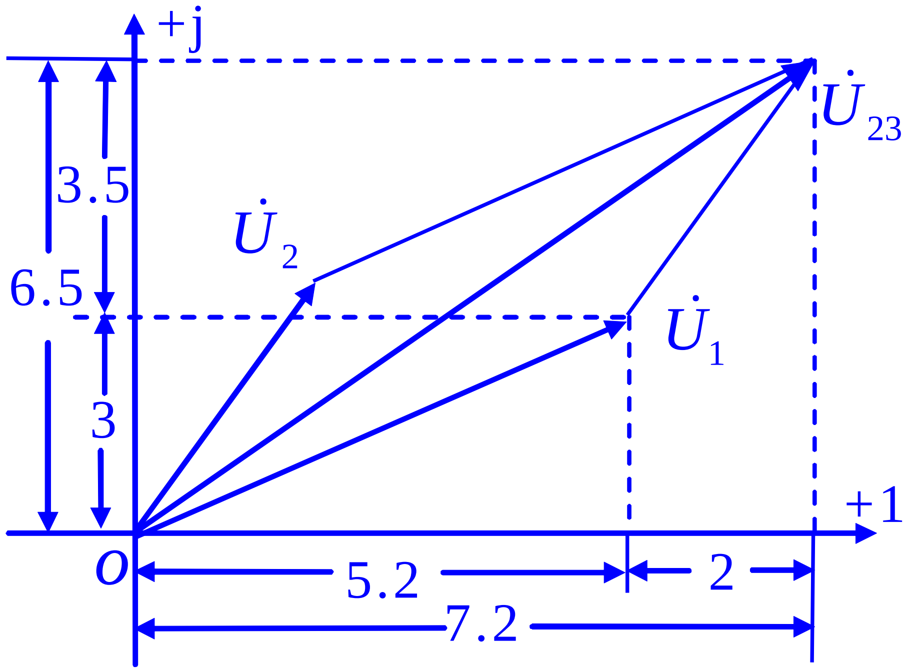
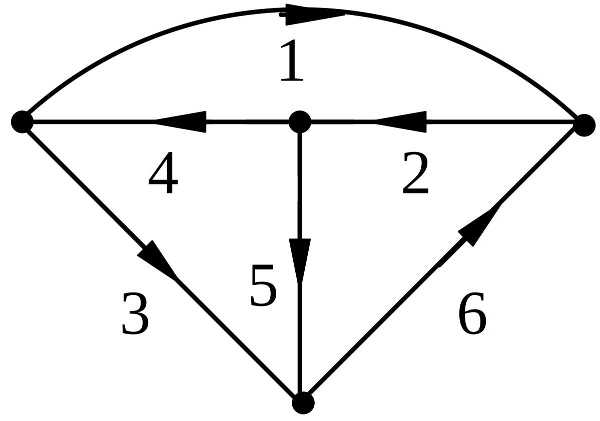


图 b 用相量图求 $\dot{U}_1$ 和 $\dot{U}_2$ 之和

[补充4.3]

$i_1 = \sqrt{2}\cos(\omega t - 30°)\text{A},\ i_2 = 2\sqrt{2}\sin(\omega t + 45°)\text{A},\ i_3 = -3\sqrt{2}\cos(\omega t + 60°)\text{A}$

求i_4，i_5，i_6。



【解】$\dot{I}_1 = 1\angle -30°\text{A} = (\frac{\sqrt{3}}{2} - \text{j}\frac{1}{2})\text{A}$

$$\dot{I}_2 = 2\angle(45° - 90°)\text{A} = (\sqrt{2} - \text{j}\sqrt{2})\text{A}$$

$$\dot{I}_3 = -3\angle 60°\text{A} = (-1.5 - \text{j}1.5\sqrt{3})\text{A}$$

$$\dot{I}_4 = \dot{I}_1 + \dot{I}_3 = (-0.634 - \text{j}3.098)\text{A} = 3.162\angle -101.6°\text{A}$$

$$i_4 = 3.162\sqrt{2}\cos(\omega t - 101.6°)\text{A}$$

$$\dot{I}_5 = \dot{I}_2 - \dot{I}_4 = \dot{I}_2 - \dot{I}_1 - \dot{I}_3 = (2.048 + \text{j}1.684)\text{A} = 2.679\angle 38.94°\text{A}$$

$$i_5 = 2.679\sqrt{2}\cos(\omega t + 38.94°)\text{A}$$

$$\dot{I}_6 = \dot{I}_2 - \dot{I}_1 = (0.548 - \text{j}0.914)\text{A} = 1.066\angle -59.06°\text{A}$$

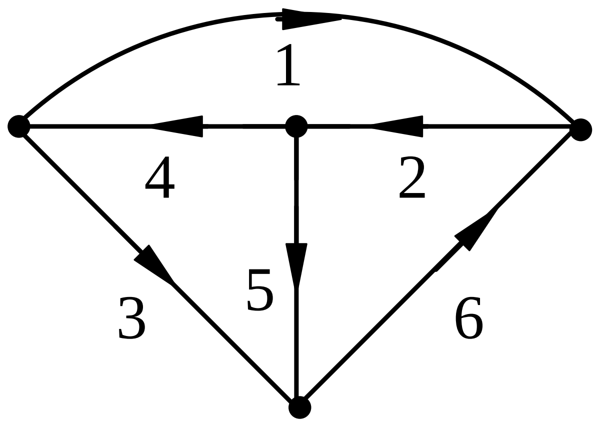
$$i_6 = 1.066\sqrt{2}\cos(\omega t - 59.06°)\text{A}$$

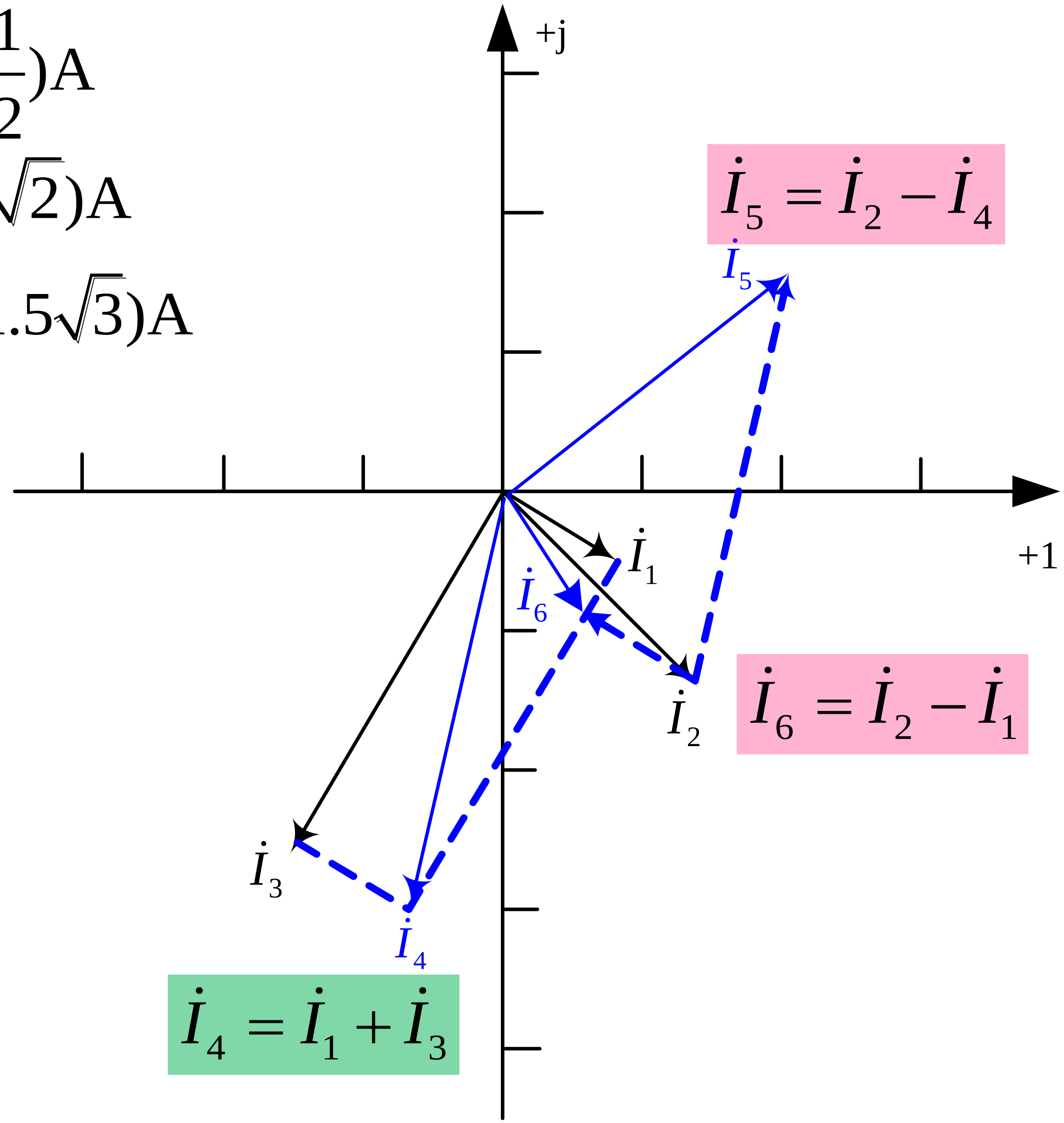
[补充4.3]

$$\dot{I}_1 = 1\angle -30^\circ \text{A} = (\frac{\sqrt{3}}{2} - \text{j}\frac{1}{2})\text{A}$$

$$\dot{I}_2 = 2\angle -45^\circ \text{A} = (\sqrt{2} - \text{j}\sqrt{2})\text{A}$$

$$\dot{I}_3 = -3\angle 60^\circ \text{A} = (-1.5 - \text{j}1.5\sqrt{3})\text{A}$$



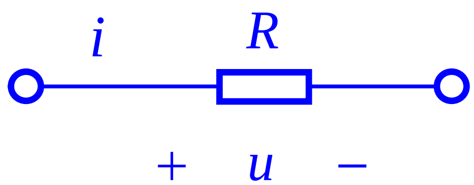


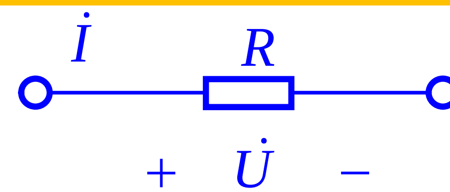
4.4 RLC元件上电压与电流的相量关系

基本要求：熟练掌握相量形式的元件方程，理解元件方程的时域形式与相量形式的对应关系。

1. 电阻元件

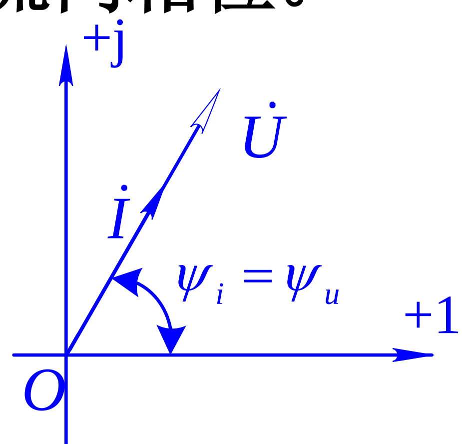
频域 $\dot{U}_{\mathrm{m}} = R\dot{I}_{\mathrm{m}}$ 或 $\dot{U} = R\dot{I}$

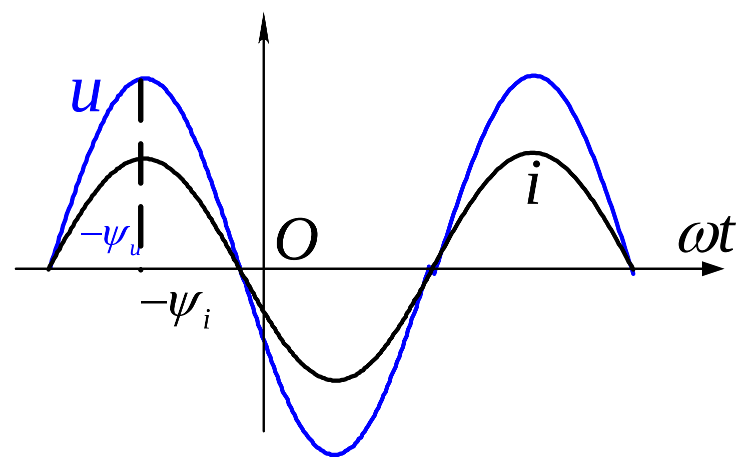




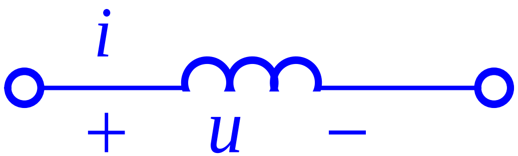
时域 $u = Ri$　　有效值 $U = RI$　　相位 $\psi_u = \psi_i$

在电阻R上电压电流有效值(或振幅)之比等于电阻；电压与电流同相位。





2. 电感元件



微分

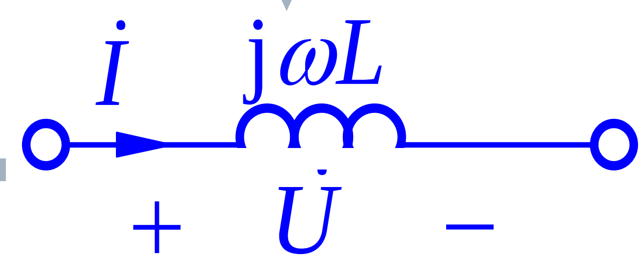
性质

$$\dot{U} = \mathrm{j}\omega L\dot{I} = \mathrm{j}X_L\dot{I}$$

时域 $u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

$X_L = \omega L$ 称为感抗

单位为Ω



电感的相量电路模型

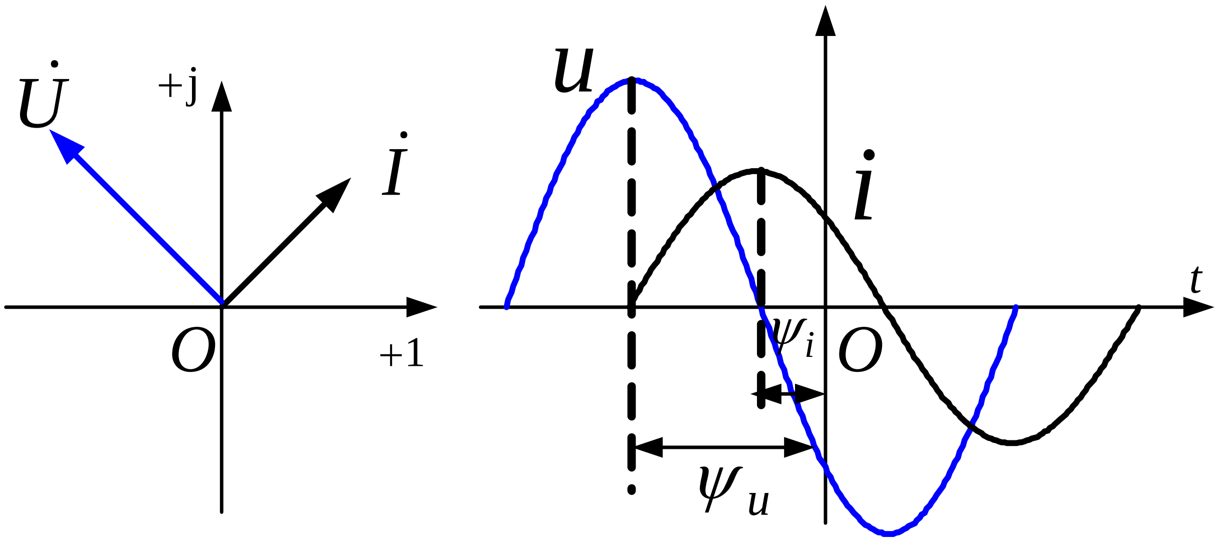
有效值 $U = \omega LI$

相位 $\psi_u = \psi_i + \dfrac{\pi}{2}$

结论：电感上电压比电流越前 90°；电压、电流有效值之比等于感抗 X_L。

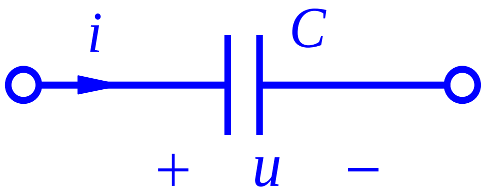
2. 电感元件

相量图和波形图



电感上电压、电流相量图与波形

3. 电容元件



微分

性质

时域 $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$

$$\dot{I} = \mathrm{j}\omega C\dot{U}$$

频域

$$\dot{U} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\dot{I} = \mathrm{j}X_C\dot{I}$$

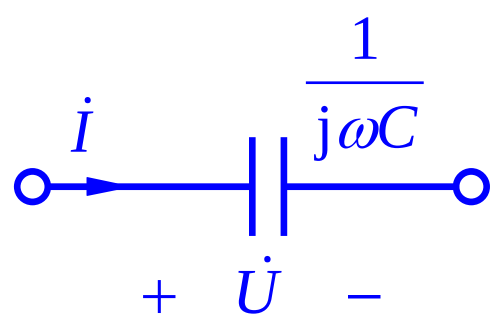
$$X_C = -\frac{1}{\omega C}$$

称为容抗

单位为Ω

有效值 $U = \dfrac{I}{\omega C} = |X_C|I$

相位 $\psi_u = \psi_i - 90^{\circ}$

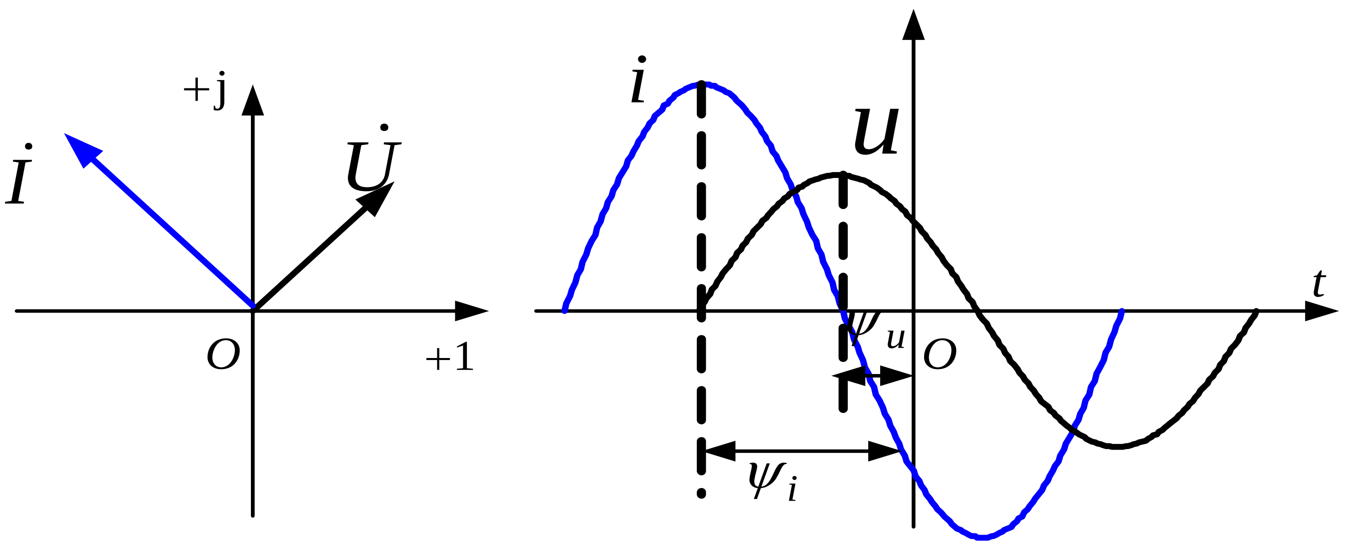


电容的相量电路模型

3. 电容元件

$$\dot{U} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}$$

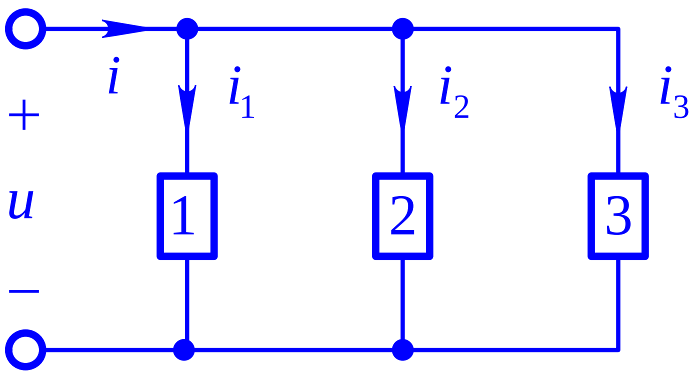
结论：电压、电流有效值(或振幅)之比等于容抗的绝对值；电压比电流滞后90°。



电容上电压、电流相量图与波形

[补充4.1]

已知图示电路 $u=100\cos(\omega t+10°)$V、$i_1=2\cos(\omega t+100°)$A、$i_2=-4\cos(\omega t+190°)$A、$i_3=5\sin(\omega t+10°)$ A。求电压越前于电流的相位差，并判断对应的元件。



【解】 将i_2和i_3改写为余弦标准式

$$i_2=-4\cos(\omega t+190°)\text{A}$$
$$=4\cos(\omega t+190°-180°)\text{A}$$
$$=4\cos(\omega t+10°)\text{A}$$

$$i_3=5\sin(\omega t+10°)\text{A}$$
$$=5\cos(\omega t+10°-90°)\text{A}$$
$$=5\cos(\omega t-80°)\text{A}$$

初相位

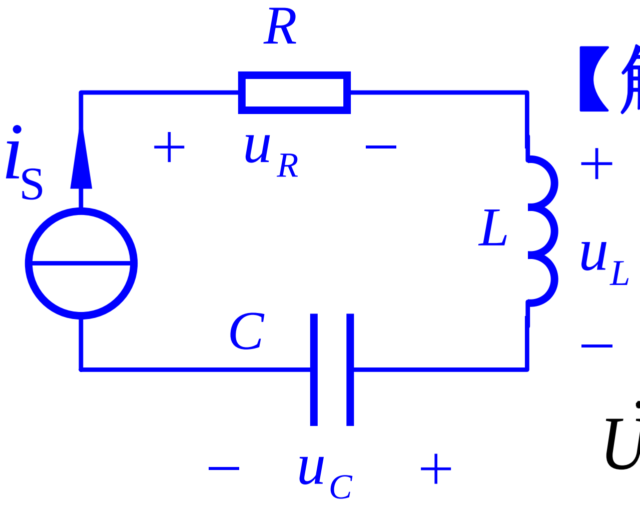
$$\psi_u=10°,\ \psi_{i_1}=100°$$
$$\psi_{i_2}=10°,\ \psi_{i_3}=-80°$$

相位差

$$\varphi_1=\psi_u-\psi_{i_1}=-90°$$
$$\varphi_2=\psi_u-\psi_{i_2}=0°$$
$$\varphi_3=\psi_u-\psi_{i_3}=90°$$

[例4.6]

已知图示电路 $i_S = 0.2\cos(\omega t + 45°)$ A，$\omega = 10$ rad/s，$R = 20\Omega$，L=3H，C=5×10^{-3}F。试求电压 u_R、u_L 和 u_C。



【解】 $i_S \rightarrow \dot{I}_{mS} = 0.2\angle 45^{\circ}$ A

$$X_L = \omega L = 30\Omega$$

$$X_C = -1/(\omega C) = -20\Omega$$

$$\dot{U}_{mR} = R\dot{I}_{mS} = 20 \times 0.2\angle 45^{\circ}\text{ V} = 4\angle 45^{\circ}\text{ V}$$

$$u_R = 4\cos(\omega t + 45^{\circ})\text{ V}$$

$$\dot{U}_{mL} = \mathrm{j}X_L\dot{I}_{mS} = \mathrm{j}30 \times 0.2\angle 45^{\circ}\text{ V} = 6\angle 135^{\circ}\text{ V}$$

$$u_L = 6\cos(\omega t + 135^{\circ})\text{ V}$$

$$\dot{U}_{mC} = \mathrm{j}X_C\dot{I}_{mS} = -\mathrm{j}20 \times 0.2\angle 45^{\circ}\text{ V} = 4\angle -45^{\circ}\text{ V}$$

$$u_C = 4\cos(\omega t - 45^{\circ})\text{ V}$$

谢　　谢！