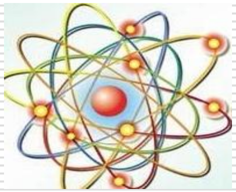
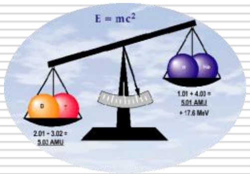




第4章 正弦电流电路

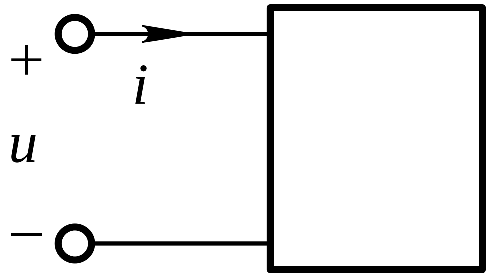
开课教师： 王灿

开课单位：机电学院--电气工程学科

4.7 正弦电流电路的功率

基本要求：了解正弦电路瞬时功率的特点；透彻理解平均功率、无功功率、视在功率、功率因数、复功率的定义及计算；掌握*RLC*元件功率的特点。

1. 瞬时功率



一端口网络的端口电压、电流分别为

$$u = \sqrt{2}U\cos(\omega t + \psi_u)$$

$$i = \sqrt{2}I\cos(\omega t + \psi_i)$$

一端口吸收的瞬时功率：

$$p = ui = 2UI\cos(\omega t + \psi_u)\cos(\omega t + \psi_i)$$

$$= UI\cos(\psi_u - \psi_i) + UI\cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)$$

4.7 正弦电流电路的功率

$$p = \underbrace{UI\cos(\psi_u - \psi_i)}_{①} + \underbrace{UI\cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)}_{②}$$

$UI\cos(\psi_u - \psi_i) \geq 0$

吸收的能量

交换的能量，在一个周期内的平均值等于零

2. 平均功率

一端口网络吸收功率的平均值称为平均功率，通常所说交流电路的功率是指平均功率，定义为

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\mathrm{d}t = UI\cos(\psi_u - \psi_i) = UI\cos\varphi = UI\lambda$$

功率因数角 φ

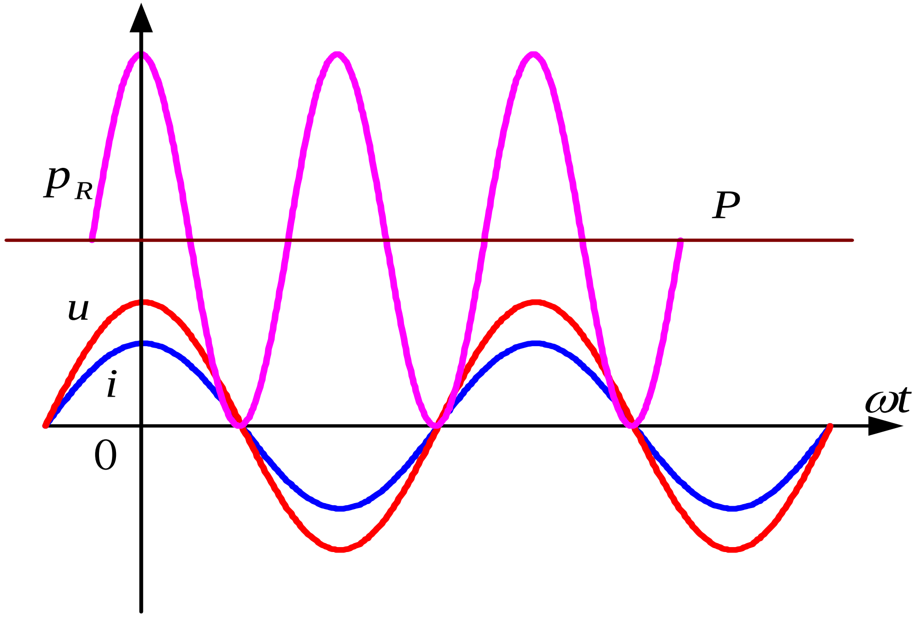
功率因数

单位:W

4.7 正弦电流电路的功率

R、*L*、*C* 各元件的功率（三种特殊情形）

(1) 电阻： ***R*上*u*与 *i*** 同相，$\psi_u - \psi_i = 0$，瞬时功率：



$$p_R = UI\cos(\psi_u - \psi_i) + UI\cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)$$

$$= UI[1 + \cos 2(\omega t + \psi_i)] \qquad > 0$$

4.7 正弦电流电路的功率

① $p_R>0$，正值电阻总是吸收功率

② 电阻的平均功率为:

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p\mathrm{d}t=P_R=\frac{1}{T}\int_0^T UI[1+\cos 2(\omega t+\psi_i)]\mathrm{d}t$$

$$=UI=RI^2=GU^2$$

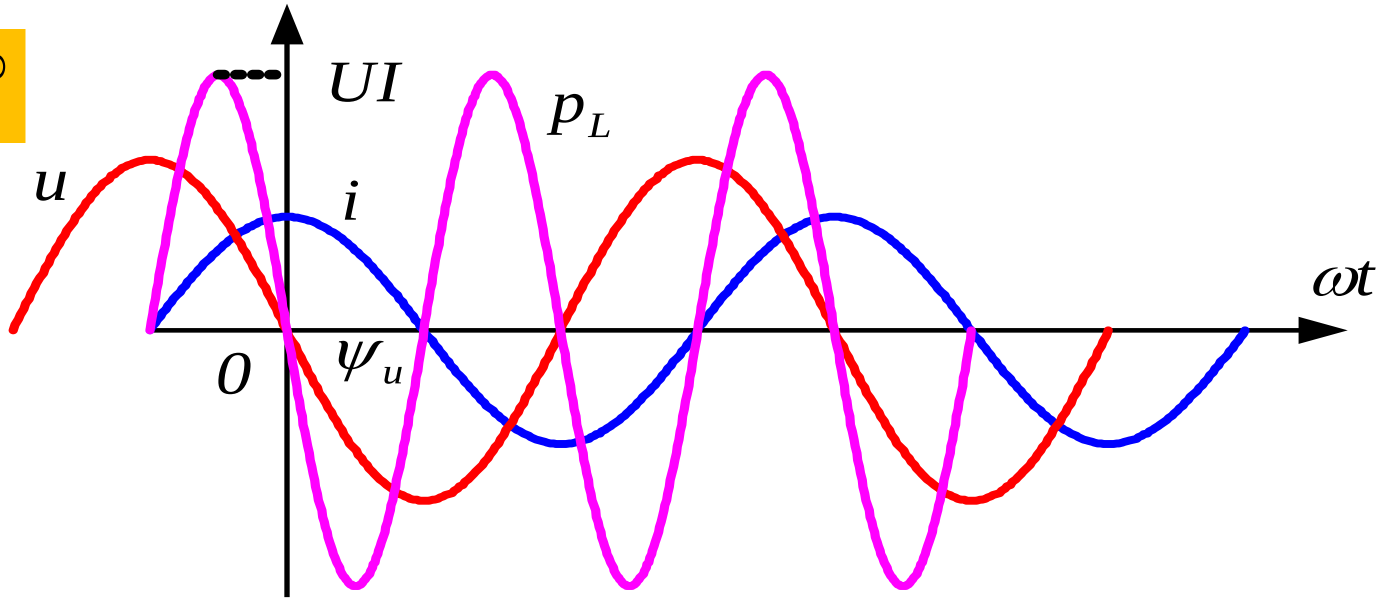
纯电阻平均功率:

$P=UI\cos 0^\circ=UI$ 即 $\lambda=1$

4.7 正弦电流电路的功率

(2) 电感： L上电压 u 比电流 i 越前90°

$$\psi_u - \psi_i = 90^\circ$$



瞬时功率 $$p_L = UI\cos(\psi_u - \psi_i) + UI\cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)$$

$$= UI\cos 90^\circ + UI\cos\left(2\omega t + 2\psi_i + 90^\circ\right)$$

$$= -UI\sin 2(\omega t + \psi_i)$$

4.7 正弦电流电路的功率

说明：

① 电感吸收瞬时功率是时间的正弦函数，其角频率为 2ω 。

② p_L在一个周期内的平均值等于零，即它输入的平均功率为零，表明在一个周期内电感吸收与释放的能量相等，是无损元件。

纯电感平均功率:

$P = UI\cos 90^\circ = 0$即 $\lambda = 0$

4.7 正弦电流电路的功率

(3) 电容：C上电压u比电流i 滞后 90° $\psi_u - \psi_i = -90^\circ$

$$p_C = UI\cos(\psi_u - \psi_i) + UI\cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)$$

$$= UI\cos(-90^\circ) + UI\cos\left(2\omega t + 2\psi_i - 90^\circ\right)$$

说明：

$$= UI\sin 2(\omega t + \psi_i)$$

① 吸收瞬时功率是时间的正弦函数，其角频率：2ω

② p_C在一个周期内的平均值等于零，即它输入的平均功率为零，表明在一个周期内电容吸收与释放的能量相等，是无损元件。

纯电容平均功率： $P = UI\cos(-90^\circ) = 0$ 即 $\lambda = 0$

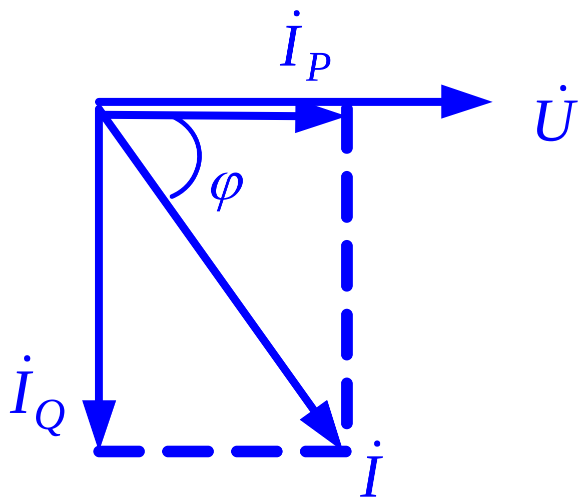
4.7 正弦电流电路的功率

结论：在正弦电流电路中，同相位的电压与电流产生平均功率，且等于其有效值之积；而相位正交的电压与电流不产生平均功率。

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p\mathrm{d}t=UI\cos(\psi_u-\psi_i)=UI\lambda$$

$$P=UI\cos\varphi=UI_P$$

感性一端口相量图



电流的有功分量

$$I_P=I\cos\varphi$$

电流的无功分量

$$I_Q=I\sin\varphi$$

4.7 正弦电流电路的功率

3. 无功功率

定义无功功率：$Q = UI\sin\varphi$

当阻抗为感性时，电压 ***u*** 越前于电流 ***i***，

$Q>0$ 代表感性无功功率

当阻抗为容性时，电压 ***u*** 滞后于电流 ***i***，

$Q<0$代表容性无功功率

电感和电容的无功功率分别为：

$$Q_L = UI\sin 90^\circ = UI = I^2\omega L = U^2/(\omega L)$$

$$Q_C = UI\sin(-90^\circ) = -UI = -I^2/(\omega C) = -U^2\omega C$$

单位:乏，**var**

4.7 正弦电流电路的功率

无功功率

$$Q = UI\sin\varphi$$

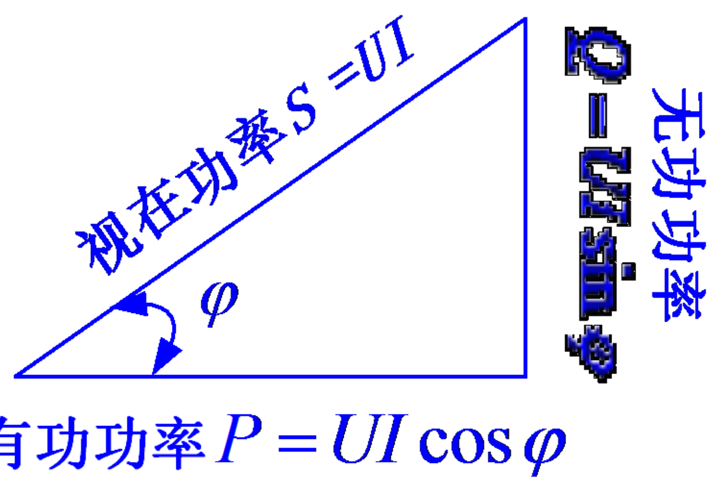
有功功率（平均功率）

$$P = UI\cos\varphi$$

4 视在功率

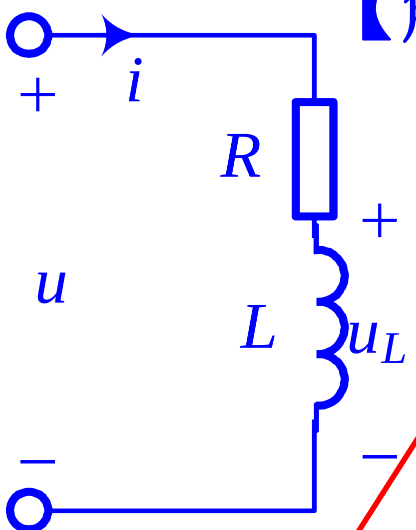
$$\boxed{S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}}$$

表示电气设备容量，单位:伏安（V·A）



[例4.14]

在工频条件下测得某线圈的端口电压、电流和功率分别为**100V**、**5A**和**300W**。求此线圈的电阻、电感和功率因数。



【解】

$$\lambda = \cos\varphi = \frac{P}{UI} = \frac{300\text{W}}{100\text{V} \times 5\text{A}} = 0.6$$

$$\varphi = \arccos 0.6 = 53.1^\circ$$

$$|Z| = \frac{U}{I} = \frac{100\text{V}}{5\text{A}} = 20\Omega$$

线圈电阻、感抗和电感分别为：

$$R = |Z|\cos\varphi = 20\Omega \times 0.6 = 12\Omega$$

$$X_L = |Z|\sin\varphi = 20\Omega \times 0.8 = 16\Omega$$

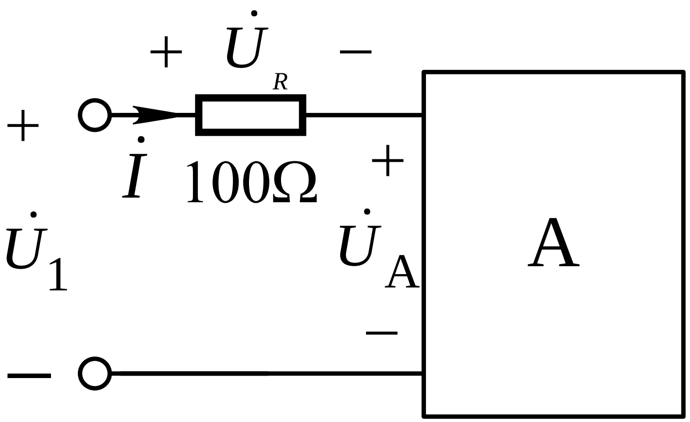
$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{16\Omega}{2\pi \times 50\text{s}^{-1}} = 51\text{mH}$$

功率因数角

=阻抗角

[补充4.15]

图示正弦稳态电路，已知 U_1=U_R=100V，$\dot{U}_R$滞后于$\dot{U}_1$的相角为60°，求一端口网络 A 吸收的平均功率。



$$\dot{I}=\dot{U}_R/100\Omega=1\angle-60^\circ\ \mathrm{A}$$

$$\dot{U}_A=\dot{U}_1-\dot{U}_R=100\angle60^\circ\ \mathrm{V}$$

【解】

设$\dot{U}_1=100\angle0^\circ\ \mathrm{V}$，

则$\dot{U}_R=100\angle-60^\circ\ \mathrm{V}$

网络 A 吸收的功率

$$P_A=U_A I\cos[60^\circ-(-60^\circ)]$$

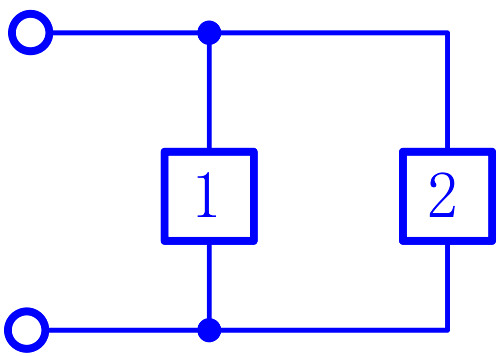
$$=-50\mathrm{W}$$

[补充4.15]

已知图示电路中负载1和2的平均功率、功率因数分别为

$P_1 = 80\,\text{W}$，$\lambda_1 = 0.8$ (感性)和 $P_2 = 30\,\text{W}$，$\lambda_2 = 0.6$ (容性)。

试求各负载的无功功率、视在功率以及两并联负载的总平均功率、无功功率、视在功率和功率因数。



【解】 负载1和2的功率因数角分别为

$$\varphi_1 = \arccos \lambda_1 = 36.86^\circ$$

$$\varphi_2 = \arccos \lambda_2 = -53.13^\circ$$

负载1、2的视在功率和无功功率分别为

$$S_1 = P_1 / \lambda_1 = 80\,\text{W} / 0.8 = 100\,\text{VA}$$

$$Q_1 = S_1 \sin \varphi_1 = 60\,\text{var}$$

$$S_2 = P_2 / \lambda_2 = 30\,\text{W} / 0.6 = 50\,\text{VA}$$

$$Q_2 = S_2 \sin \varphi_2 = -40\,\text{var}$$

[补充4.15]

两并联负载的总平均功率、 无功功率：

$$P = P_1 + P_2 = 110\,\mathrm{W}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = 20\,\mathrm{var}$$

视在功率

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 111.8\,\mathrm{VA}$$

功率因数

$$\lambda = P/S = 0.98$$

5 功率因数的提高

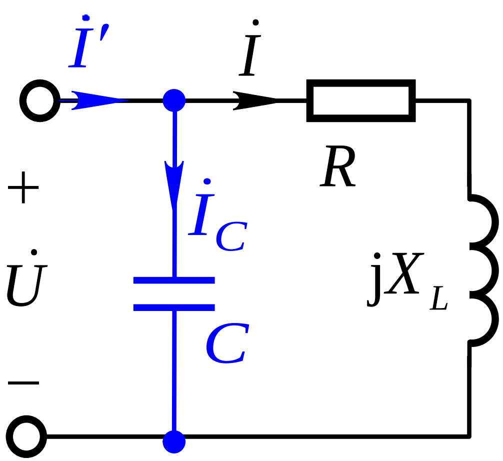
提高功率因数的意义：

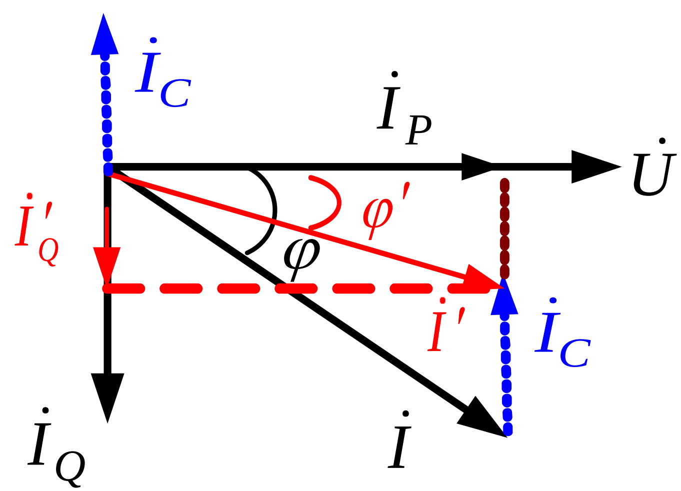
① 通过减少线路电流来减小线路损耗；

② 提高发电设备利用率。

原理： 利用电场能量与磁场能量的相互转换，或者说利用容性无功与感性无功的相互补偿，来减少电源输出电流的无功分量，从而减小电源的无功功率。

原则： 确保负载正常工作。



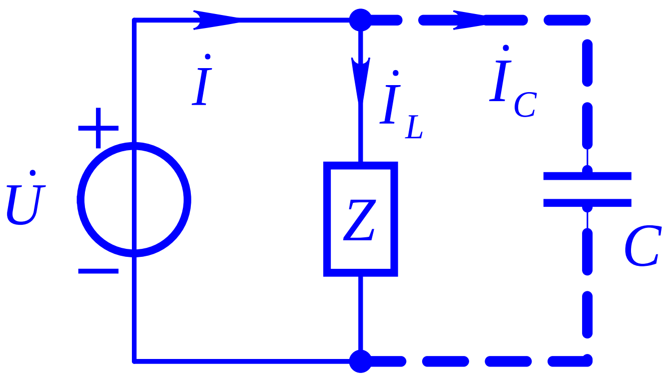


[例4.15]

感性负载Z接于220V、50Hz正弦电源上，负载的平均功率和功率因数分别为2200W和0.8。

(1)求并联电容前电源电流、无功功率和视在功率。

(2)并联电容，将功率因数提高到0.95，求电容大小、并联后电源电流、无功功率和视在功率。



【解】 **(1) 并联电容前**

$$I = I_L = \frac{P}{U\lambda} = \frac{2200\ \mathrm{W}}{220\ \mathrm{V} \times 0.8} = 12.5\mathrm{A}$$

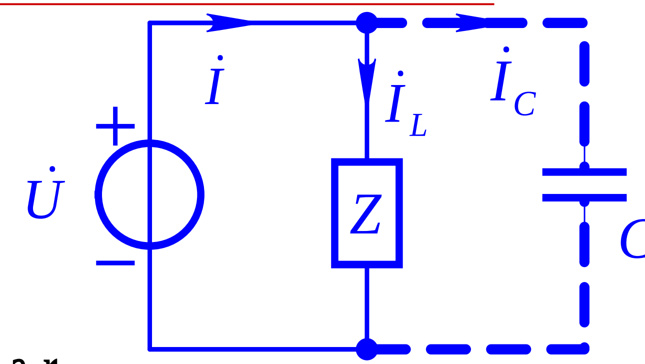
功率因数角 $\phi = \arccos 0.8 \approx 36.9^\circ$

无功功率 $Q = Q_L = P\tan\varphi = 1650\ \mathrm{var}$

视在功率 $S = UI_L = 220\mathrm{V} \times 12.5\mathrm{A} = 2750\mathrm{V}\cdot\mathrm{A}$

[例4.15]

(2) 并联电容后功率因数角



功率因数角 $\varphi' = \arccos 0.95 \approx 18.2^\circ$

有功功率不变，无功功率为 $Q' = P\tan\varphi' \approx 723.11\,\mathrm{var}$

电源无功功率的差值等于电容上的无功功率：

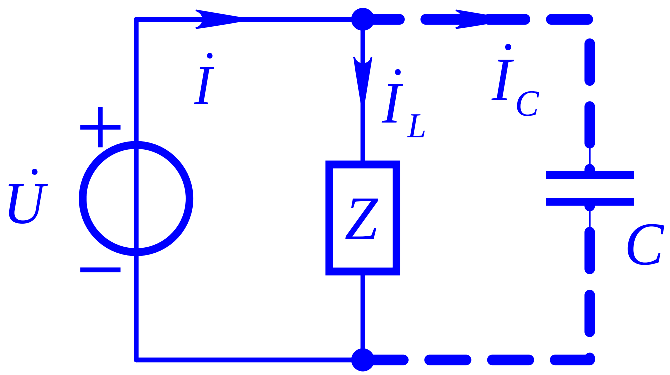
$$Q_C = Q' - Q \approx -926.83\,\mathrm{var}$$

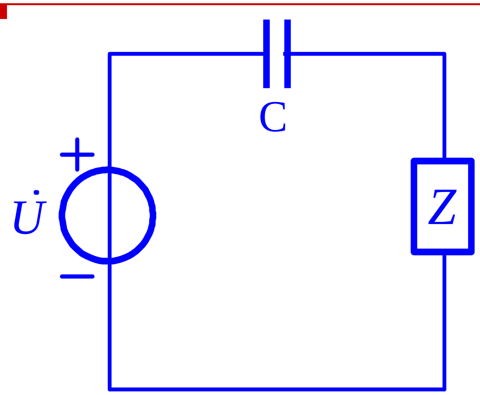
并联电容： $C = -\dfrac{Q_C}{\omega U^2} = \dfrac{926.83\,\mathrm{var}}{(100\pi)\mathrm{s}^{-1} \times (220\mathrm{V})^2} \approx 63.32\,\mu\mathrm{F}$

视在功率： $S' = \sqrt{P^2 + Q'^2} \approx 2387.26\,\mathrm{V\cdot A}$

电源电流： $I' = S'/U \approx 10.85\,\mathrm{A}$ $\qquad I' = \dfrac{P}{U\lambda'}$

[例4.15]





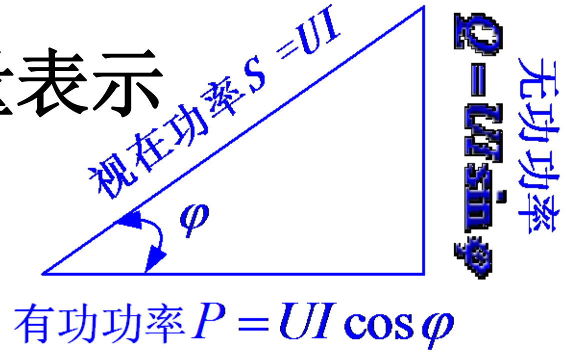
串联电容是否可以进行无功补偿，实际中可以采用吗？

可以进行无功补偿，但实际中不采用

(1)改变了负载工作电压；
(2)增加了线损。

6 复功率

设一端口网络的端口　　分别用相量表示



电压 $u=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\psi_u)$　　$\dot{U}=Ue^{j\psi_u}$

电流 $i=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\psi_i)$　　$\dot{I}=Ie^{j\psi_i}$

复功率：$\tilde{S}=P+jQ=UI\cos\varphi+jUI\sin\varphi$

$$=UIe^{j\varphi}=UIe^{j(\psi_u-\psi_i)}=Ue^{j\psi_u}\cdot Ie^{-j\psi_i}=\dot{U}\overset{*}{I}$$

即：复功率等于电压相量与电流相量共轭复相量的乘积。

复功率是直接利用电压和电流相量计算的功率。

$$\left|\tilde{S}\right|=\sqrt{P^2+Q^2}=\sqrt{[UI\cos\varphi]^2+[UI\sin\varphi]^2}=UI=S$$

$$\arctan\frac{Q}{P}=\arctan\frac{UI\sin\varphi}{UI\cos\varphi}=\varphi$$

4.7 正弦电流电路的功率

当计算某一阻抗 $Z=R+\mathrm{j}X$ 所吸收的复功率时，将式 $\dot{U}=Z\dot{I}$ 代入得

$$\tilde{S}=\dot{U}\overset{*}{I}=Z\dot{I}\overset{*}{I}=ZI^2=RI^2+\mathrm{j}XI^2=P+\mathrm{j}Q$$

阻抗为感性时，$\mathrm{j}X$ 前为正号，$\widetilde{S}$ 的虚部为正，表示感性无功功率

阻抗为容性时，$\mathrm{j}X$ 前为负号，$\widetilde{S}$ 的虚部为负，表示容性无功功率

4.7 正弦电流电路的功率

任意复杂网络中复功率具有守恒性：

各支路发出的复功率代数和等于零.

$$\sum_{k=1}^{b} \dot{U}_k \overset{*}{I}_k = \sum_{k=1}^{b} P_k + \mathrm{j}\sum_{k=1}^{b} Q_k = 0$$

说明：

实部代数和等于零表明：

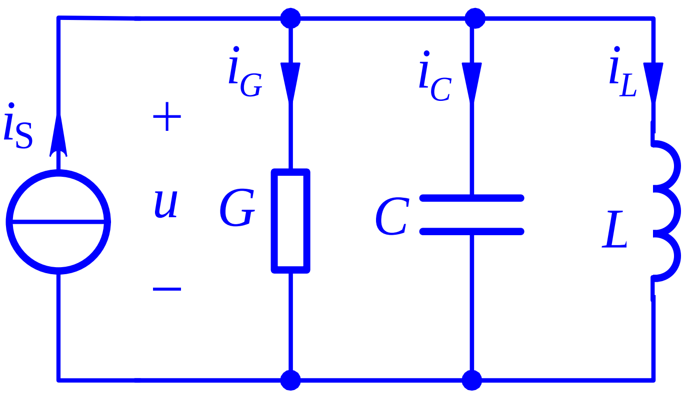
各电源发出的平均功率之和等于各负载吸收的平均功率之和；

虚部代数和等于零表明：

各电源“发出”的无功功率和等于各负载“吸收”的无功功率和。

[补充4.15]

图示电路中I_G=8A，I_L=4A，I_S=10A，X_C=10Ω，求电流源提供的复功率及各负载吸收的复功率，并验证复功率守恒性。



【解】

$$(I_L - I_C)^2 = I_S^2 - I_G^2$$

$$I_L - I_C = \pm\sqrt{I_S^2 - I_G^2} = \pm 6\text{A},$$

得 $I_C = 10\text{A}$, $I_C = -2\text{A}$（舍去）

$$U = X_C I_C = 100\text{V}, \text{设} \dot{U} = 100\angle 0^\circ \text{A}$$

则 $\dot{I}_G = 8\angle 0^\circ \text{A}$，$\dot{I}_L = 4\angle -90^\circ \text{A}$，$\dot{I}_C = 10\angle 90^\circ \text{A}$

$$\dot{I}_S = \dot{I}_G + \dot{I}_L + \dot{I}_C = (8 + \text{j}6)\text{A}$$

电流源发出复功率

$$\tilde{S} = \dot{U}\overset{*}{I}_S = (800 - \text{j}600)\text{V}\cdot\text{A}$$

R、L、C 分别吸收复功率

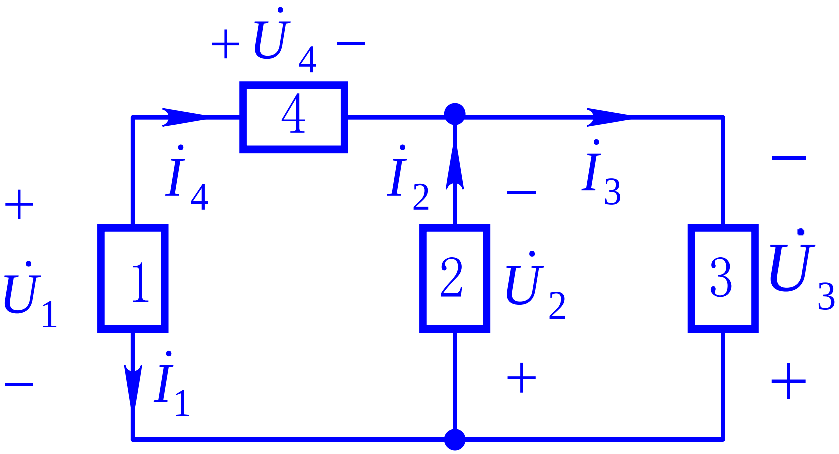
$$\tilde{S}_R = \dot{U}\overset{*}{I}_G = 800\text{V}\cdot\text{A}$$

$$\tilde{S}_L = \dot{U}\overset{*}{I}_L = \text{j}400\text{V}\cdot\text{A}$$

$$\tilde{S}_C = \dot{U}\overset{*}{I}_C = -\text{j}1000\text{V}\cdot\text{A}$$

[例4.16]

图中 $\dot{U}_1=(1+\mathrm{j})\mathrm{V}$，$\dot{U}_2=-\mathrm{j}2\mathrm{V}$，$\dot{I}_3=(1-\mathrm{j})\mathrm{A}$，$\dot{I}_4=(1+\mathrm{j})\mathrm{A}$ ，求各元件功率，并判断其类型



各元件吸收功率

$$\tilde{S}_1=\dot{U}_1\overset{*}{I}_1=(1+\mathrm{j})(-1+\mathrm{j})=-2\mathrm{W}$$

元件1为电源

$$\tilde{S}_2=\dot{U}_2\overset{*}{I}_2=-\mathrm{j}2\times\mathrm{j}2=4\mathrm{W}$$

元件2为电阻

【解】

$$\dot{U}_3=\dot{U}_2=-\mathrm{j}2\ (\mathrm{V})$$

$$\dot{U}_4=\dot{U}_1+\dot{U}_2=1-\mathrm{j}(\mathrm{V})$$

$$\dot{I}_1=-\dot{I}_4=-1-\mathrm{j}(\mathrm{A})$$

$$\dot{I}_2=\dot{I}_3-\dot{I}_4=-\mathrm{j}2(\mathrm{A})$$

$$\tilde{S}_3=-\dot{U}_3\overset{*}{I}_3=-(-\mathrm{j}2)\times(1+\mathrm{j})$$
$$=(-2+\mathrm{j}2)\,\mathrm{var}$$

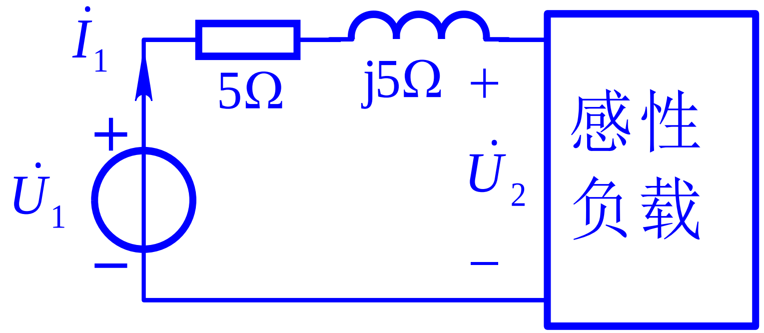
元件3为电源

$$\tilde{S}_4=\dot{U}_4\overset{*}{I}_4=(1-\mathrm{j})\times(1+\mathrm{j})=-\mathrm{j}2\,\mathrm{var}$$

元件4为电容

[补充4.17]

已知电压U_1=100V，电流I_1=10A，电源输出功率P=500W。求负载阻抗及端电压U_2。



【解】

方法一：

$$\varphi=\arccos\frac{P}{U_1 I_1}=\arccos\frac{500\,\mathrm{W}}{100\mathrm{V}\times 10\,\mathrm{A}}=60^{\circ}$$

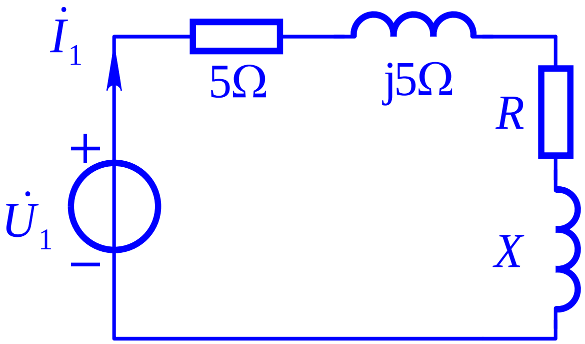
设$\dot{I}_1=10\angle 0^{\circ}\ \mathrm{A}$，则$\dot{U}_1=100\angle 60^{\circ}\ \mathrm{V}$

$$\dot{U}_2=\dot{U}_1-\left(5\Omega+\mathrm{j}5\Omega\right)\dot{I}_1=36.6\angle 90^{\circ}\ \mathrm{V}$$

$$Z_{\mathrm{L}}=\dot{U}_2/\dot{I}_1=\mathrm{j}3.66\Omega$$

[补充4.17]

方法二：



$$P = I^2(5\Omega + R) = 10^2(5\Omega + R) = 500\text{W}$$

$$\Rightarrow R = 0$$

$$|Z| = \frac{U_1}{I_1} = \sqrt{(5+R)^2 + (5+X)^2} = \frac{100}{10} \qquad \Rightarrow X = 3.66\Omega$$

$$Z = R + \text{j}X = \text{j}3.66\Omega$$

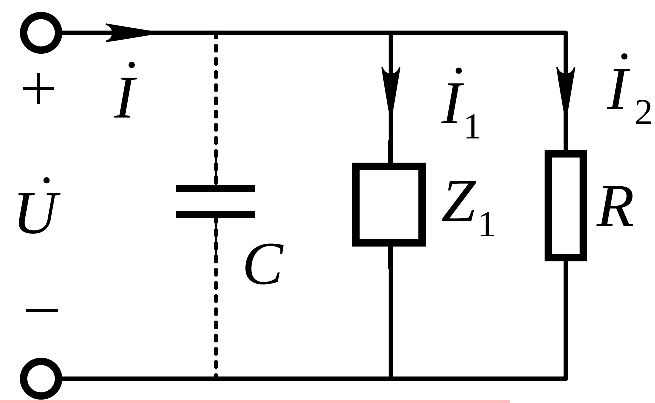
$$U_2 = I_1|Z| = 3.66\text{V}$$

[补充4.18]

工频正弦交流电路中，U=100V，感性负载Z_1的电流I_1为10A，功率因数 $\lambda_1=0.5$，$R=20\Omega$。

（1）求电源发出的有功功率，电流I，和总功率因数 λ；

（2）当电流 I 限制为11A时，应并联最小多大电容C？并求此时总功率因数 λ。



【解】

$$\varphi_1=\arccos\lambda_1=60°$$

$$Z_1=\frac{U}{I_1}\angle\varphi_1=10\angle 60°\Omega$$

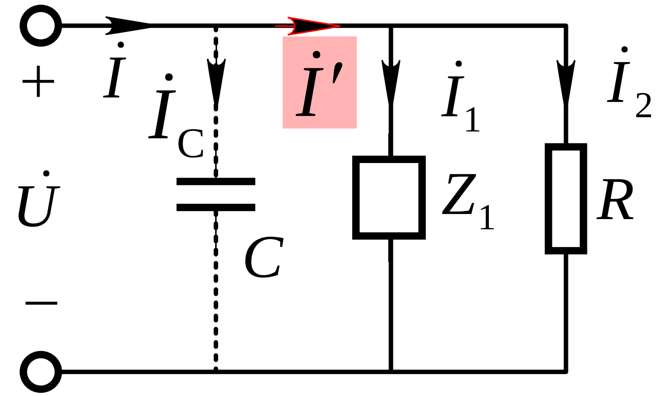
设$\dot{U}=100\angle 0°\text{V}$，则$\dot{I}_1=10\angle-60°\text{A}, \dot{I}_2=5\angle 0°\text{A}$

$$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2=10\angle-60°+5\angle 0°=5\sqrt{7}\angle-40.9°\text{A}=10\text{-j}5\sqrt{3}$$

$$P=UI_1\lambda_1+U^2/R=1000\text{W} \qquad I=5\sqrt{7}\text{A},\lambda=\cos 40.9°=0.756$$

[补充4.18]

（2）当电流 I 限制为11A时，应并联最小多大电容C？并求此时总功率因数 λ 。



$$\dot{I}' = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 10\angle -60° + 5\angle 0°$$

$$= 5\sqrt{7}\angle -40.9°\text{A}=10\text{-j}5\sqrt{3}$$

设$\dot{I}_C = I_C\angle 90°=\text{j}I_C$

$$\Rightarrow \dot{I} = \dot{I}_C + \dot{I}' = 10+\text{j}\left(I_C\text{-}5\sqrt{3}\right) \quad \Rightarrow I = \sqrt{10^2 + (I_C - 5\sqrt{3})^2} = 11\text{A}$$

$$\Rightarrow I_C = 4.07\text{A} \Rightarrow C=130\mu\text{F}$$

$$\lambda = 0.91$$