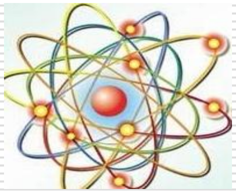
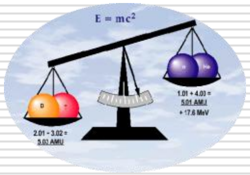




第4章 正弦电流电路

开课教师： 王灿

开课单位：机电学院--电气工程学科

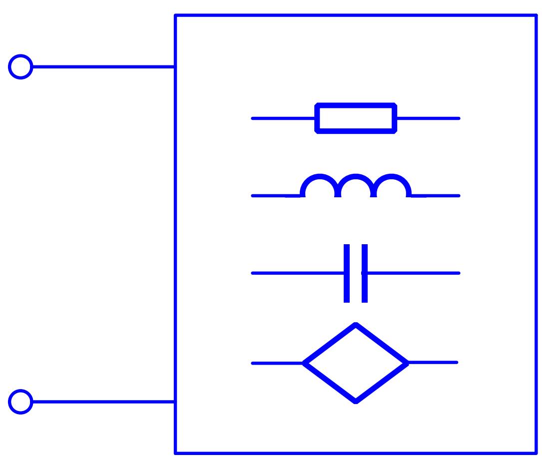
4.5 阻抗和导纳

基本要求：透彻理解阻抗和导纳的概念及引入阻抗和导纳的理论意义。

直流电路中无源一端口网络（仅由线性电阻和受控源组成的电路）对外可以等效成

电阻 ***R***

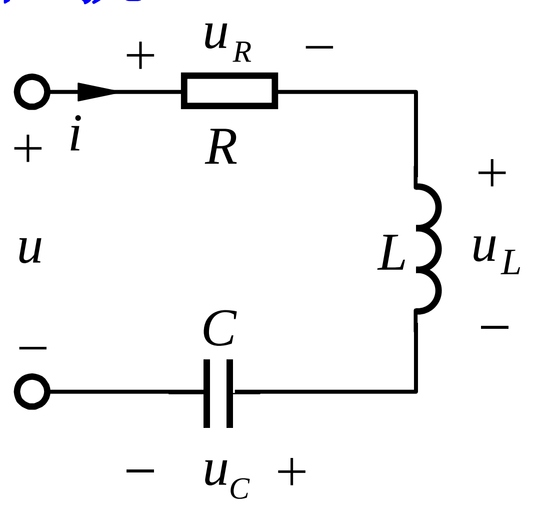
不含独立源的线性交流一端口网络：



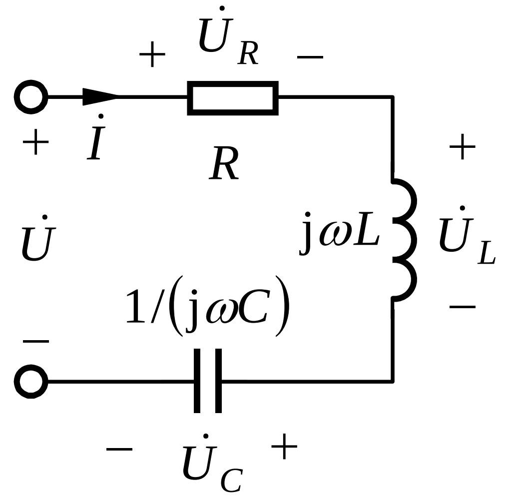
对外的等效电路是什么？

4.5 阻抗和导纳

1. 阻抗



时域模型



相量模型

根据KVL的相量形式，端口电压相量方程为

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = R\dot{I} + \mathrm{j}\omega L\dot{I} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}$$

$$= [R + \mathrm{j}(\omega L - \frac{1}{\omega C})]\dot{I} = Z\,\dot{I}$$

4.5 阻抗和导纳

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = Z\,\dot{I}$$ → 相量形式的欧姆定律

$$Z = R + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + \mathrm{j}(X_L + X_C) = R + \mathrm{j}X = |Z|\angle\varphi$$

阻抗

电阻

电抗

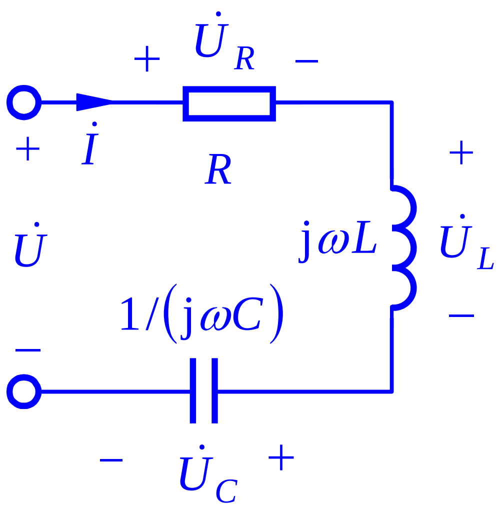
$$X = X_L + X_C$$

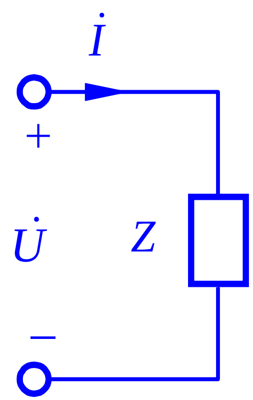
阻抗模

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L + X_C)^2}$$

阻抗角

$$\varphi = \arctan\frac{X_L + X_C}{R}$$





4.5 阻抗和导纳

又根据 $Z=\dfrac{\dot{U}}{\dot{I}}=\dfrac{U\angle\psi_u}{I\angle\psi_i}=\dfrac{U}{I}\angle(\psi_u-\psi_i)=|Z|\angle\varphi$

$\dfrac{U}{I}=|Z|$ $\boxed{\psi_u-\psi_i=\varphi}$ $\varphi=\arctan\dfrac{X_L+X_C}{R}$

$X_L>|X_C|$ 时阻抗角 $\boxed{\varphi>0}$

电压 ***u*** 越前于电流 ***i***，***R***、***L***、***C***串联电路呈现感性；

$X_L<|X_C|$ 时阻抗角 $\boxed{\varphi<0}$

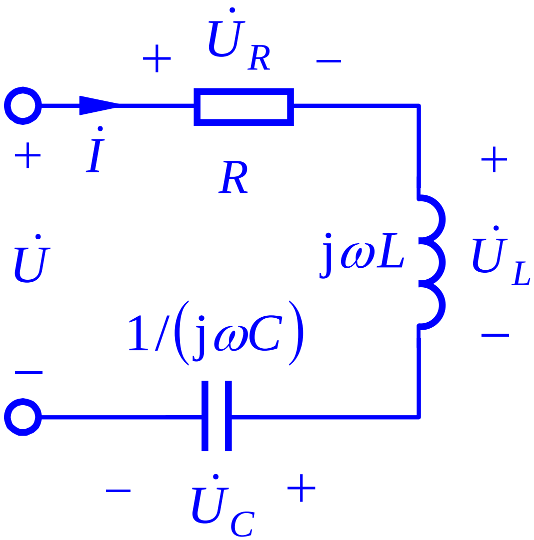
电压 ***u*** 滞后于电流 ***i***，***R***、***L***、***C***串联电路呈现容性；

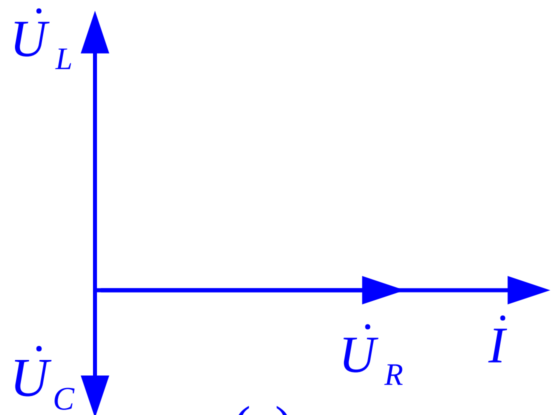
$X_L=|X_C|$ 时阻抗角 $\boxed{\varphi=0}$

电压 ***u*** 与电流 ***i*** 同相，***R***、***L***、***C***串联电路呈现阻性。

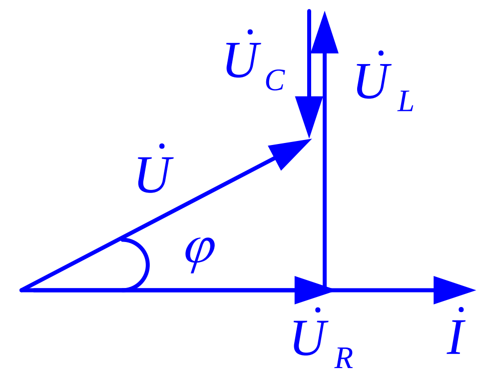
4.5 阻抗和导纳

相量图





(a)

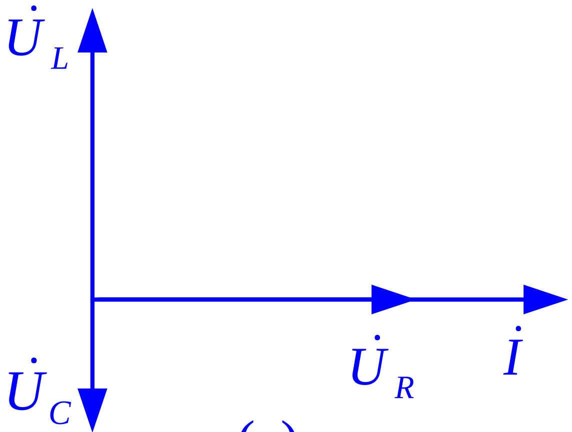


(b)

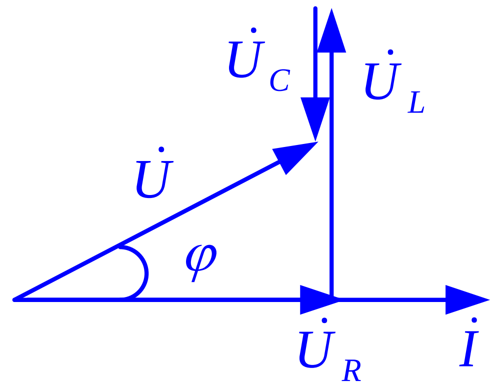
$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C \qquad U=\sqrt{U_R^2+(U_L-U_C)^2}$$

R、L、C串联电路电压相量图组成直角三角形，它与阻抗三角形相似。

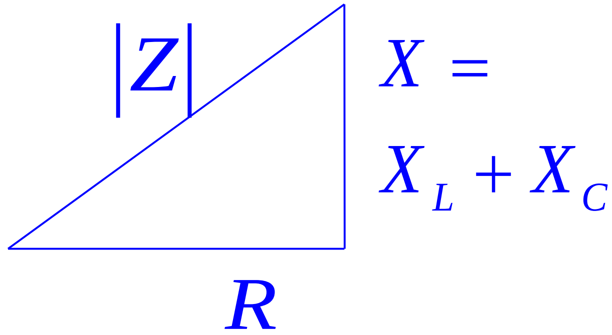
4.5 阻抗和导纳



(a)



(b)



$$\dot{U}_R = R\dot{I}$$

$$\dot{U}_L = \mathrm{j}\omega L\dot{I} = \mathrm{j}X_L\dot{I}$$

$$\dot{U}_C = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I} = \mathrm{j}X_C\dot{I}$$

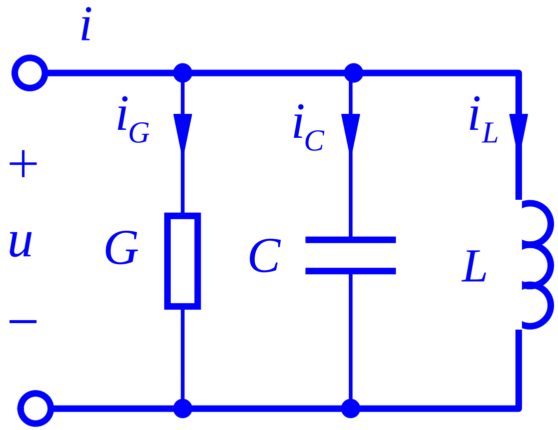
$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$$

有效值的关系

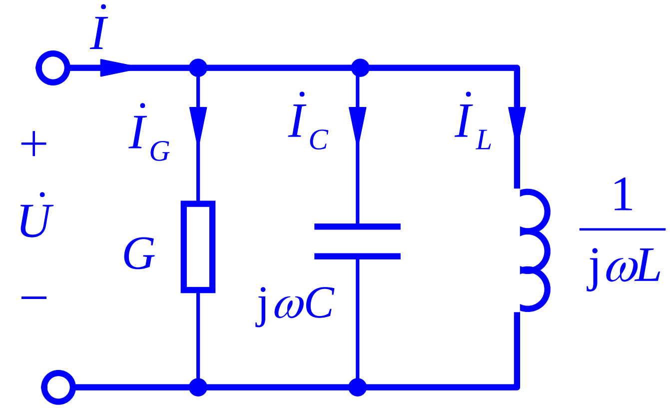
$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}$$

4.5 阻抗和导纳

2. 导纳



(a)



(b)

将GCL并联电路的时域模型变换成相量模型

KCL方程相量形式

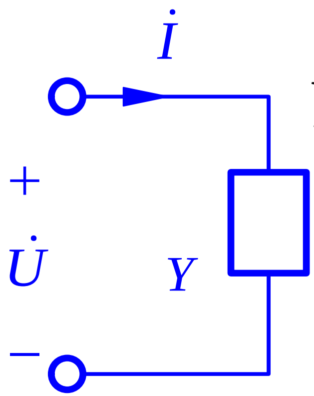
$$\dot{I} = \dot{I}_G + \dot{I}_C + \dot{I}_L = G\dot{U} + \mathrm{j}\omega C\dot{U} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L}\dot{U} = [G + \mathrm{j}(\omega C - \frac{1}{\omega L})]\dot{U}$$

$$Y = G + \mathrm{j}(\omega C - \frac{1}{\omega L}) = G + \mathrm{j}(B_C + B_L) = G + \mathrm{j}B = |Y|\angle\varphi_Y$$

导纳 电导 容纳 感纳 电纳 导纳角

4.5 阻抗和导纳

GCL并联等效



(c)

$$Y = G + \mathrm{j}(\omega C - \frac{1}{\omega L}) = G + \mathrm{j}(B_C + B_L) = G + \mathrm{j}B = |Y| \angle \varphi_Y$$

$$|Y| = \sqrt{G^2 + (B_C + B_L)^2} \qquad \varphi_Y = \arctan\frac{B_C + B_L}{G}$$

$$\dot{I} = [G + \mathrm{j}(\omega C - \frac{1}{\omega L})]\dot{U} = Y\dot{U}$$

→ 欧姆定律另一相量形式

$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{I\angle\psi_i}{U\angle\psi_u} = \frac{I}{U}\angle(\psi_i - \psi_u) = |Y|\angle\varphi_Y$$

$$\frac{I}{U} = |Y|$$

$$\psi_i - \psi_u = \varphi_Y$$

4.5 阻抗和导纳

$|B_L| > B_C$时　　$\varphi_Y < 0$

端口电流滞后于电压，

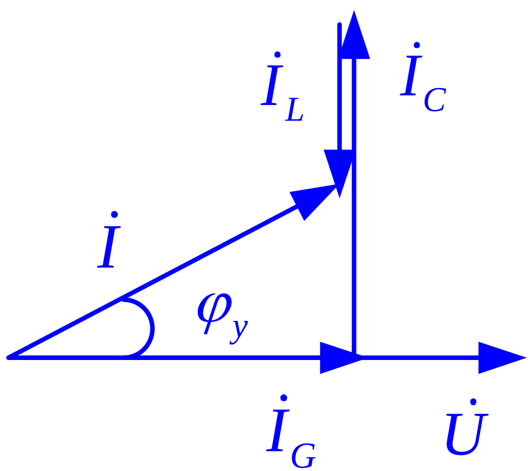
GCL并联电路呈现感性；

$|B_L| < B_C$时　　$\varphi_Y > 0$

端口电流越前于电压，

GCL并联电路呈现容性。

GCL 并联电路的相量图



$$\dot{I} = \dot{I}_G + \dot{I}_C + \dot{I}_L$$

$$I = \sqrt{I_G^2 + (I_C - I_L)^2}$$

阻抗与导纳之间的关系

$$Z = \frac{1}{Y}$$

[例4.7]

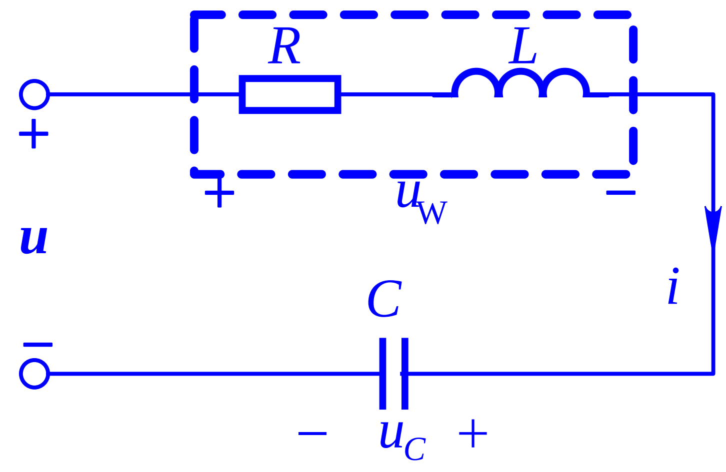
电阻R=15 Ω、电感L=12mH的 线圈与C=5 μF的电容器相串联，接在电压 $u=100\cos 5000t$ V的电源上。求电流i、电容器端电压u_C和线圈端电压u_W。

【解】R、L、C串联阻抗为

$$Z=R+\mathrm{j}(\omega L-\frac{1}{\omega C})=15\Omega+\mathrm{j}[5000\times12\times10^{-3}-\frac{1}{5000\times5\times10^{-6}}]\Omega$$

$$=25\angle53.1^{\circ}\ \Omega=(15+\mathrm{j}20)\ \Omega$$

电流相量和瞬时表达式分别为



$$\dot{I}_{\mathrm{m}}=\frac{\dot{U}_{\mathrm{m}}}{Z}=\frac{100\angle0^{\circ}\ \mathrm{V}}{25\angle53.1^{\circ}\ \Omega}=4\angle-53.1^{\circ}\ \mathrm{A}$$

$$i=4\cos(\omega t-53.1^{\circ})\ \mathrm{A}$$

[例4.7]

电容电压相量和瞬时表达式

$$\dot{U}_{Cm} = jX_C\dot{I}_m = -j40 \times 4\angle -53.1^\circ = 160\angle -143.1^\circ \text{V}$$

$$u_C = 160\cos(\omega t - 143.1^\circ)\,\text{V}$$

线圈看成*RL*串联，其阻抗

$$Z_W = R + j\omega L = (15 + j60)\Omega = 62\angle 76^\circ\,\Omega$$

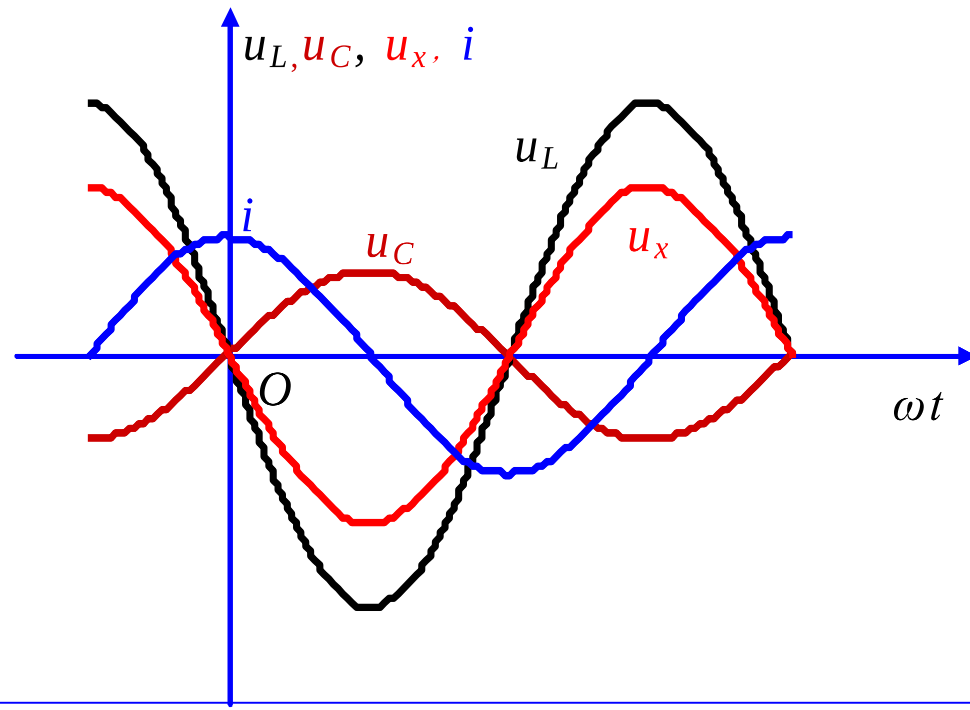
线圈电压相量和瞬时表达式

$$\dot{U}_m = Z_W\dot{I}_m = 62\angle 76^\circ \times 4\angle -53.1^\circ = 248\angle 22.9^\circ\,\text{V}$$

$$u_W = 248\cos(\omega t + 22.9^\circ)\text{V}$$

4.5 阻抗和导纳

*RLC*串联电路的波形



说明： 以i为参考正弦量，u_L比 i 越前90°，u_C比 i 滞后90°。将电感和电容串联部分的电压称为电抗电压，用$u_X=u_L+u_C$来表示。u_L和u_C相位相反，电抗电压u_{mX}的振幅u_X应等于u_L和u_C振幅之差。

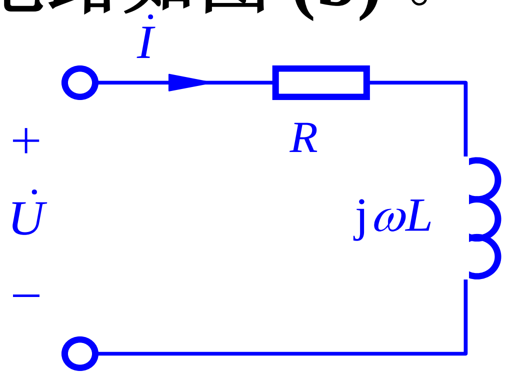
4.5 阻抗和导纳

若 $Z = R + \mathrm{j}\omega L$

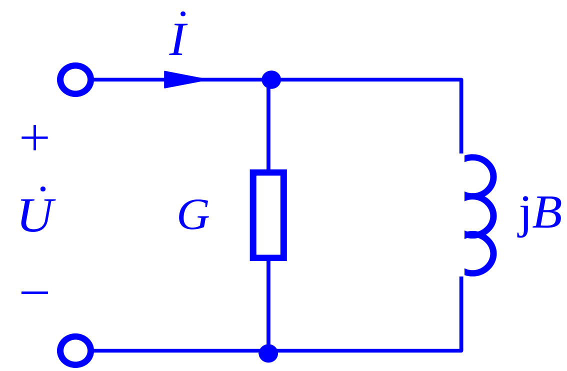
则 $Y = \dfrac{1}{Z} = \dfrac{1}{R + \mathrm{j}\omega L} = \dfrac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} - \mathrm{j}\dfrac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = G + \mathrm{j}B$

$$G = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} \boxed{\neq \frac{1}{R}} \qquad B = -\frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \boxed{\neq \frac{1}{\omega L}}$$

等效电路如图 (b) 。



(a)



(b)

说明：*Y* 与 *Z* 等效是在某一频率下求出的，故等效的 *Z* 或 *Y* 与频率有关。

[例4.8]

GCL 并联电路中 G=2mS，L=1H，C=1μF。试在频率为 50Hz 和 400Hz 两种情况下求其串联等效电路的参数。

【解】 *GCL* 并联电路的导纳为 $Y = G + \mathrm{j}[\omega C - 1/(\omega L)]$

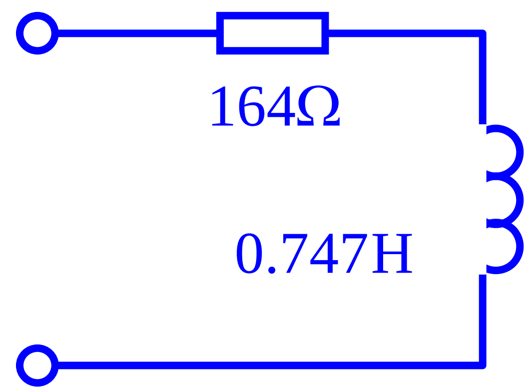
其等效阻抗 $Z = \dfrac{1}{Y} = \dfrac{1}{G + \mathrm{j}[\omega C - 1/(\omega L)]}$

f=50Hz时　$\omega = 2\pi f = 100\pi\,\mathrm{rad/s}$

$$Z = \frac{1}{2\times10^{-3}\mathrm{S} + \mathrm{j}[100\pi\times10^{-6} - 1/(100\pi\times1)]\mathrm{S}} \approx (164 + \mathrm{j}235)\Omega$$

虚部为正，呈电感性质，其等效电感为

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{235\Omega}{(100\pi)\,\mathrm{s}^{-1}} \approx 0.747\mathrm{H}$$



(a)

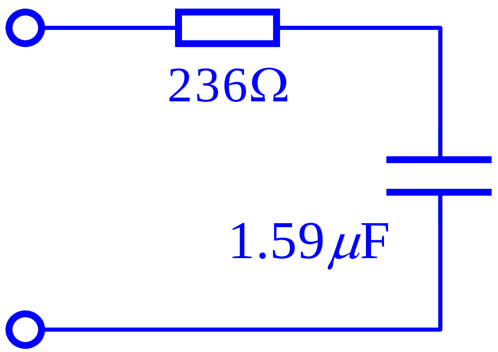
[例4.8]

f=400Hz时　$\omega = 800\pi \mathrm{rad/s}$

$$Z = \frac{1}{2\times10^{-3}\mathrm{S} + \mathrm{j}[800\pi\times10^{-6} - 1/(800\pi\times1)]} \approx (236 - \mathrm{j}250)\Omega$$

虚部为负，呈电容性质，等效电容为

$$C = -\frac{1}{\omega X_C} = -\frac{1}{(800\pi)\mathrm{s}^{-1}\times(-250)\Omega} \approx 1.59\mu\mathrm{F}$$



(b)

一个实际电路在不同频率下的等效电路，不仅其电路参数不同，甚至连元件类型也可能发生改变。这说明经过等效变换求得的等效电路只是在一定频率下才与变换前的电路等效。