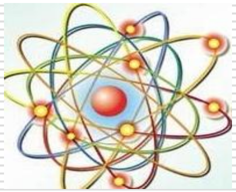
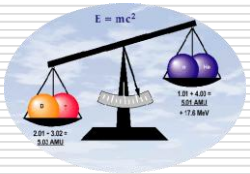




第4章　正弦电流电路

4.8 最大功率传输定理

4.9 耦合电感

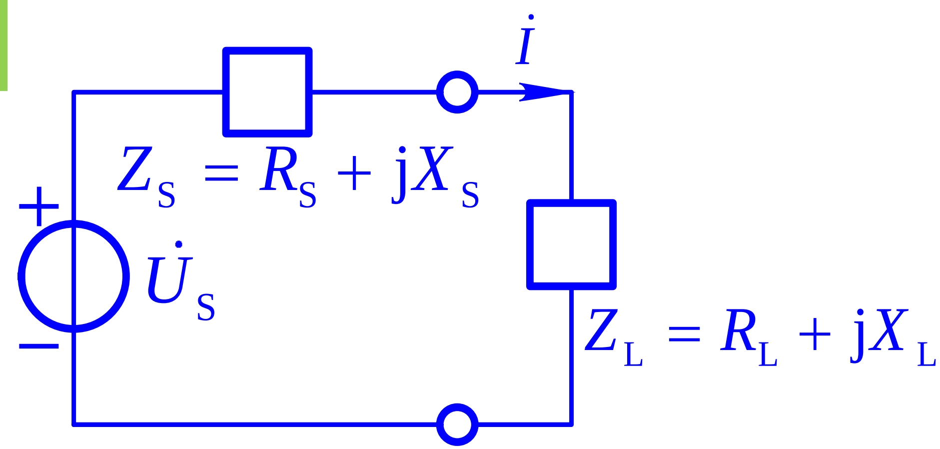
开课教师：　王灿

开课单位：机电学院--电气工程学科

4.8 最大功率传输定理

基本要求：掌握最大功率传输的概念、最大功率传输定理的条件与结论。

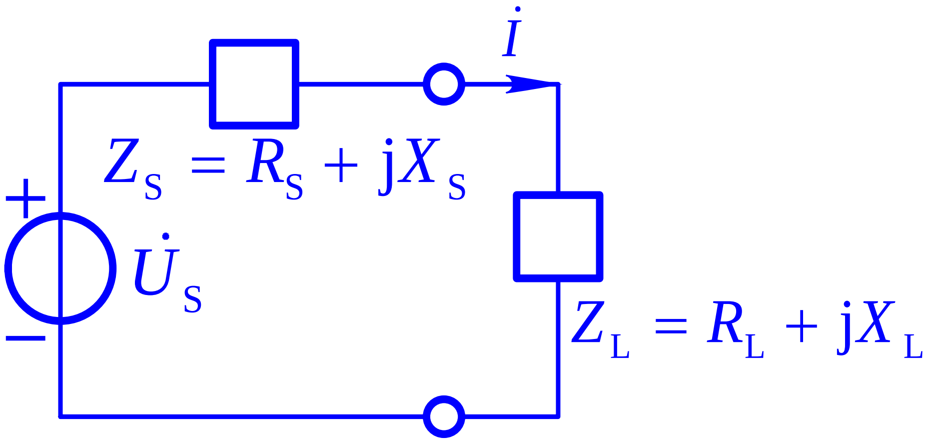
(1)负载可任意改变时



电压源 $\dot{U}_S$，内阻抗 $Z_S=R_S+jX_S$,负载阻抗Z_L的实部R_L大于零，且R_L与 X_L可随意改变，负载阻抗从给定电源获得最大功率的条件是：

$$Z_L = R_L + jX_L = R_S - jX_S = \overset{*}{Z}_S$$

4.8 最大功率传输定理



电路中电流的有效值为

$$I = \frac{U_S}{\sqrt{(R_S + R_L)^2 + (X_S + X_L)^2}}$$

负载获得的功率 $P_L = R_L I^2 = \dfrac{R_L U_S^2}{(R_S + R_L)^2 + (X_S + X_L)^2}$

X_L只出现在分母中，当$X_L = -X_S$时，分母最小，功率为

$$P_L' = \frac{R_L U_S^2}{(R_S + R_L)^2}$$

4.8 最大功率传输定理

$$P_L' = \frac{R_L U_S^2}{(R_S + R_L)^2}$$

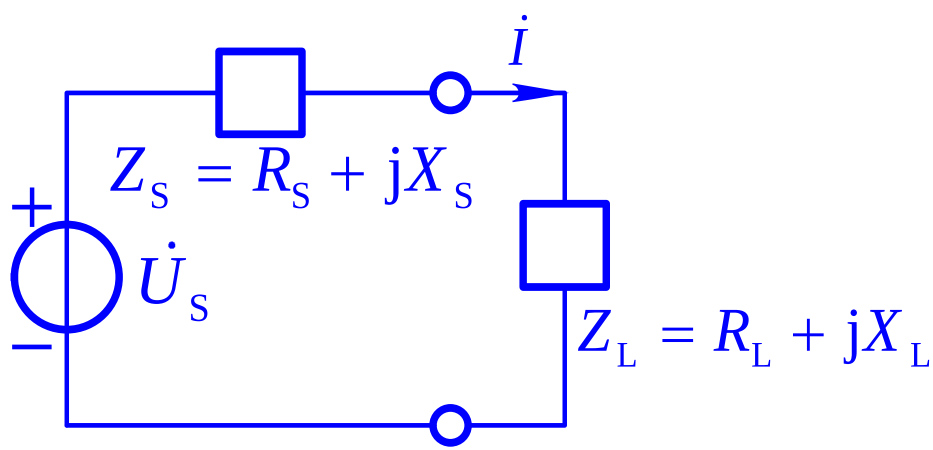
R_L也是可变的：

$$\frac{\mathrm{d}P_L'}{\mathrm{d}R_L} = U_S^2 \frac{(R_S + R_L)^2 - 2(R_S + R_L)R_L}{(R_S + R_L)^4} = U_S^2 \frac{(R_S^2 - R_L^2)}{(R_S + R_L)^4} = 0$$

当$R_L = R_S$时，P_L'为唯一的极大值

$$Z_L = R_L + \mathrm{j}X_L$$

$$= R_S - \mathrm{j}X_S = \overset{*}{Z}_S$$



4.8 最大功率传输定理

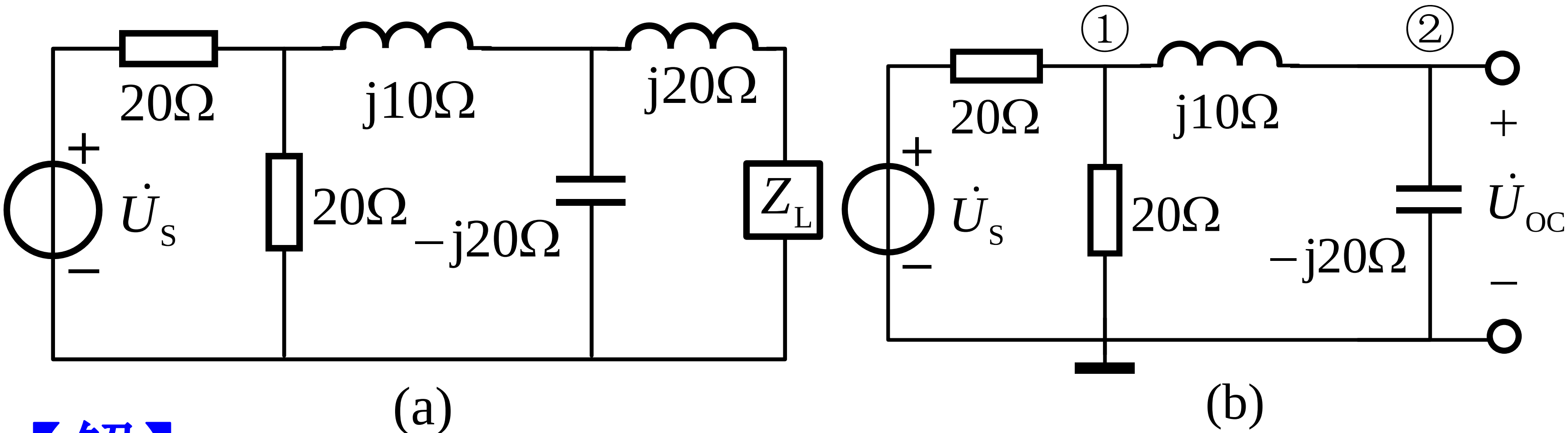
最大功率传输定理： 负载阻抗等于电源内阻抗的共轭复数时(称为**共轭匹配**)，负载获得最大功率，此时最大功率为：

$$P_{L\max} = \frac{U_S^2}{4R_L}$$

注： 当负载获得最大功率时, 电源内阻和负载电阻消耗的功率相等，电能的**利用率只有50%** .

[例4.17]

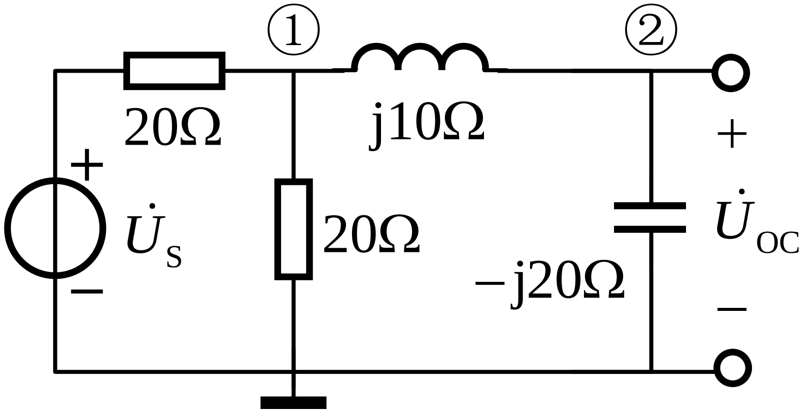
图示电路中，电压源 $\dot{U}_S = 20\angle 0°V$ ，阻抗Z_L可任意改变，求Z_L为何值时可从电路中获得最大功率，并求该最大功率。



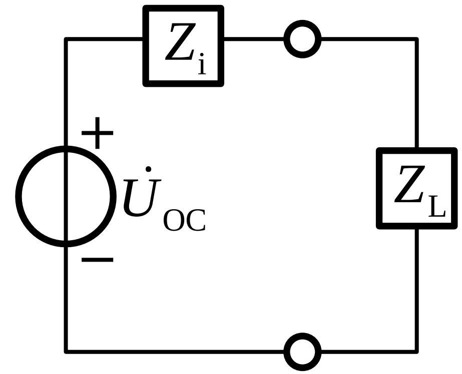
【解】

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{1}{20\Omega}+\frac{1}{20\Omega}+\frac{1}{j10\Omega}\right)\dot{U}_{n1}-\frac{1}{j10\Omega}\dot{U}_{n2}=\frac{\dot{U}_S}{20\Omega} \\ &-\frac{1}{j10\Omega}\dot{U}_{n1}+\left(\frac{1}{j10\Omega}+\frac{1}{-j20\Omega}\right)\dot{U}_{n2}=0 \end{aligned}\right\}$$

[例4.17]



(b)



(c)

$$\dot{U}_{n1} = 5\sqrt{2}\angle -45°\text{V}$$

$$\dot{U}_{n2} = 10\sqrt{2}\angle -45°\text{V}$$

$$\dot{U}_{OC} = \dot{U}_{n2} = 10\sqrt{2}\angle -45°\text{V}$$

$$Z_i = \text{j}20\Omega + \frac{[(20\Omega \,\|\, 20\Omega) + \text{j}10\Omega][-\text{j}20\Omega]}{(20\Omega \,\|\, 20\Omega) + \text{j}10\Omega - \text{j}20\Omega} = (20 + \text{j}20)\Omega$$

当 $Z_L = \overset{*}{Z_i} = (20 - \text{j}20)\Omega$ 时可从电路中获得最大功率

$$P_{max} = \frac{U_{OC}^2}{4\,\text{Re}[Z_L]} = \frac{(10\sqrt{2})^2}{4 \times 20\Omega} = 2.5\text{W}$$

4.8 最大功率传输定理

(2)只有负载的模可改变时

当负载阻抗 $Z_L = |Z_L| e^{j\varphi_L}$ 的模 $|Z_L|$ 可以改变，而阻抗角 φ_L 不能改变时，负载从给定电源获得最大功率的条件是：负载阻抗模与电源内阻抗模相等。

即 $|Z_L| = |Z_S|$

获得的最大功率为

$$P_{L\max} = \frac{U_S^2 \cos\varphi_L}{2|Z_S|[1+\cos(\varphi_S - \varphi_L)]}$$

4.8 最大功率传输定理

当电源内阻抗为 $Z_S = R_S + jX_S$

纯电阻负载获得最大功率的条件是 $R_L = |Z_S|$

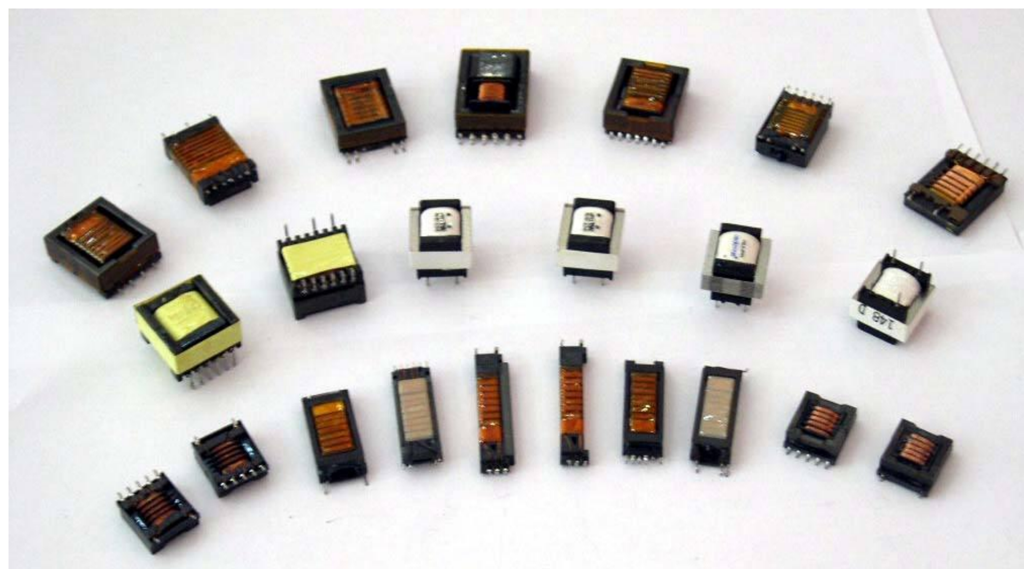
电源内阻抗是纯电阻时 $Z_S = R_S$

电阻负载获得最大功率的条件则是 $R_L = R_S$

4.9 耦合电感

基本要求：透彻理解同名端的概念、熟练掌握互感元件端口方程和互感元件的串并联等效电路。

当几个线圈之间存在着磁耦合，便形成了多端口电感。本节只讨论二端口电感，习惯上称为互感。

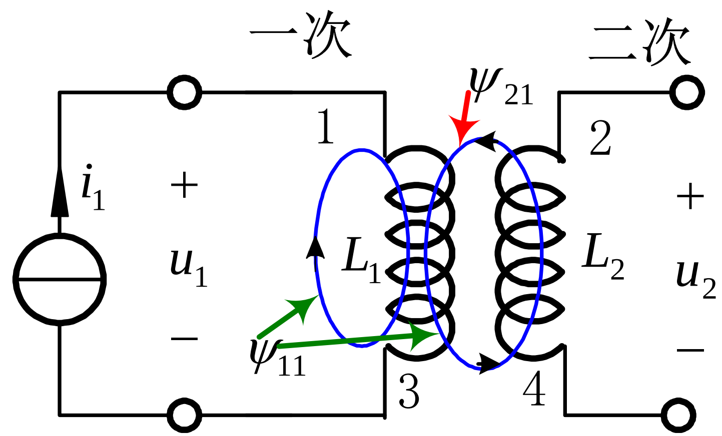


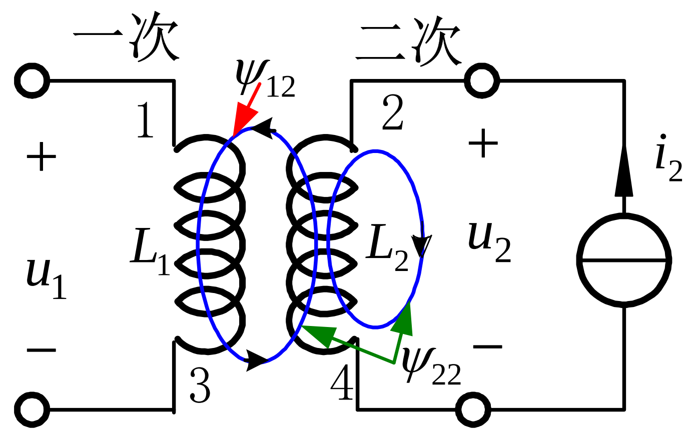
4.9 耦合电感

基本要求：透彻理解同名端的概念、熟练掌握互感元件端口方程和互感元件的串并联等效电路。

当几个线圈之间**存在着磁耦合**，便形成了多端口电感。

本节只讨论二端口电感，习惯上称为**互感**。





自感应磁链： Ψ_{11} 、 Ψ_{22} **互感应磁链：** Ψ_{21} 、 Ψ_{12}

i_1 i_2

4.9 耦合电感

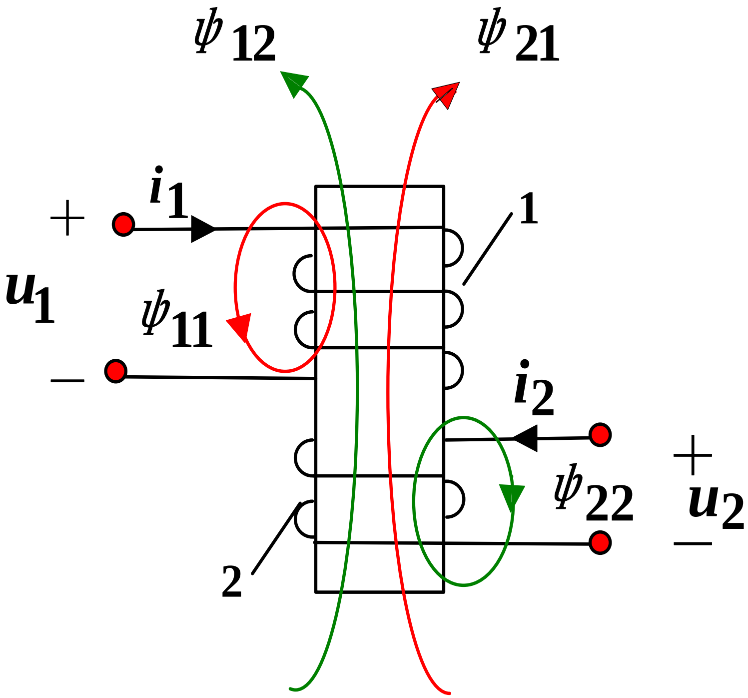


图 a 互感

在线性条件下，自感磁链和互感磁链均正比于激发它们的电流

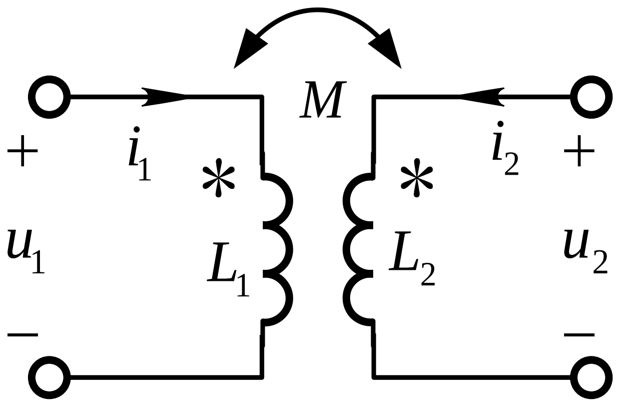
$$\psi_1 = \psi_{11} \pm \psi_{12} = L_{11} i_1 \pm L_{12} i_2$$

$$\psi_2 = \pm\psi_{21} + \psi_{22} = \pm L_{21} i_1 + L_{22} i_2$$

L_{11}、L_{22}——自感；简写成 L_1、L_2

L_{12}、L_{21}——互感；一般实际线圈 $L_{12}=L_{21}=M$

4.9 耦合电感



互感元件的符号

$$\psi_1 = \psi_{11} \pm \psi_{12} = L_{11}i_1 \pm L_{12}i_2$$

$$\psi_2 = \pm\psi_{21} + \psi_{22} = \pm L_{21}i_1 + L_{22}i_2$$

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{d\Psi_1}{dt} = L_{11}\dfrac{di_1}{dt} \pm L_{12}\dfrac{di_2}{dt} = L_1\dfrac{di_1}{dt} \pm M\dfrac{di_2}{dt} \\ u_2 = \dfrac{d\Psi_2}{dt} = \pm L_{21}\dfrac{di_1}{dt} + L_{22}\dfrac{di_2}{dt} = \pm M\dfrac{di_1}{dt} + L_2\dfrac{di_2}{dt} \end{cases}$$

4.9 耦合电感

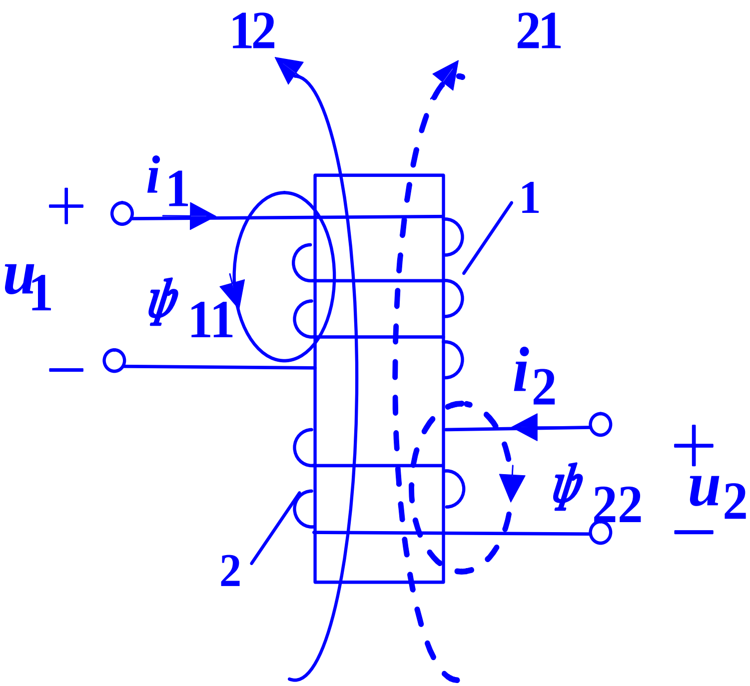


图 a　互感

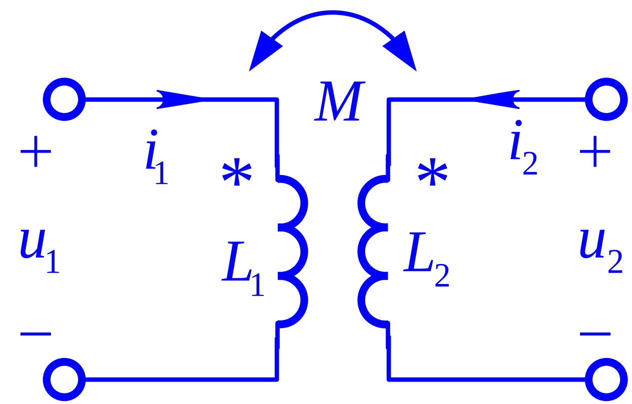


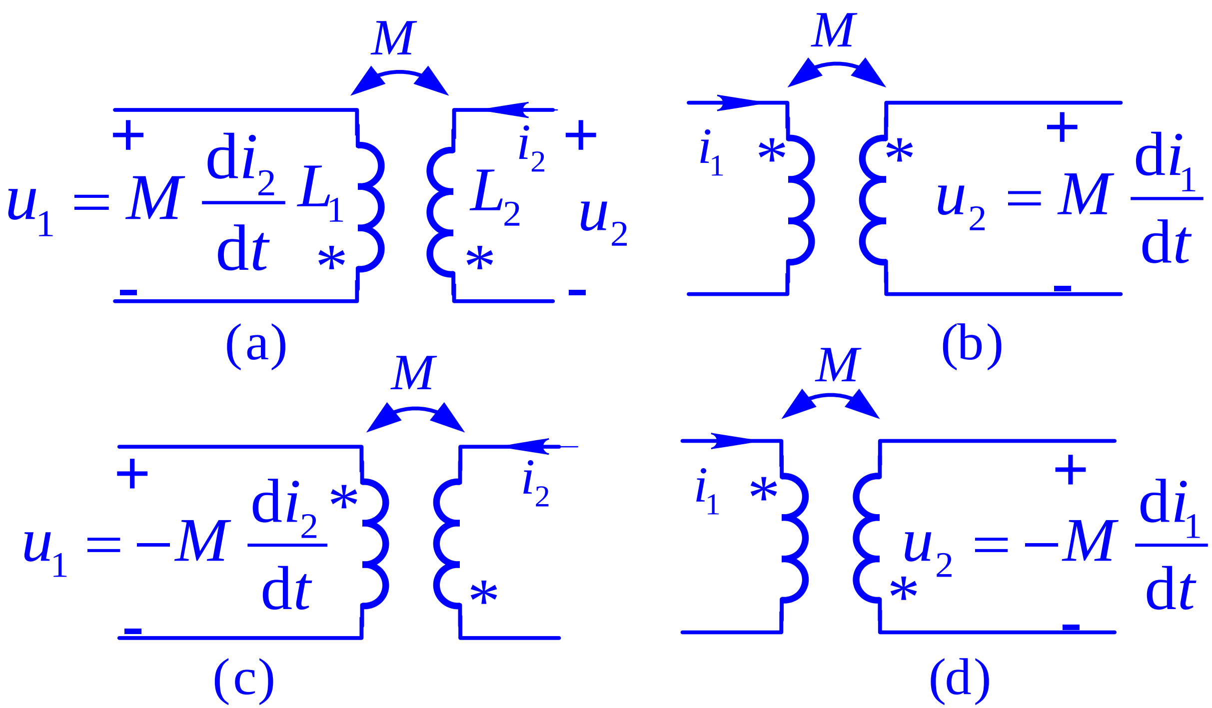
图 b 互感元件的模型

当将实际线圈抽象成图 (b)所示的电路模型时，就靠电流进、出同名端来判断互感磁链的+（或 -）。

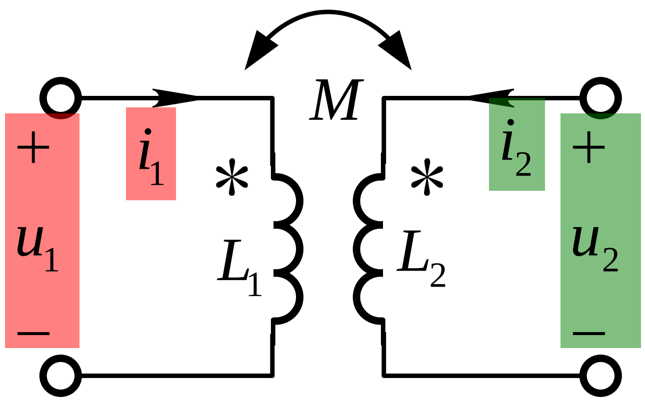
4.9 耦合电感

同名端： 使所激发的自感磁链和互感磁链方向一致的两个线圈电流的进端或出端。

换言之，两个端口电流都流进（或流出）同名端，表示它们所激发的自感磁链和互感磁链方向一致。



4.9 耦合电感



互感元件的符号

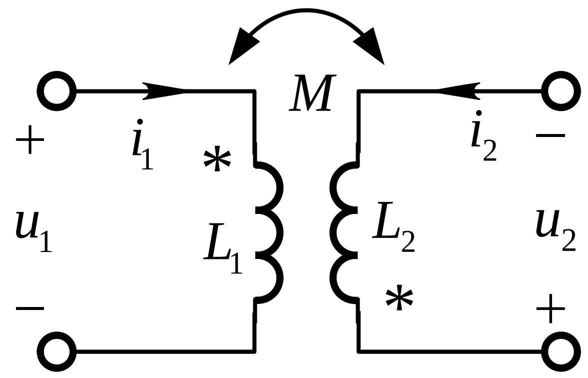
$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{\mathrm{d}\Psi_1}{\mathrm{d}t} = L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \pm M \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u_2 = \dfrac{\mathrm{d}\Psi_2}{\mathrm{d}t} = \pm M \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

自感电压：若 u_1、i_1 或 u_2、i_2 的参考方向相同，则 L_1 或 L_2 前应取正号；相反则取负号。

互感电压：若 u_1、 i_2 或 u_2、 i_1 的参考方向相对星标 * 是相同的，则 M 前取正号，否则应取负号。

[补充4.18]

列出图示互感元件的特性方程



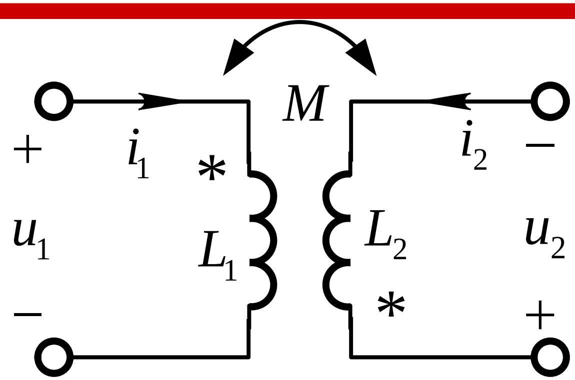
分析

1）端口 1 的电压和电流为关联参考方向，自感电压u_{11}前为正；

2）引起互感电压u_{12}的电流 i_2 参考方向是从所在端口2的非 * 指向 * 端，与引起u_{11}的电流 i_1从自端口 * 端指向非 * 端方向相反，因此 u_{12}前取 负；

$$u_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

4.9 耦合电感



$$u_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

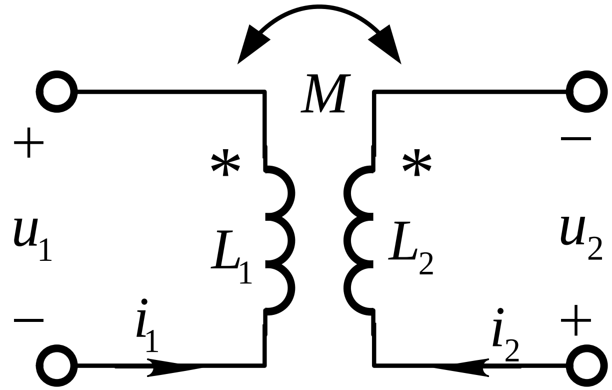
$$u_2 = M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

3）端口 2 的电压和电流为非关联参考方向,自感电压u_{22}前为负;

4）引起互感电压u_{21}的电流 i_1参考方向是从端口1的 * 指向非 * 端，相对与端口2来说与u_2的参考方向关联一致，故u_{21}前取 正。

$$u_2 = M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

4.9 耦合电感



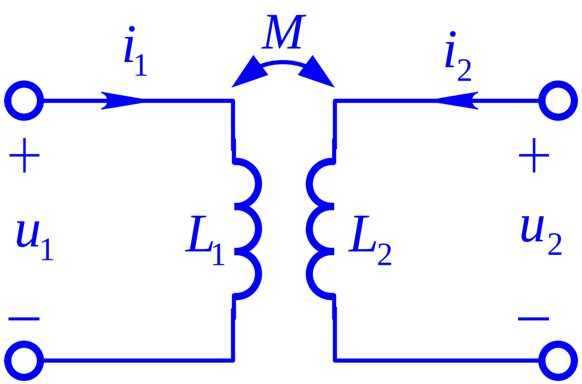
基于相似解释，图示互感元件的特性方程。

$$u_1 = -L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

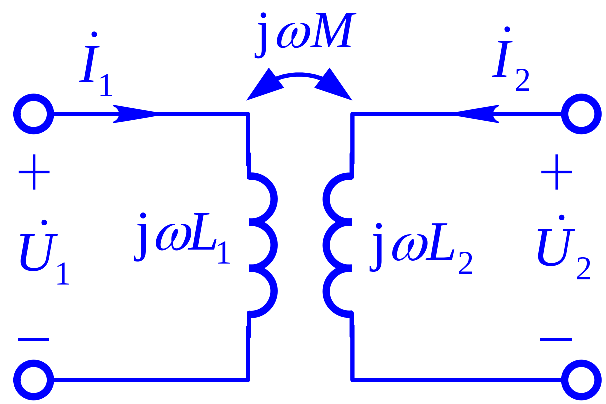
$$u_2 = M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

4.9 耦合电感

含互感电路的相量形式电路模型



(a)



(b)

互感元件的电路模型

微分方程

频域电路模型

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \pm M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u_2 &= \pm M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{aligned}\right\}$$

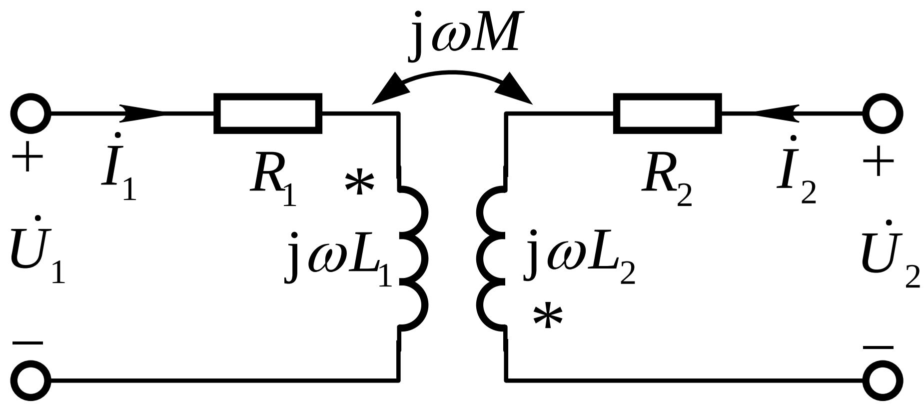
相量变换

微分规则

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \mathrm{j}\omega L_1\dot{I}_1 \pm \mathrm{j}\omega M\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 &= \pm\mathrm{j}\omega M\dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega L_2\dot{I}_2 \end{aligned}\right\}$$

4.9 耦合电感

一个实际耦合电感，一般需要考虑绕组电阻，此时可用带有串联等效电阻的互感来表示其电路模型



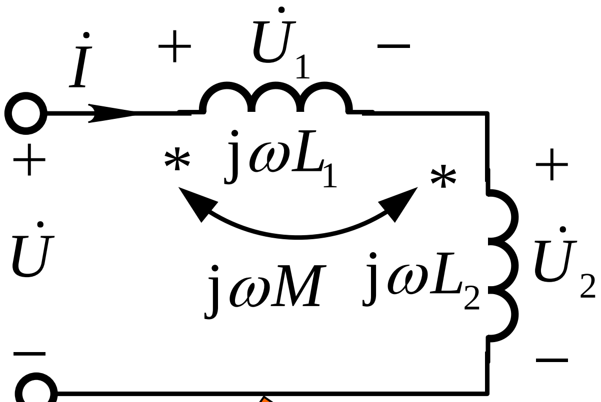
图中u_1与i_2参考方向相对星标*是相反的，u_2与i_1也是相反的，故M前均应取负号，端口特性方程将是：

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = R_1\dot{I}_1 + j\omega L_1\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = R_2\dot{I}_2 - j\omega M\dot{I}_1 + j\omega L_2\dot{I}_2 \end{cases}$$

4.9 耦合电感

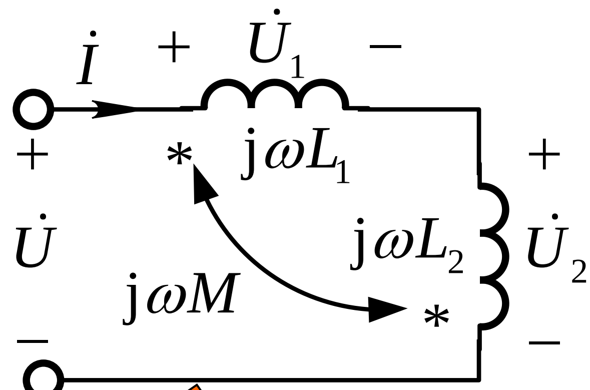
含互感元件电路的连接

1　互感元件的串联



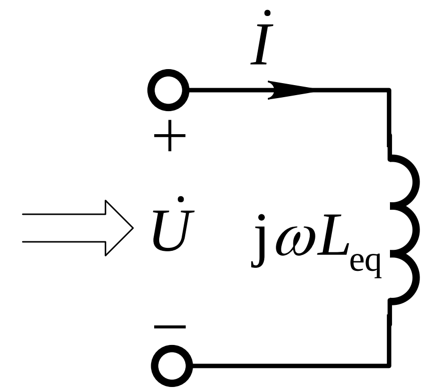
电流从同名端流入

→正串(或顺接)



电流从异名端流入

→反串(或反接)



$$L_{eq} = L_1 + L_2 \pm 2M$$

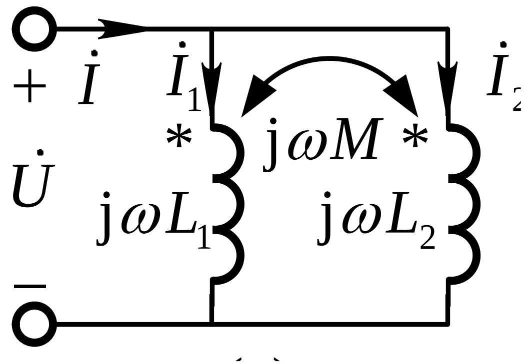
$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$$

$$= (\mathrm{j}\omega L_1 \dot{I} \pm \mathrm{j}\omega M \dot{I}) + (\pm \mathrm{j}\omega M \dot{I} + \mathrm{j}\omega L_2 \dot{I})$$

$$= \mathrm{j}\omega(L_1 + L_2 \pm 2M)\dot{I} = \mathrm{j}\omega L_{eq} \dot{I}$$

4.9 耦合电感

2　互感元件的并联



同名端连接

图示电路为两个同名端相接。为求其等效电路，分别列**KCL**和**KVL**方程：

$$\dot{U} = \mathrm{j}\omega L_1 \dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega M \dot{I}_2 \qquad (1)$$

$$\dot{U} = \mathrm{j}\omega M \dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega L_2 \dot{I}_2 \qquad (2)$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \qquad (3)$$

4.9 耦合电感

$$\dot{U} = \mathrm{j}\omega L_1 \dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega M \dot{I}_2 \qquad (1)$$

$$\dot{U} = \mathrm{j}\omega M \dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega L_2 \dot{I}_2 \qquad (2)$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \qquad (3)$$

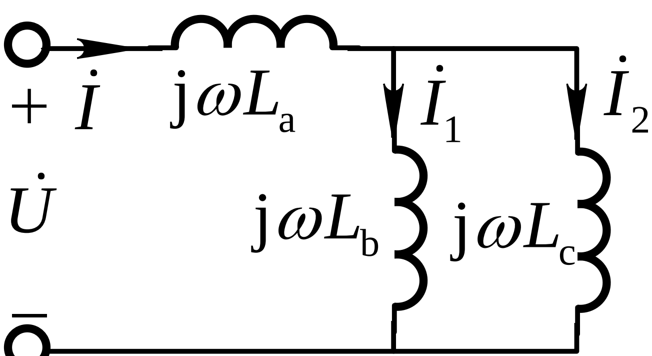
（3）代入（1）得：

$$\dot{U} = \mathrm{j}\omega M \dot{I} + \mathrm{j}\omega (L_1 - M)\dot{I}_1 = \mathrm{j}\omega L_\mathrm{a} \dot{I} + \mathrm{j}\omega L_\mathrm{b} \dot{I}_1$$

（3）代入（2）得：

$$\dot{U} = \mathrm{j}\omega M \dot{I} + \mathrm{j}\omega (L_2 - M)\dot{I}_2 = \mathrm{j}\omega L_\mathrm{a} \dot{I} + \mathrm{j}\omega L_\mathrm{c} \dot{I}_2$$

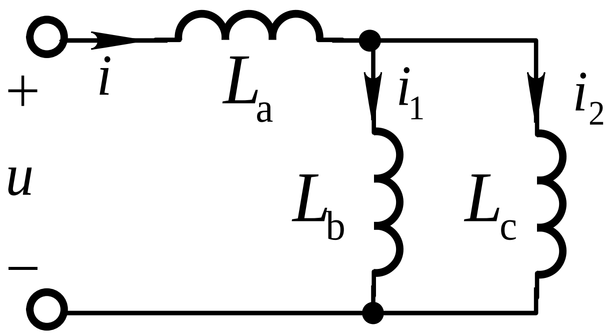
由此消去互感的等效电路



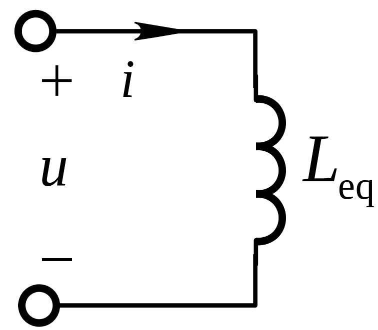
$$\left.\begin{aligned} L_\mathrm{a} &= M \\ L_\mathrm{b} &= L_1 - M \\ L_\mathrm{c} &= L_2 - M \end{aligned}\right\}$$

4.9 耦合电感

如无需计算电流i_1，i_2，根据电感的串、并联等效，可进一步等效成一个电感。



(b)

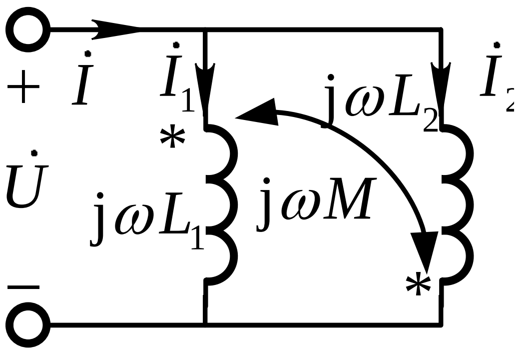


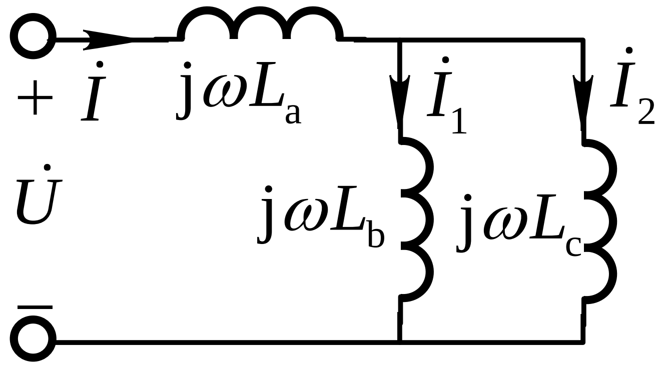
等效电感

$$L_{eq} = L_a + \frac{L_b L_c}{L_b + L_c} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

4.9 耦合电感

异名端连接时





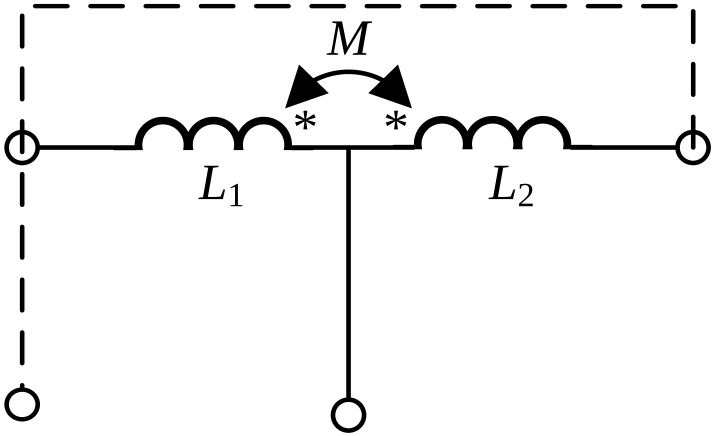
$$\left.\begin{aligned} L_a &= -M \\ L_b &= L_1 + M \\ L_c &= L_2 + M \end{aligned}\right\}$$

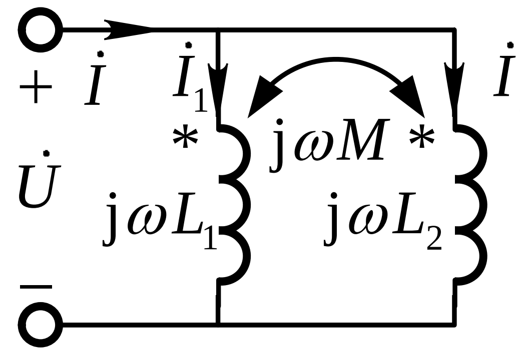
总等效电感为

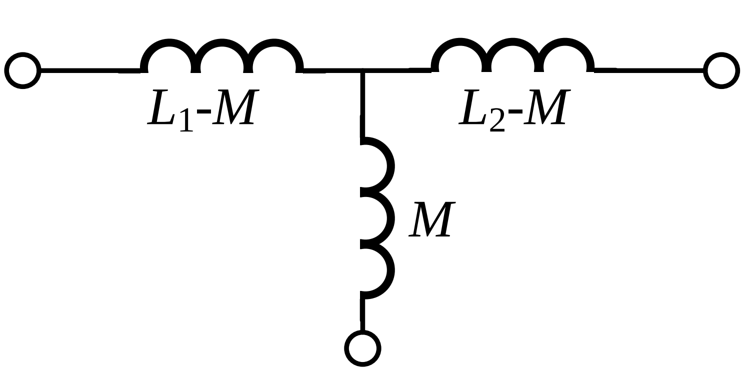
$$L' = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

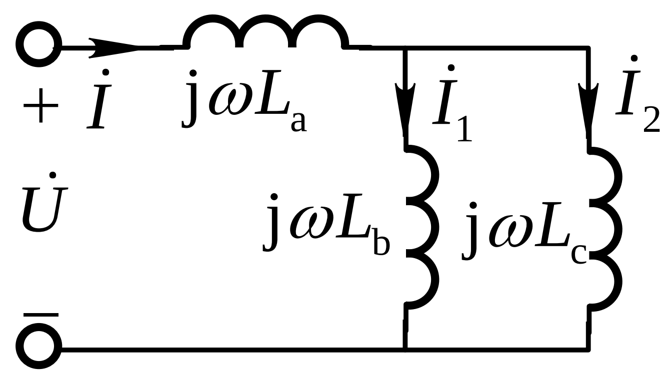
4.9 耦合电感

3 互感线圈的T型联接



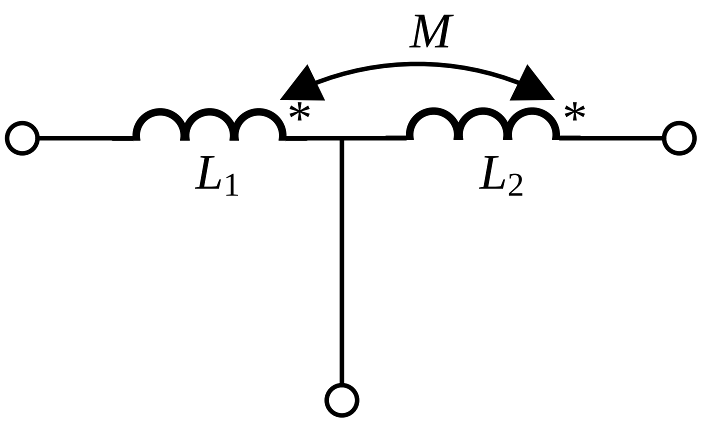


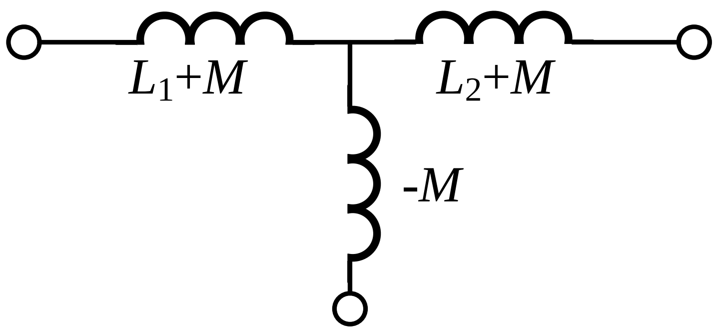




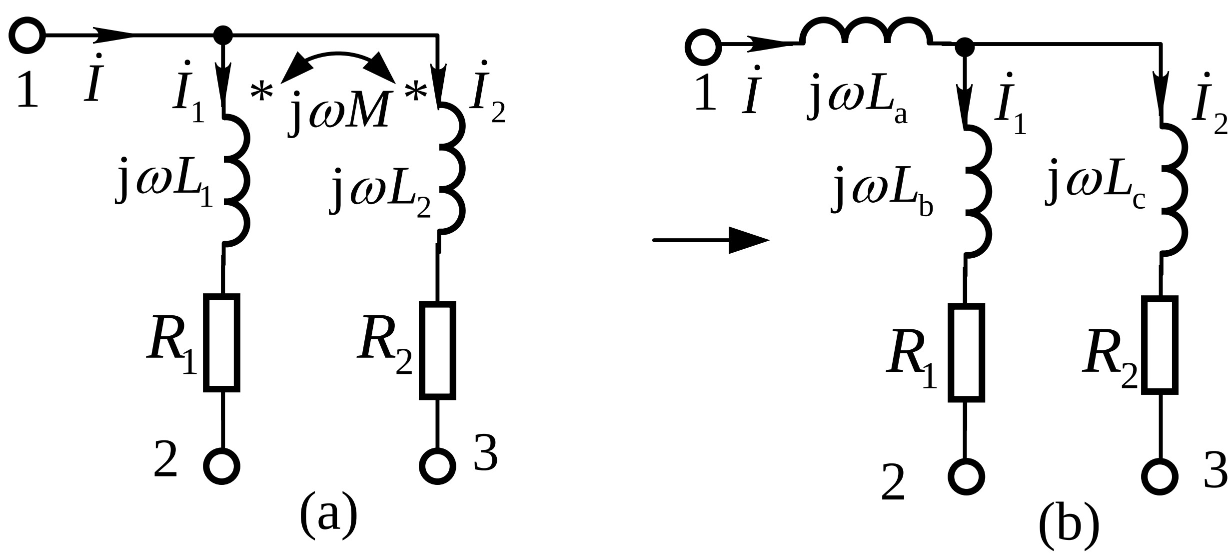
4.9 耦合电感

3 互感线圈的T型联接





接近实际的耦合电感电路模型



4.9 耦合电感

对于实际耦合线圈，无论何种串联或何种并联，其等效电感均为正值。所以自感和互感满足如下关系

$$L_{eq} = L_1 + L_2 \pm 2M \Longrightarrow M \le \frac{1}{2}(L_1 + L_2)$$

$$L' = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \mp 2M} \Longrightarrow M \le \sqrt{L_1 L_2}$$

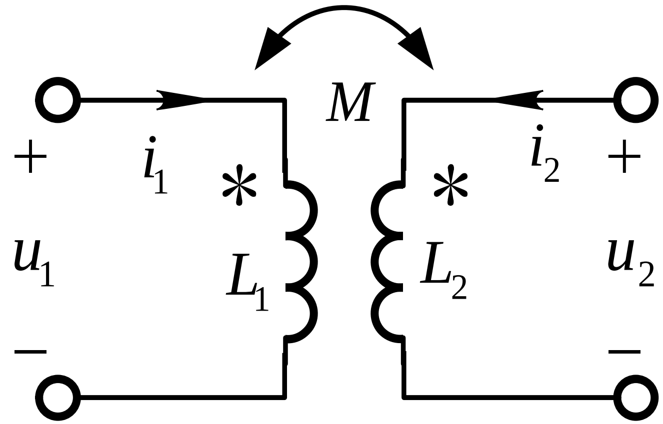
耦合系数：

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

$$0 \le k \le 1 \quad \begin{cases} k = 0 & \text{两个线圈无耦合} \\ k = 1 & \text{两个线圈全耦合} \end{cases}$$

4.9 耦合电感

互感总功率



$$P = u_1 i_1 + u_2 i_2$$

$$= [L_1(\mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t) \pm M(\mathrm{d}i_2/\mathrm{d}t)]i_1 + [\pm M(\mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t) + L_2(\mathrm{d}i_2/\mathrm{d}t)]i_2$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}L_1 i_1^2) \pm \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M i_1 i_2) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}L_2 i_2^2)$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}L_1 i_1^2 \pm M i_1 i_2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2) = \frac{\mathrm{d}w_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{w_\mathrm{m} = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 \pm M\, i_1\, i_2} \qquad w_\mathrm{m} \geq 0$$

4.9 耦合电感

$$w_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 \pm M\, i_1\, i_2 \qquad\qquad w_{\mathrm{m}} \geq 0$$

如果没有磁耦合，$M=0$，磁能就是两个自感元件分别储能之和。存在磁耦合时，要增减一项$M\, i_1\, i_2$，增与减要视互感的作用是使磁场增强还是使磁场减弱而定。