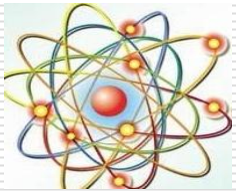
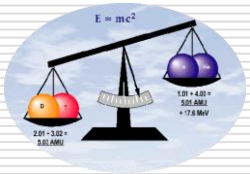




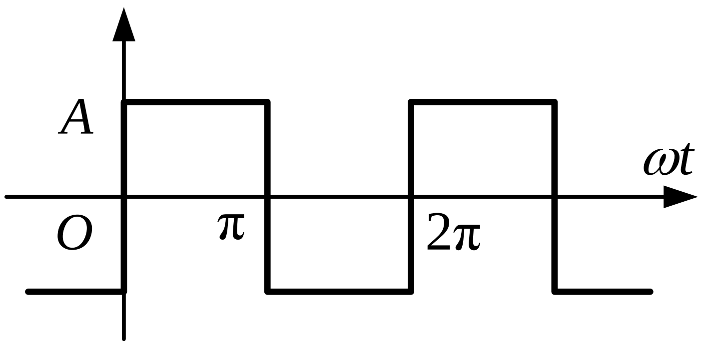
第6章 非正弦周期电流电路

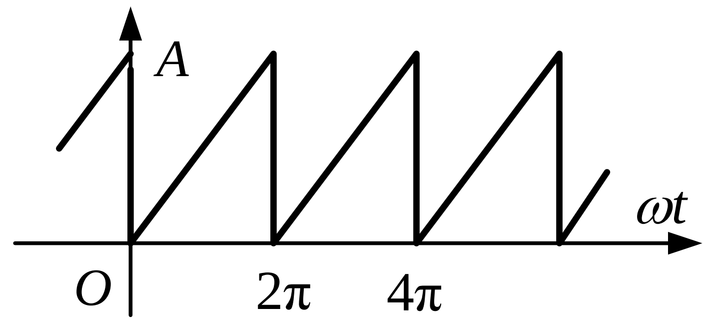
开课教师： 王灿

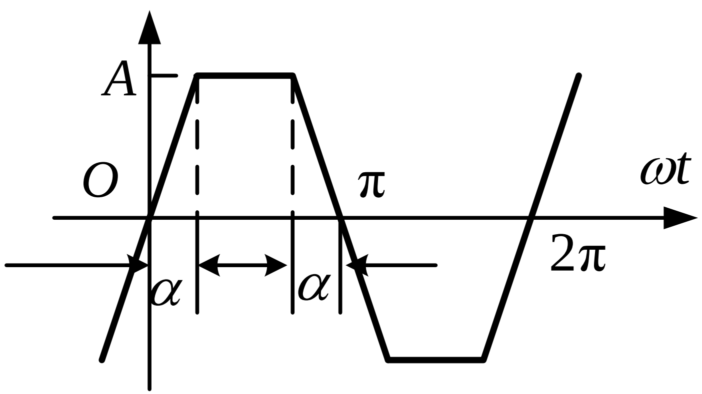
开课单位：机电学院--电气工程学科

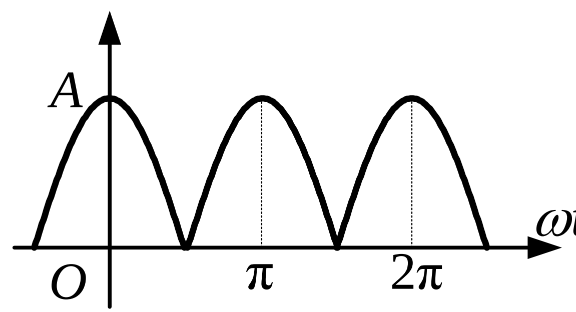
第6章 非正弦周期电流电路

在电气、电子及通讯等工程领域广泛存在非正弦周期电流电路，其中的电流和电压是时间的非正弦周期函数。









第6章 非正弦周期电流电路

提要：本章介绍应用傅里叶级数和叠加定理分析非正弦周期电流电路的方法，讨论非正弦周期电流、电压的有效值和平均功率的计算。

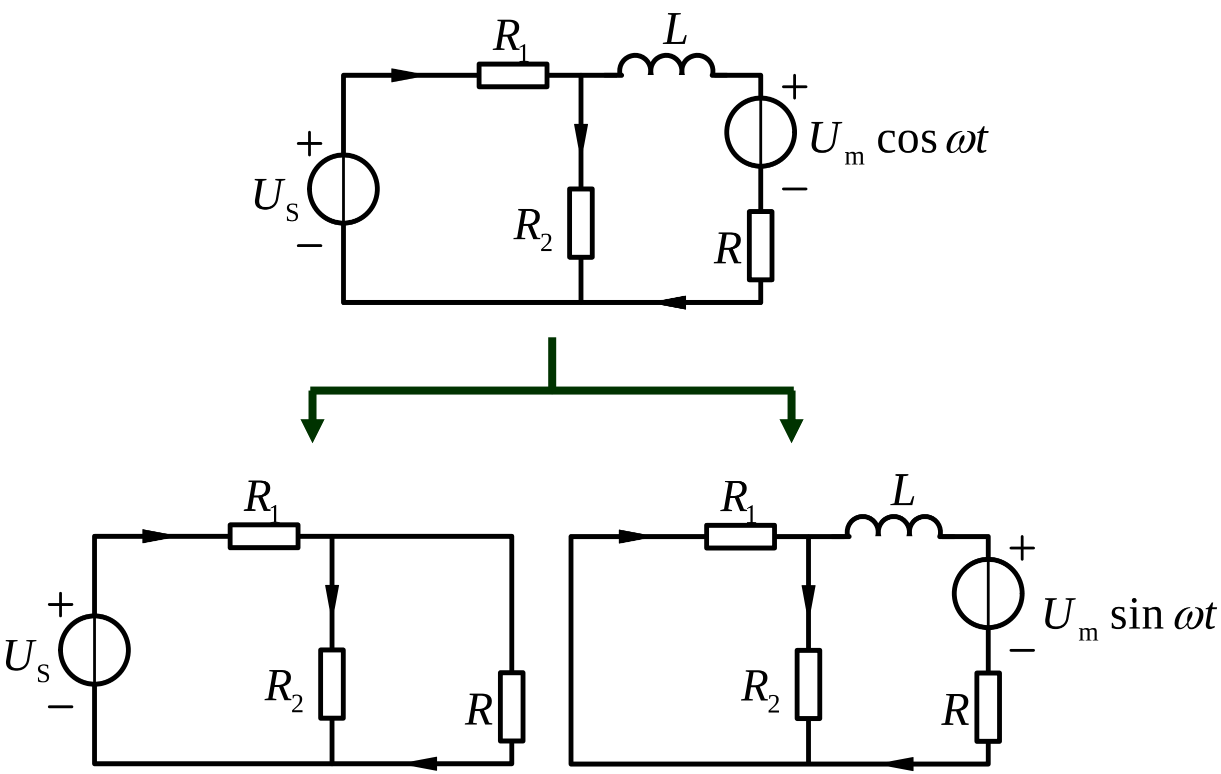
重点：非正弦周期电流、电压的有效值和平均功率的计算；非正弦周期电流电路的谐波分析方法。

本章目次

6.1 非正弦周期电流和电压

基本要求：初步了解电路中非正弦周期信号产生的原因。

1.当电路中有直流电源和正弦电源同时作用时

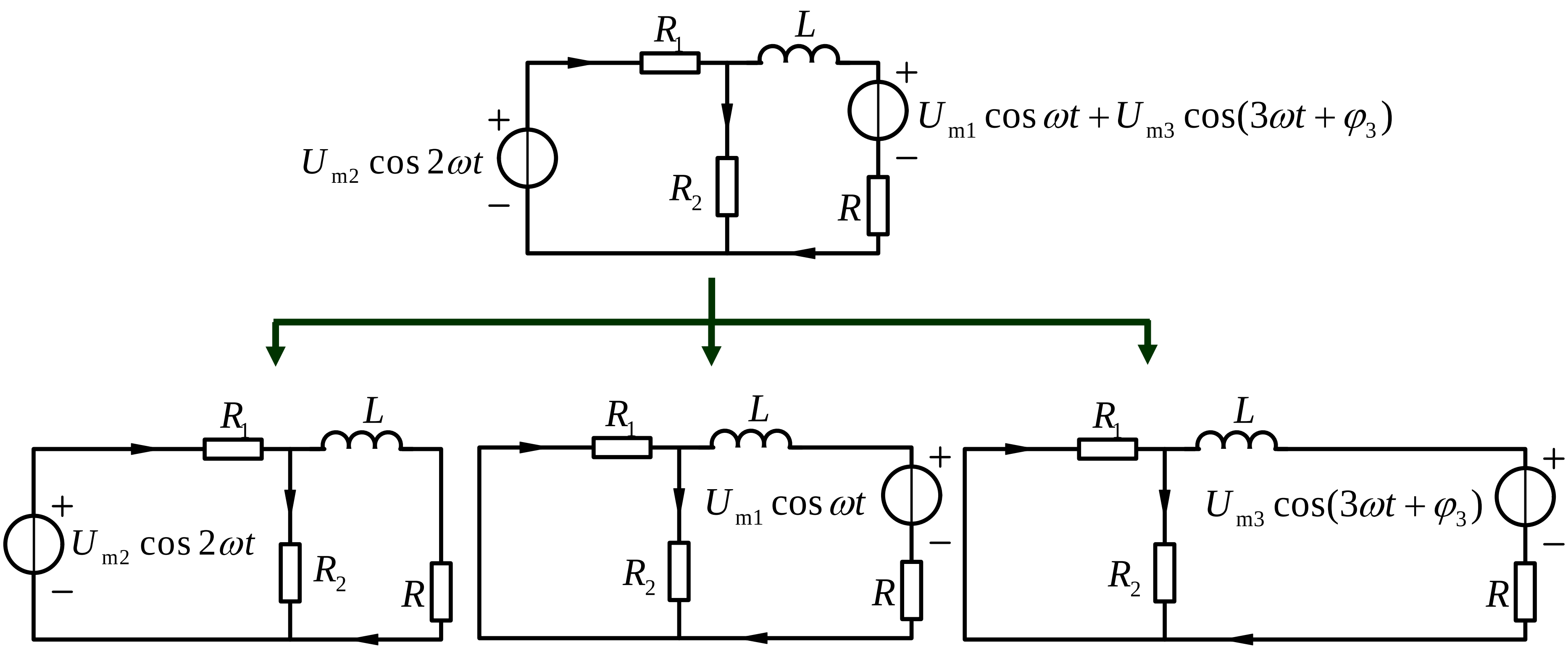


引起的电流是非正弦周期电流，如何解决？

根据叠加定理，分别计算直流和正弦电源单独作用引起的响应，然后将瞬时值结果叠加。

6.1 非正弦周期电流和电压

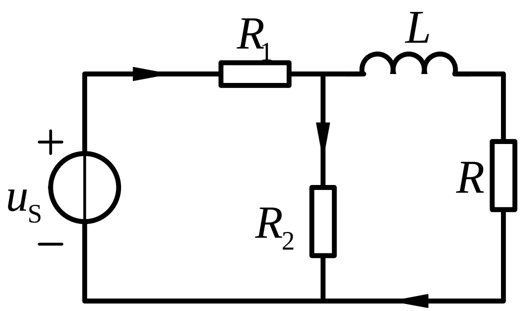
2.当电路中有不同频率的正弦电源同时作用时

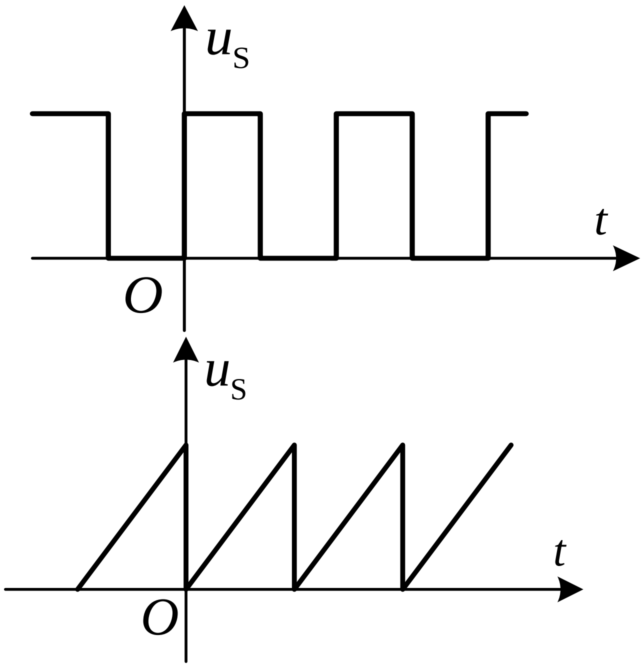


根据叠加定理，分别计算不同频率的响应，然后将瞬时值结果叠加。

6.1 非正弦周期电流和电压

3.非正弦周期电压源或电流源（例如方波、锯齿波）





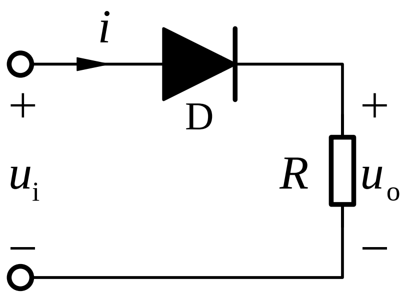
引起的响应也是非正弦周期量，如何求响应？

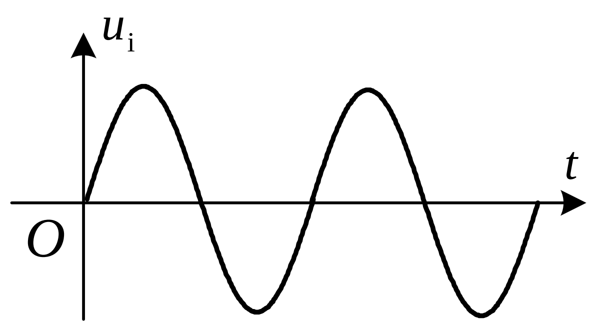
⇓

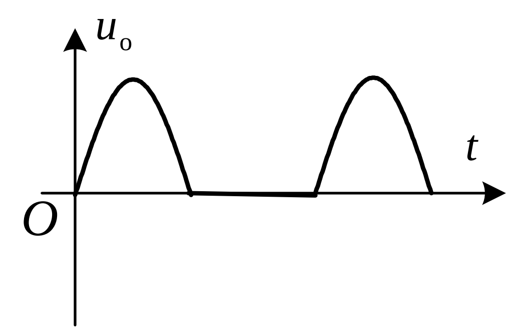
将给定的非正弦周期电源电压或电流分解为傅里叶级数，其中包含恒定分量和一系列不同频率的正弦分量，再根据线性电路的叠加定理计算电路的响应。

6.1 非正弦周期电流和电压

4.由非线性元件引起的非正弦周期电流或电压。







引起的响应也是非正弦周期量，如何求响应?

将给定的非正弦周期电源电压或电流分解为傅里叶级数，其中包含恒定分量和一系列不同频率的正弦分量，再根据线性电路的叠加定理计算电路的响应。

6.2 非正弦周期函数的傅里叶级数

基本要求：了解非正弦周期函数的傅里叶级数分解，理解谐波的概念。

主要内容

一、傅里叶级数分解

二、频谱的概念

三、几种常见周期函数的傅里叶级数

一、傅里叶级数分解

一、傅里叶级数分解

周期为T 的周期函数 $f(t)$可表示为

$$f(t) = f(t + kT) \quad k = 0, 1, 2 \cdots$$

当其满足狄里赫利条件即：

1) $f(t)$在任何一个周期内，连续或存在有限个间断点；

2) $f(t)$在任何一个周期内，只有有限个极值点；

3) 在任何一个周期内，函数绝对值的积分为有界值，即

$$\int_0^T |f(t)| \mathrm{d}t \quad \text{存在}$$

$f(t)$可以分解为如下的傅里叶级数

$$f(t) = A_0 + [\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)]$$

一、傅里叶级数分解

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)]$$

$\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$为角频率

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}(\omega_1 t)$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega_1 t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(k\omega_1 t)\mathrm{d}(\omega_1 t)$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega_1 t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(k\omega_1 t)\mathrm{d}(\omega_1 t)$$

一、傅里叶级数分解

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)]$$

在电工中常用形式

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{mk} \cos(k\omega_1 t + \psi_k)$$

其中

$$\begin{cases} a_k = A_{mk} \cos\psi_k \\ b_k = -A_{mk} \sin\psi_k \end{cases} \qquad \begin{cases} A_{mk} = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \\ \psi_k = \arctan\left(\dfrac{-b_k}{a_k}\right) \end{cases}$$

一、傅里叶级数分解

$$f(t)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_{mk}\cos(k\omega_1 t+\psi_k)$$

A_0 —恒定分量（直流分量）

$A_{m1}\cos(\omega_1 t+\psi_1)$ —**基波**分量（1次谐波） $k=1$

A_{m1} —基波振幅

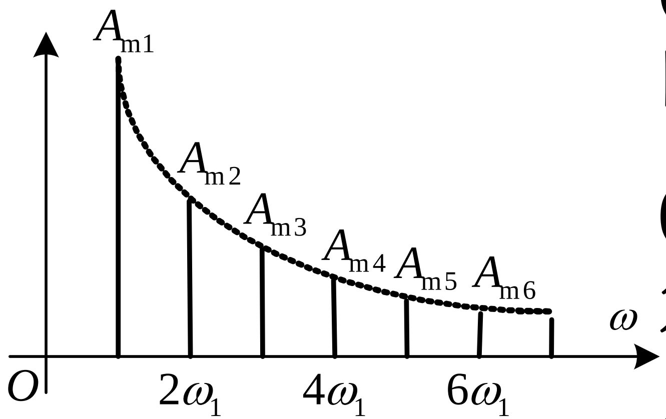
ψ_1 —基波初相

$A_{m2}\cos(2\omega_1 t+\psi_2)$ —2次**谐波** $k=2$

$A_{mk}\cos(k\omega_1 t+\psi_k)$ —*k*次谐波

二、频谱的概念

谐波振幅 A_{mk} 随角频率 $k\omega_1$ 变动的情形称为非正弦波的**振幅频谱**。



振幅频谱

(1). 竖线称为**谱线**，长度表示A_{mk}的量值；

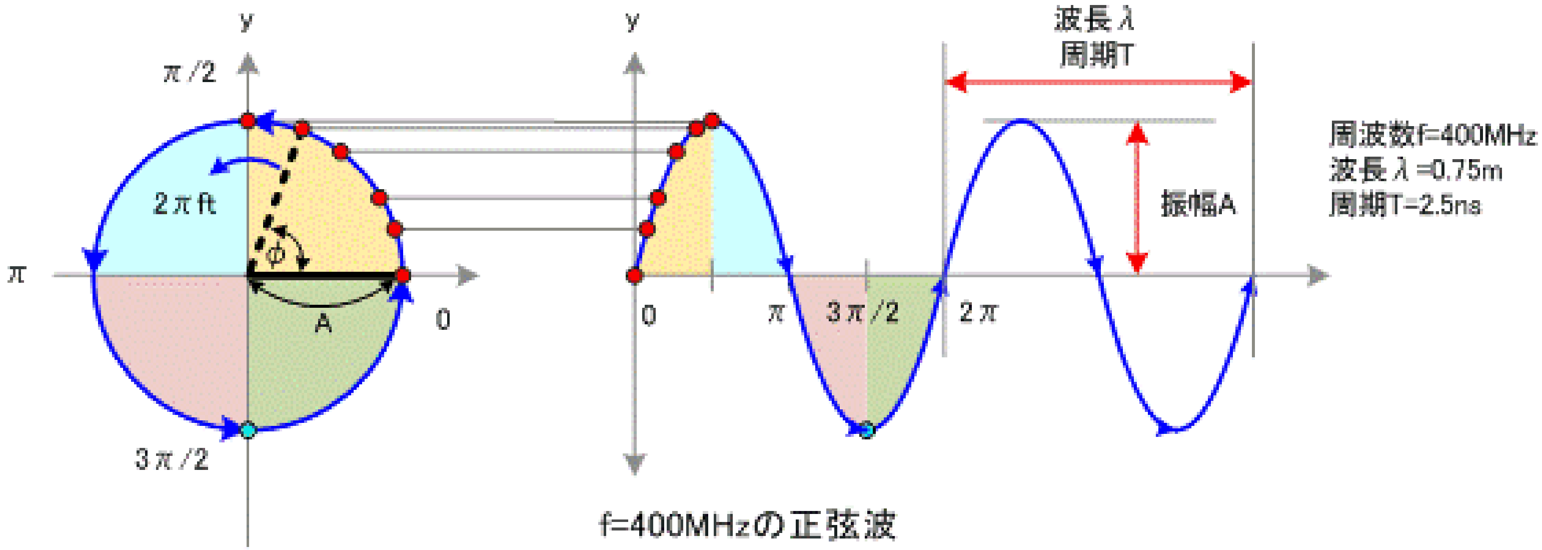
(2). 相邻两谱线的间隔等于基波角频率ω_1。

(3). 谱线间具有一定间隔的频谱称为**离散频谱**，也称线频谱。

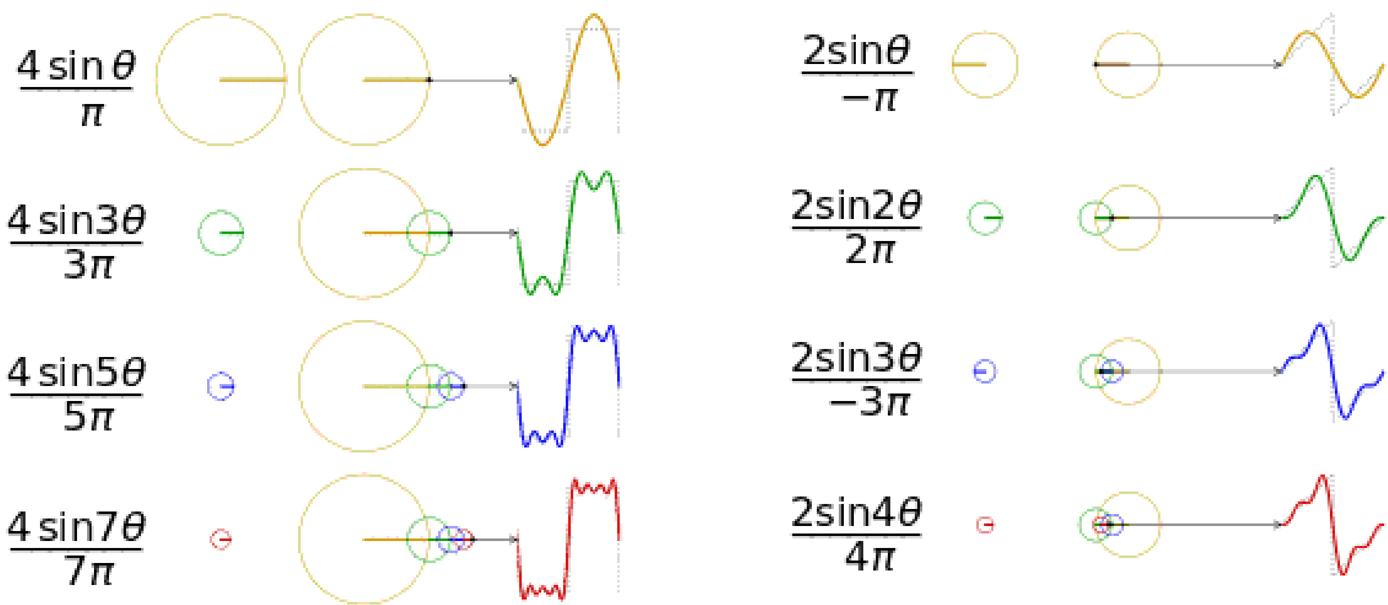
振幅频谱**直观、形象**地表示一个周期函数分解为傅里叶级数后所含有的频率分量以及各分量所占“比重”。

谐波初相 ψ_k随角频率 $k\omega_1$变动的情形称为非正弦波的**相位频谱**。

一、傅里叶级数分解

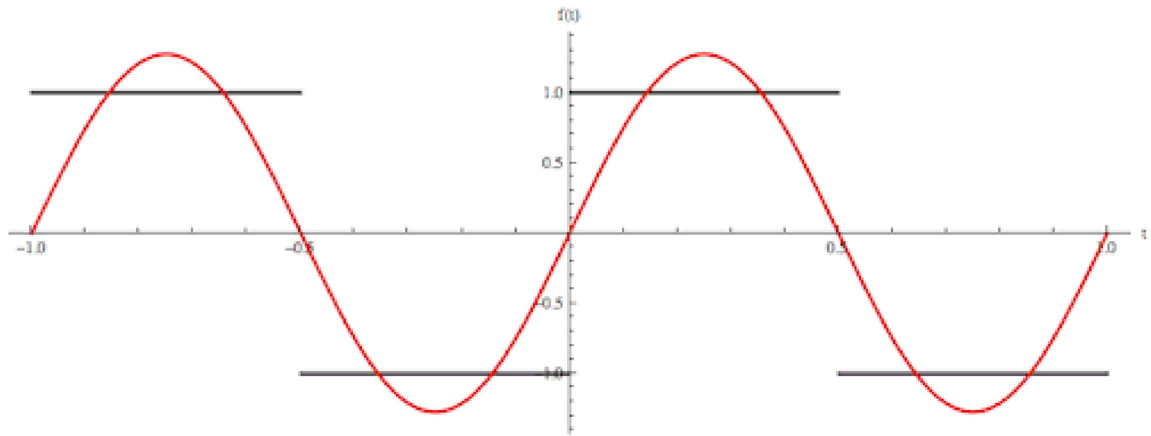


波長λ
周期T
周波数f=400MHz
波長λ=0.75m
周期T=2.5ns
振幅A
2πft
φ
A
π/2
π
3π/2
0
2π
3π/2
f=400MHzの正弦波

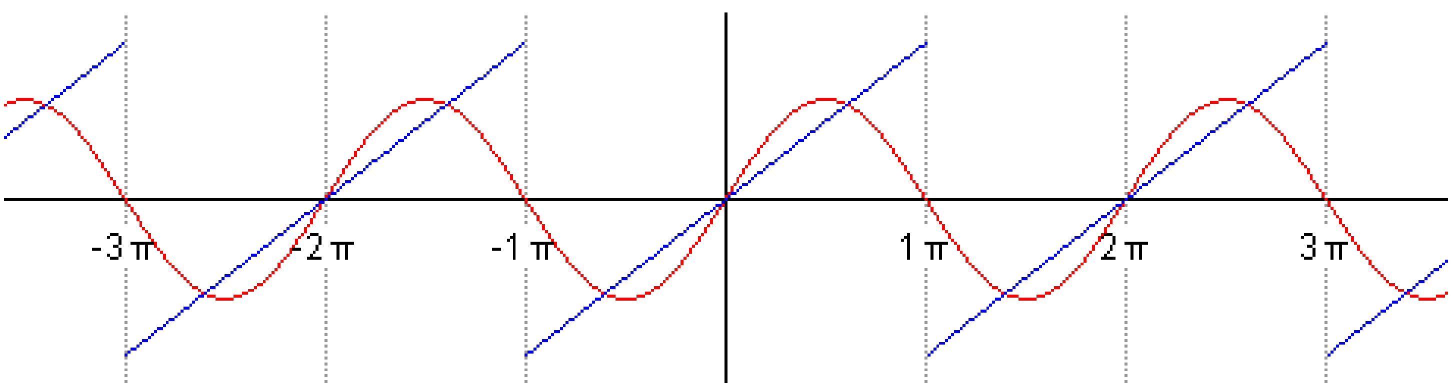


$\frac{4\sin\theta}{\pi}$
$\frac{4\sin3\theta}{3\pi}$
$\frac{4\sin5\theta}{5\pi}$
$\frac{4\sin7\theta}{7\pi}$
$\frac{2\sin\theta}{-\pi}$
$\frac{2\sin2\theta}{2\pi}$
$\frac{2\sin3\theta}{-3\pi}$
$\frac{2\sin4\theta}{4\pi}$

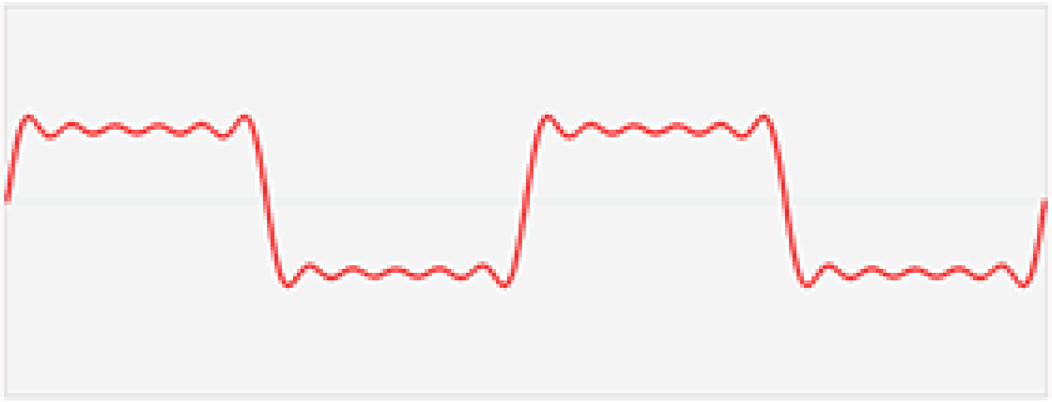
一、傅里叶级数分解



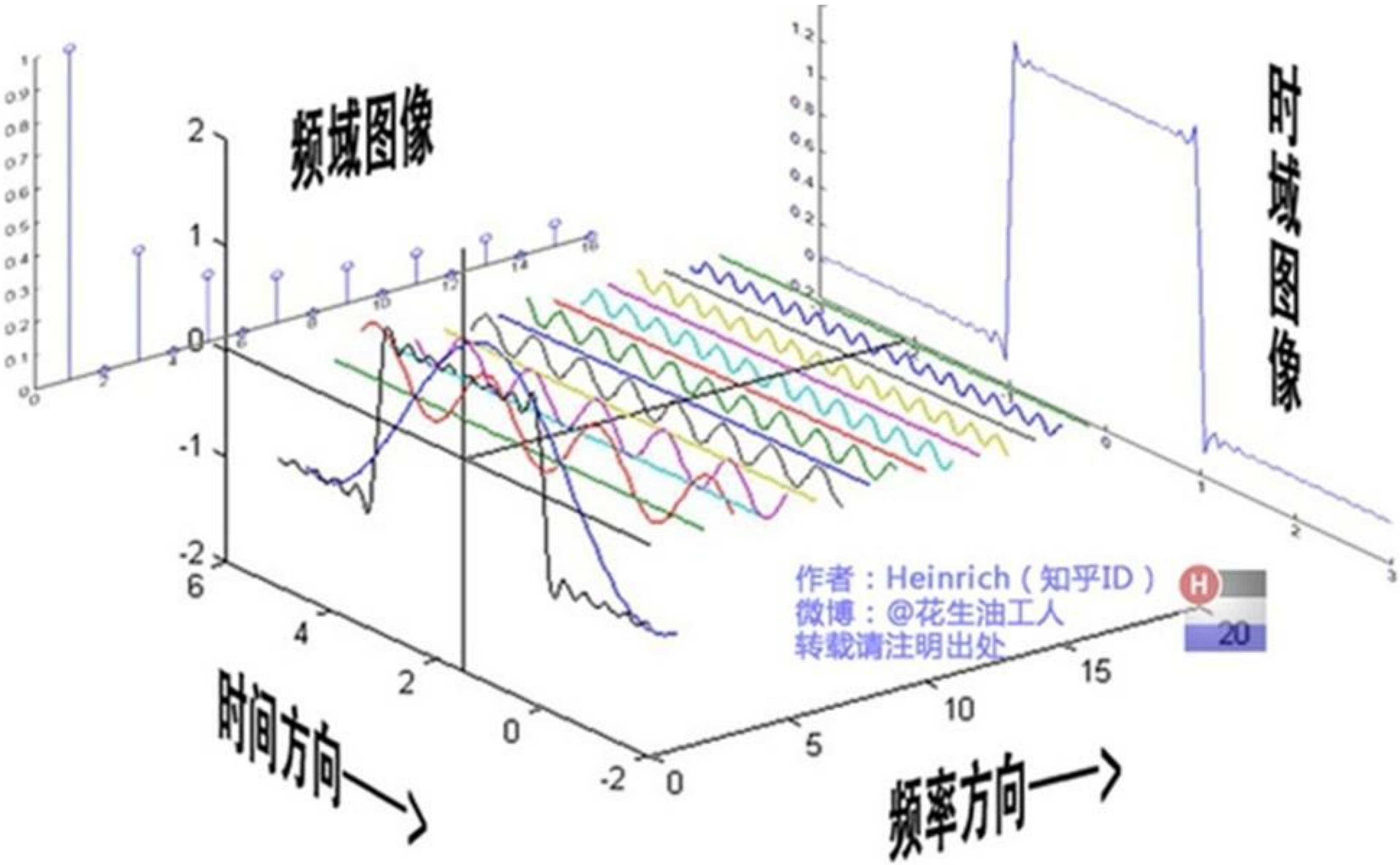
$f(t)=\frac{4\,\mathrm{Sin}[2\pi t]}{\pi}$



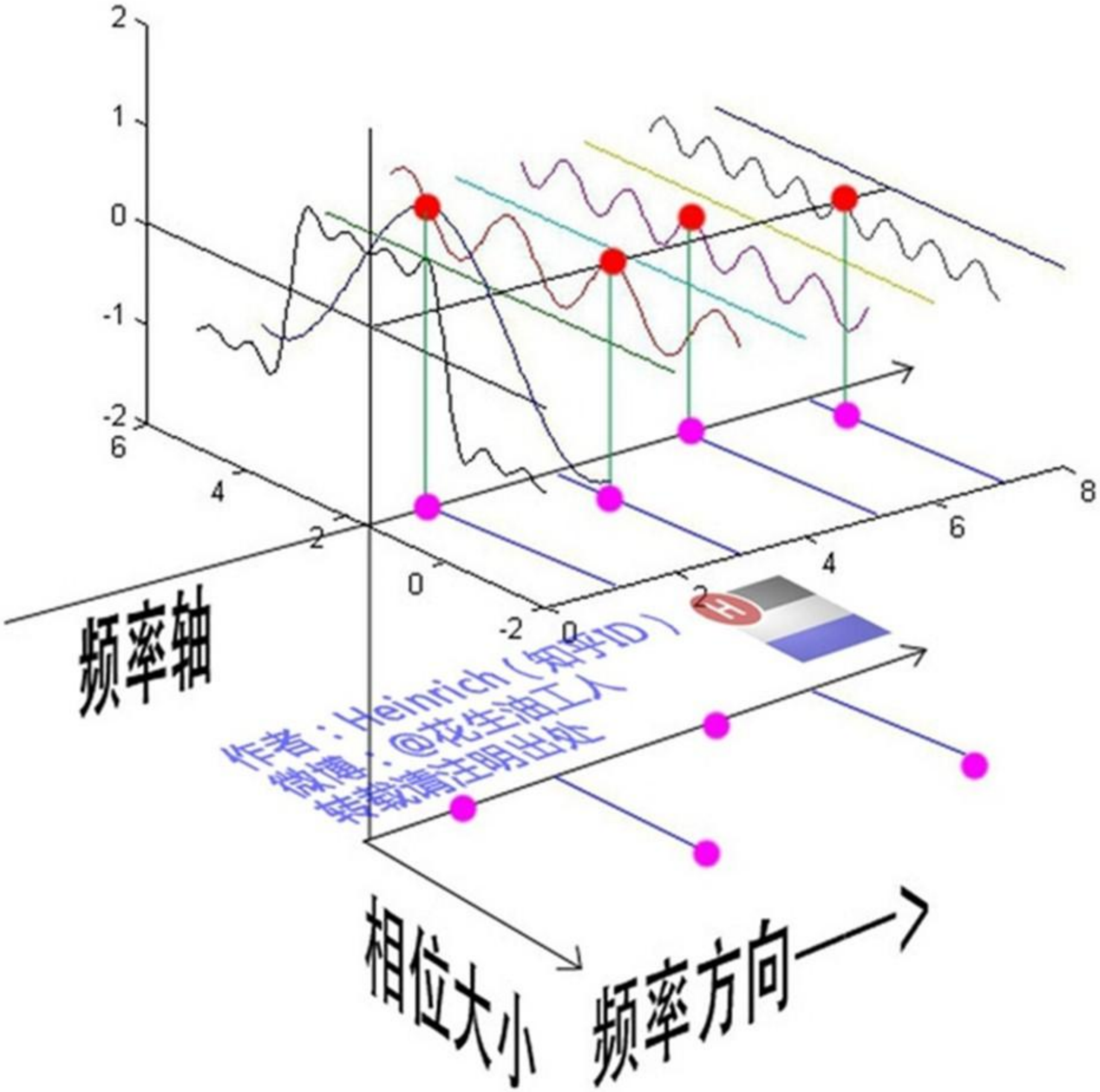
一、傅里叶级数分解



一、傅里叶级数分解



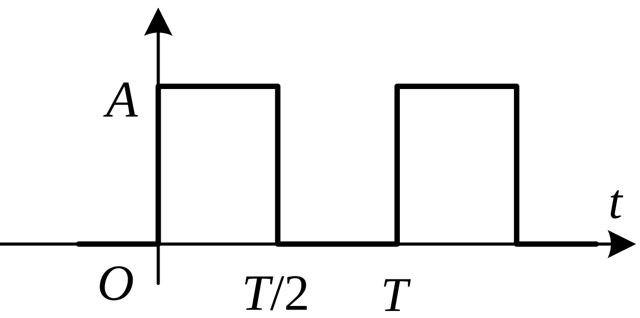
一、傅里叶级数分解



2
1
0
-1
-2
6
4
2
0
-2
0
2
4
6
8
频率轴
作者：Heinrich（知乎ID）
微博：@花生油工人
转载请注明出处
相位大小
频率方向——>

【例题6.1 】

求图所示周期性方波的傅里叶展开式，并画其频谱。



周期性方波

【解】所给波形在一个周期内的表达式：

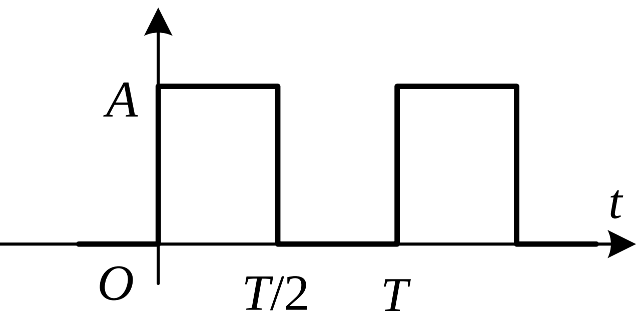
$$f(t)=\begin{cases} A, & 当0<t\le T/2 \\ 0, & 当T/2<t\le T \end{cases}$$

根据：$A_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}(\omega_1 t)$

解得：$A_0=\frac{1}{T}\int_0^{T/2} A\mathrm{d}t=\frac{A}{2}$

【例题6.1 】

求图所示周期性方波的傅里叶展开式，并画其频谱。



周期性方波

【解】所给波形在一个周期内的表达式：

$$f(t)=\begin{cases} A, & 当 0<t\le T/2 \\ 0, & 当 T/2<t\le T \end{cases}$$

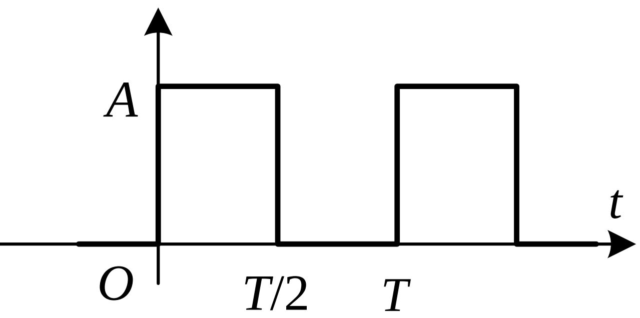
根据：$a_k=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\cos(k\omega_1 t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(k\omega_1 t)\mathrm{d}(\omega_1 t)$

解得：$a_k=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} A\cos(k\omega_1 t)\mathrm{d}t \quad =\dfrac{2A}{k\omega_1 T}\int_0^{T/2}\cos(k\omega_1 t)\mathrm{d}(k\omega_1 t)$

$$=\frac{2A}{k\omega_1 T}\sin(k\omega_1 t)\Big|_0^{T/2} \quad =\frac{2A}{k\omega_1 T}\sin(k\omega_1 \frac{2\pi/\omega_1}{2})=0$$

【例题6.1 】

求图所示周期性方波的傅里叶展开式，并画其频谱。



周期性方波

【解】所给波形在一个周期内的表达式：

$$f(t)=\begin{cases}A, & \text{当}0<t\leq T/2\\ 0, & \text{当}T/2<t\leq T\end{cases}$$

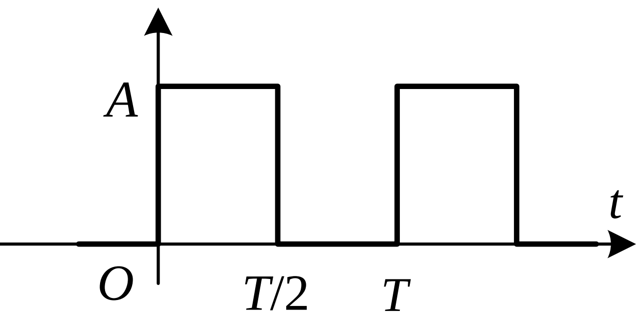
根据：$b_k=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\sin(k\omega_1 t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(k\omega_1 t)\mathrm{d}(\omega_1 t)$

解得：$b_k=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} A\sin(k\omega_1 t)\mathrm{d}t=\dfrac{2A}{k\omega_1 T}(-\cos k\omega_1 t)\Big|_0^{T/2}$

$$=\frac{A}{k\pi}(1-\cos k\pi)=\begin{cases}\dfrac{2A}{k\pi} & (k=1,3,5,\cdots)\\ 0 & (k=2,4,6,\cdots)\end{cases}$$

【例题6.1 】

求图所示周期性方波的傅里叶展开式，并画其频谱。



周期性方波

【解】 $A_0 = \dfrac{A}{2}$ $\qquad a_k = 0$

$$b_k = \begin{cases} \dfrac{2A}{k\pi} & (k = 1,3,5,\cdots) \\ 0 & (k = 2,4,6,\cdots) \end{cases}$$

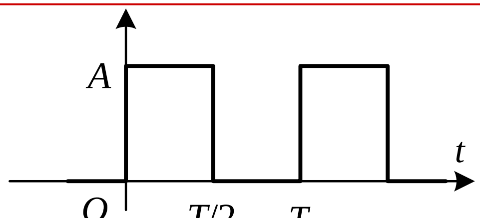
$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)]$$

$$= \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}(\sin\omega_1 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_1 t + \cdots)$$

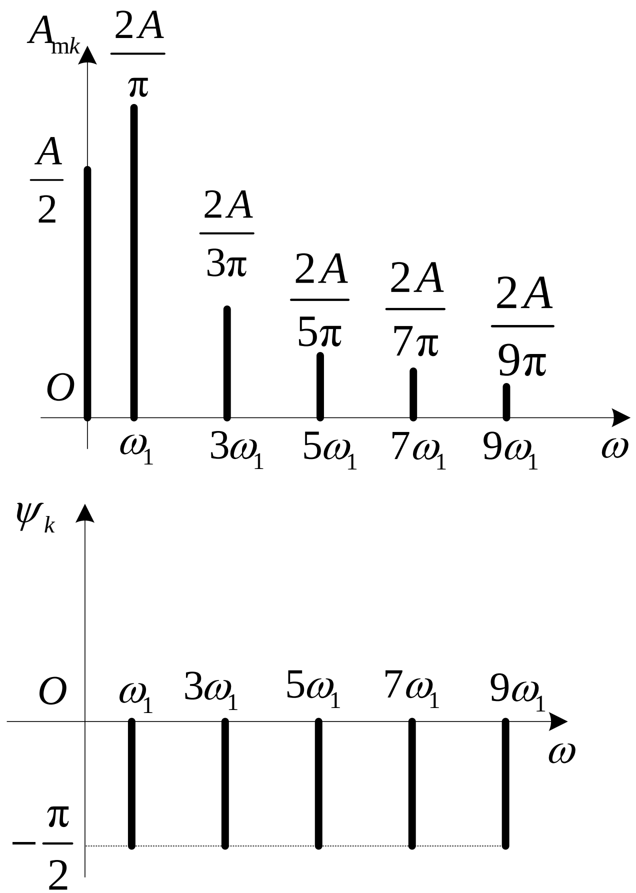
$$= \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin[(2n-1)\omega_1 t]$$

【例题6.1 】

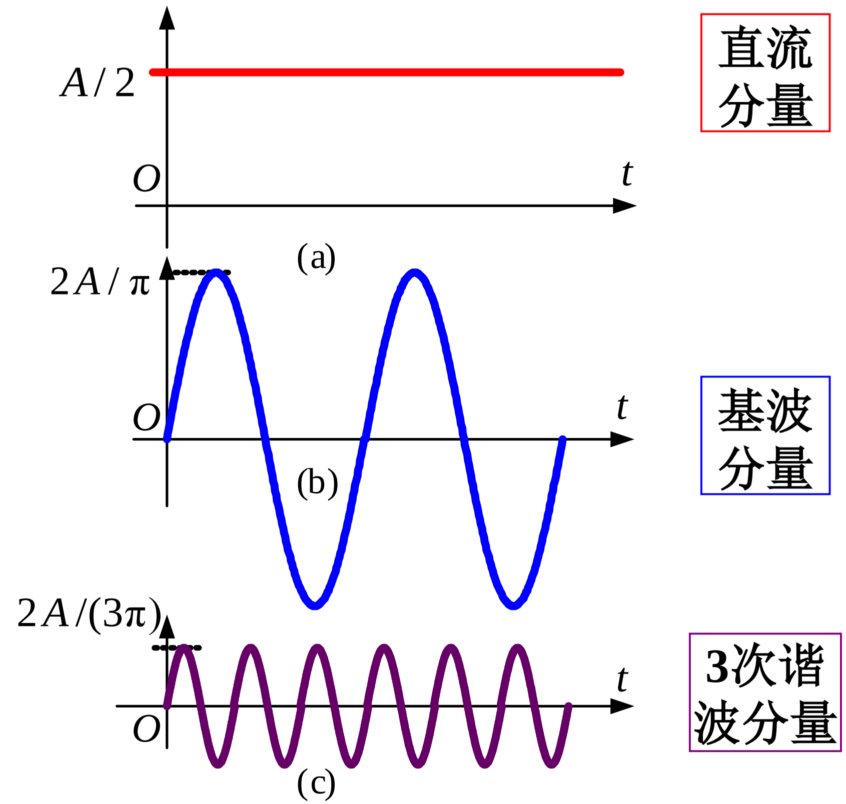
【解】 $$f(t)=\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin[(2n-1)\omega_1 t]$$



周期性方波

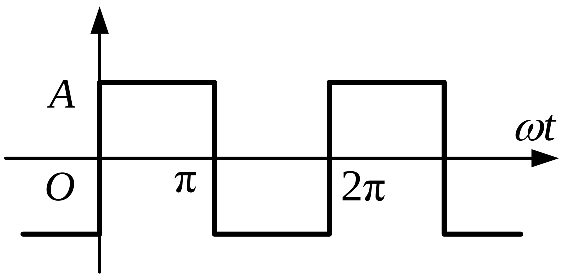
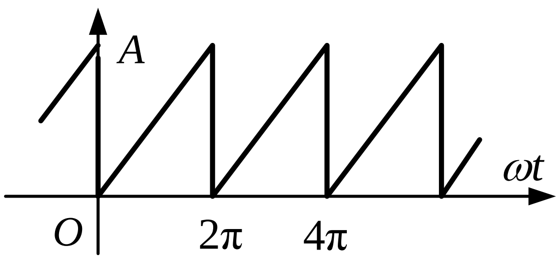
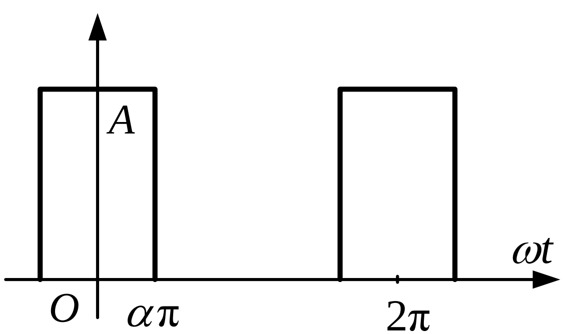


周期性方波的振幅频谱和相位频谱

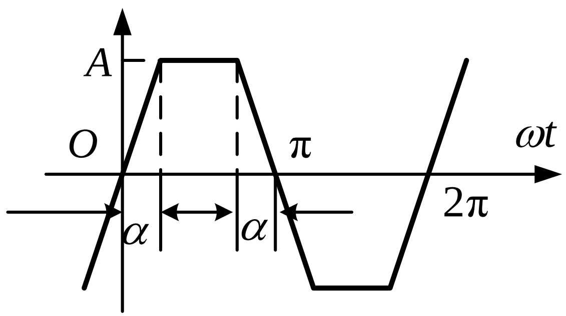
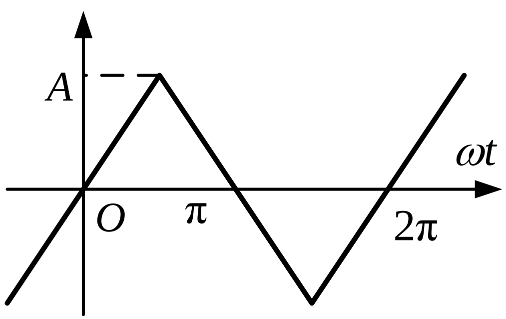
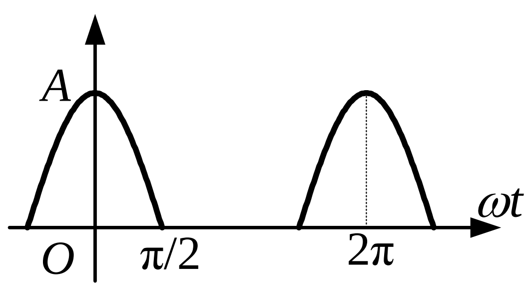


周期性方波的波形分解

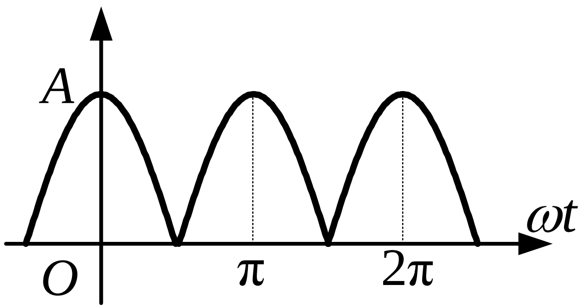
三、几种常见周期函数的傅里叶级数

$f(t)$的波形图	$f(t)$的傅里叶级数
	$f(t)=\frac{4A}{\pi}\left[\sin(\omega_1 t)+\frac{1}{3}\sin(3\omega_1 t)+\frac{1}{5}\sin(5\omega_1 t)+\cdots+\frac{1}{k}\sin(k\omega_1 t)+\cdots\right]$ (k为奇数)
	$f(t)=\frac{A}{2}-\frac{A}{\pi}\left[\sin(\omega_1 t)+\frac{1}{2}\sin(2\omega_1 t)+\frac{1}{3}\sin(3\omega_1 t)+\cdots+\frac{1}{k}\sin(k\omega_1 t)+\cdots\right]$
	$f(t)=\alpha A+\frac{2A}{\pi}\left[\sin(\alpha\pi)\cos(\omega_1 t)+\frac{1}{2}\sin(2\alpha\pi)\cos(2\omega_1 t)+\frac{1}{3}\sin(3\alpha\pi)\cos(3\omega_1 t)+\cdots\right]$

三、几种常见周期函数的傅里叶级数

f **(*t*)的波形图**	***f*** **(*t*)的傅里叶级数**
	$f(t)=\dfrac{4A}{\alpha\pi}\left[\sin\alpha\sin(\omega_1 t)+\dfrac{1}{9}\sin(3\alpha)\sin(3\omega_1 t)+\cdots+\dfrac{1}{k^2}\sin(k\alpha)\sin(k\omega_1 t)+\cdots\right]$ (k为奇数)
	$f(t)=\dfrac{8A}{\pi^2}\left[\sin(\omega_1 t)-\dfrac{1}{9}\sin(3\omega_1 t)+\dfrac{1}{25}\sin(5\omega_1 t)-\cdots+\dfrac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k^2}\sin(k\omega_1 t)+\cdots\right]$ (k为奇数)
	$f(t)=\dfrac{2A}{\pi}\left[\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{4}\cos(\omega_1 t)+\dfrac{1}{1\times 3}\cos(2\omega_1 t)-\dfrac{1}{3\times 5}\cos(4\omega_1 t)+\cdots-\dfrac{(-1)^{\frac{k-2}{2}}}{k^2-1}\cos(k\omega_1 t)+\cdots\right]$ (除基波外k为偶数)

三、几种常见周期函数的傅里叶级数

$f(t)$的波形图	$f(t)$的傅里叶级数
	$f(t)=\frac{4A}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{1\times 3}\cos(2\omega_1 t)-\frac{1}{3\times 5}\cos(4\omega_1 t)+\cdots-\frac{(-1)^{\frac{k-2}{2}}}{k^2-1}\cos(k\omega_1 t)+\cdots\right]$ (k为偶数)

<u>傅里叶级数的截取项数</u>，要根据级数的收敛速度和电路的频率特性两个方面综合考虑。