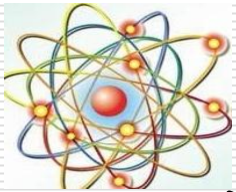
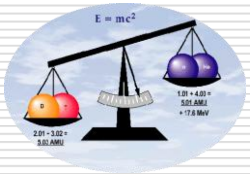




第6章 非正弦周期电流电路

6.3 非正弦周期量的有效值平均功率

6.4非正弦周期电流电路的计算

开课教师：　王灿

开课单位：机电学院--电气工程学科

6.3 非正弦周期量的有效值　平均功率

基本要求：熟练掌握非正弦周期量有效值和平均功率的计算。

主要内容

一、非正弦周期量的有效值

二、非正弦周期电流电路的平均功率

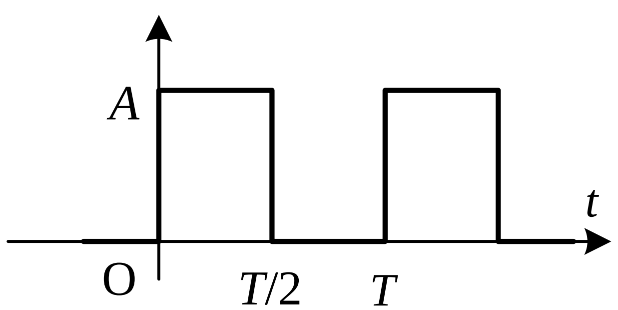
一、非正弦周期量的有效值

周期量的有效值等于其瞬时值的方均根值，即

$$A=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [f(t)]^2 \mathrm{d}t}$$

1. 当给出函数 ***f* (*t*)** 在一个周期内的表达式，可以直接代入上式计算有效值。

【补充6.1 】计算图示方波的有效值



周期性方波

【解】 $f(t)=\begin{cases} A, 当0<t\le T/2 \\ 0, 当T/2<t\le T \end{cases}$

$$F=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{T/2} A^2 \mathrm{d}t}=\frac{A}{\sqrt{2}}$$

一、非正弦周期量的有效值

2．有效值与各次谐波有效值的关系

$$f(t)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_{\mathrm{m}k}\cos(k\omega_1 t+\psi_k)$$

根据有效值定义，可得

$$A=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T[A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_{\mathrm{m}k}\cos(k\omega_1 t+\psi_k)]^2\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{A=\sqrt{A_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}A_{\mathrm{m}k}^2}=\sqrt{A_0^2+A_1^2+A_2^2+\cdots}}$$

恒定分量

各次谐波有效值

任意周期量的有效值等于它的恒定分量、基波分量与各谐波分量有效值的平方和的平方根。

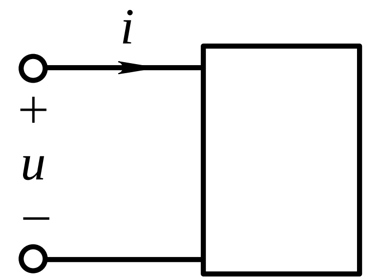
【例题6.2 】

已知周期电流 $i=[1+0.707\cos(\omega_1 t-20^\circ)+0.42\cos(2\omega_1 t+50^\circ)]\mathrm{A}$ ，求其有效值。

【解】 $$I=\sqrt{(1)^2+\frac{1}{2}(0.707)^2+\frac{1}{2}(0.42)^2}\,\mathrm{A}=1.16\mathrm{A}$$

二、非正弦周期电流电路的平均功率

设一端口网络的端口电压、电流取关联参考方向，则其输入的瞬时功率为



$$p = ui$$

其平均功率为瞬时功率在一周期内的平均值，即

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T ui\mathrm{d}t$$

设 $u = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{\mathrm{m}k}\cos(k\omega_1 t + \psi_{uk})$　　$i = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{\mathrm{m}k}\cos(k\omega_1 t + \psi_{ik})$

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T ui\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T [U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{\mathrm{m}k}\cos(k\omega_1 t + \psi_{uk})][I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{\mathrm{m}k}\cos(k\omega_1 t + \psi_{ik})]\mathrm{d}t$$

二、非正弦周期电流电路的平均功率

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T u i \mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T [U_0+\sum_{k=1}^{\infty}U_{\mathrm{m}k}\cos(k\omega_1 t+\psi_{uk})][I_0+\sum_{k=1}^{\infty}I_{\mathrm{m}k}\cos(k\omega_1 t+\psi_{ik})]\mathrm{d}t$$

$$=U_0 I_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{U_{\mathrm{m}k}}{\sqrt{2}}\frac{I_{\mathrm{m}k}}{\sqrt{2}}\cos\varphi_k$$

k次谐波电压越前于电流的相位差

$$\boxed{=U_0 I_0+\sum_{k=1}^{\infty}U_k I_k\cos\varphi_k}$$

谐波分量有效值

$$=P_0+\sum_{k=1}^{\infty}P_k$$

非正弦周期电流电路的平均功率等于恒定分量、基波分量和各次谐波分量分别产生的平均功率之和。

同时说明：不同频率的电压和电流不产生平均功率。

【例题6.3 】

已知某无独立电源的一端口网络的端口电压、电流为

$$u=[50+84.6\cos(\omega_1 t+30^\circ)+56.6\cos(2\omega_1 t+10^\circ)]\mathrm{V}$$

$$i=[1+0.707\cos(\omega_1 t-20^\circ)+0.424\cos(2\omega_1 t+50^\circ)]\mathrm{A}$$

求一端口网络输入的平均功率。

【解】 非正弦周期电流电路的平均功率等于恒定分量、基波分量和各次谐波分量分别产生的平均功率之和。

$$P=[50\times1+\frac{84.6}{\sqrt{2}}\times\frac{0.707}{\sqrt{2}}\cos(30^\circ+20^\circ)+\frac{56.6}{\sqrt{2}}\times\frac{0.424}{\sqrt{2}}\cos(10^\circ-50^\circ)]$$

$$\approx 78.42\,\mathrm{W}$$

6.4 非正弦周期电流电路的计算

基本要求：掌握非正弦周期电流电路的分析方法。

线性电路在非正弦周期激励时的稳态分析步骤：

1. 把给定的非正弦周期性激励分解为恒定分量和各谐波分量。

2. 分别计算电路在上述恒定分量和各谐波分量单独作用下的响应。

电感、电容对*k*次谐波的电抗分别为

$$\Rightarrow \begin{cases} X_{Lk} = k\omega_1 L = kX_{L1} \\ X_{Ck} = -\dfrac{1}{k\omega_1 C} = \dfrac{1}{k} X_{C1} \end{cases}$$

基波感抗

基波容抗

3. 根据叠加定理，把恒定分量和各谐波分量的响应相量转化为瞬时表达式后进行叠加。

6.4 非正弦周期电流电路的计算

非正弦周期电流电路

激励 $f(t)$

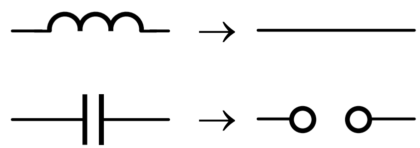
$$f(t)=A_0+A_{m1}\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$$
$$+A_{m2}\cos(2\omega_1 t+\varphi_2)+\cdots$$
$$A_{mk}\cos(k\omega_1 t+\varphi_k)+\cdots$$

…………………………

$u(t)=?\quad i(t)=?$

$U=?\quad I=?\quad P=?$

直流分量单独作用



…………………………………

用直流分量分析法求出

I_0, U_0, P_0

各谐波分量单独作用

正弦交流电路—相量法

$$X_{Lk}=k\omega_1 L=kX_{L1}$$

$$X_{Ck}=\frac{-1}{k\omega_1 C}=\frac{1}{k}X_{C1}$$

…………………………………

$\dot{I}_k, \dot{U}_k, I_k, U_k,$

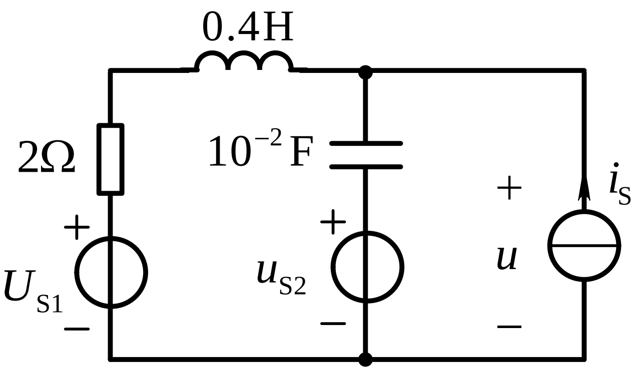
i_k, u_k, P_k

瞬时值叠加

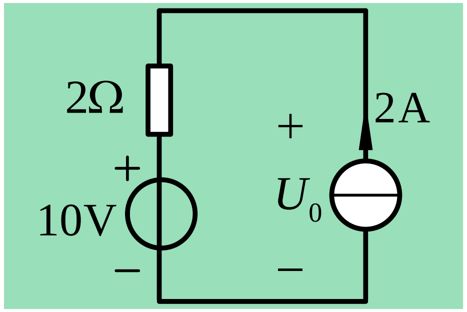
$$i=I_0+i_1+i_2+\cdots$$
$$u=U_0+u_1+u_2+\cdots$$
$$P=P_0+P_1+P_2+\cdots$$
$$I=\sqrt{I_0^2+I_1^2+I_2^2+\cdots}$$
$$U=\sqrt{U_0^2+U_1^2+U_2^2+\cdots}$$

【例题6.4 】

图示电路$U_{S1}=10\text{V}$ ，$u_{S2}=20\sqrt{2}\cos\omega_1 t\text{V}$，$i_S=(2+2\sqrt{2}\cos\omega_1 t)\text{A}$ $\omega_1=10\text{rad/s}$ 。**(1)求电流源的端电压u及其有效值；(2) 求电流源发出的平均功率。**



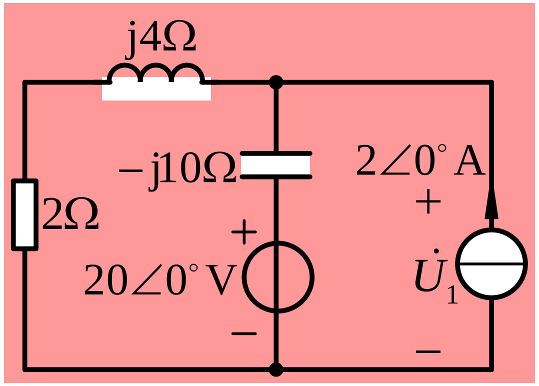
【解】



直流分量作用:

$$U_0=10\text{V}+2\Omega\times 2\text{A}$$
$$=14\text{V}$$

交流分量作用:

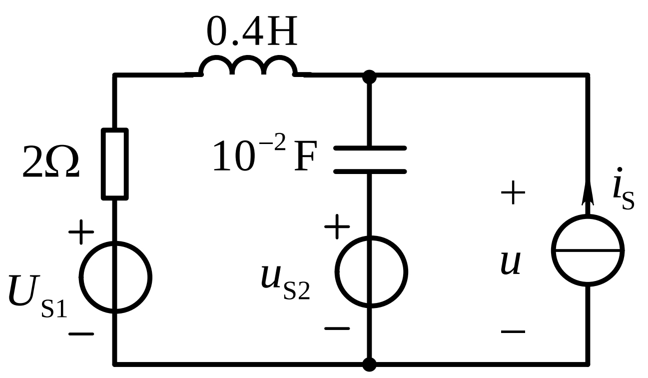


$$\left[\frac{1}{(2+\text{j}4)\Omega}+\frac{1}{-\text{j}10\Omega}\right]\dot{U}_1=\frac{20\text{V}}{-\text{j}10\Omega}+2\text{A}$$

解得 $\dot{U}_1=20\angle 90^\circ\,\text{V}$

【例题6.4 】

图示电路$U_{S1}=10\text{V}$,$u_{S2}=20\sqrt{2}\cos\omega_1 t\text{V}$, $i_S=(2+2\sqrt{2}\cos\omega_1 t)\text{A}$ $\omega_1=10\text{rad/s}$ 。**(1)求电流源的端电压u及其有效值；(2) 求电流源发出的平均功率。**



【解】 $U_0=14\text{V}$ $\dot{U}_1=20\angle 90^\circ\text{V}$

电流源的端电压及其有效值分别为

$$u=U_0+u_1=[14+20\sqrt{2}\cos(\omega_1 t+90^\circ)]\text{V}$$

$$U=\sqrt{U_0^2+U_1^2}=\sqrt{(14)^2+(20)^2}\text{V}=24.4\text{V}$$

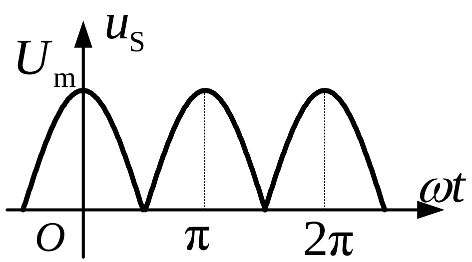
电流源发出的平均功率

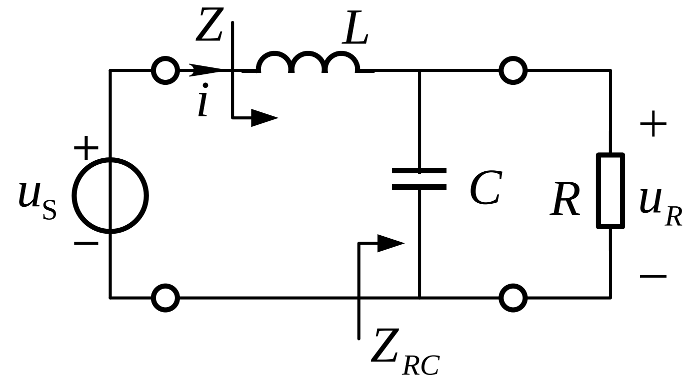
$$P=2U_0+2U_1\cos(90^\circ-0^\circ)$$

$$=(14\times 2+20\times 2\cos 90^\circ)\text{W}=28\text{W}$$

【例题6.5】

LC 构成滤波电路，其中 $L=0.1\text{H}$，$C=1000\mu\text{F}$。设输入为工频全波整流电压，如图所示，电压振幅 $U_m=150\text{V}$，负载电阻 $R=50\Omega$。求电感电流 i 和输出电压 u_R。





【解】

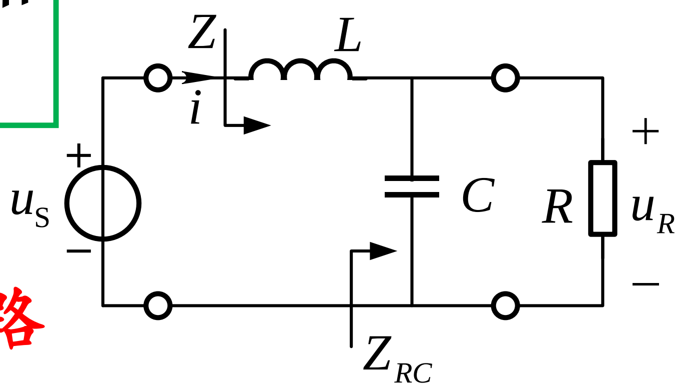
1.从表6.1查出该电压的傅里叶级数：

$$u_S=\frac{4U_m}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cos(2\omega_1 t)-\frac{1}{15}\cos(4\omega_1 t)+\cdots\right]$$

$$=[95.5+45\sqrt{2}\cos(2\omega_1 t)+9\sqrt{2}\cos(4\omega_1 t+180^\circ)+\cdots]\text{V}$$

#【例题6.5】

2.分别计算电源电压的恒定分量和各次交流分量引起的响应。



①恒定电压作用：$u_{S(0)} = 95.5\text{V}$

电感相当于短路，电容相当于开路

$$I_{(0)} = \frac{U_{S0}}{R} = \frac{95.5\text{V}}{50\Omega} = 1.91\text{A}$$

$$U_{R(0)} = 95.5\text{V}$$

②二次谐波电压作用：$u_{S(2)} = 45\sqrt{2}\cos(2\omega_1 t)\text{V}$

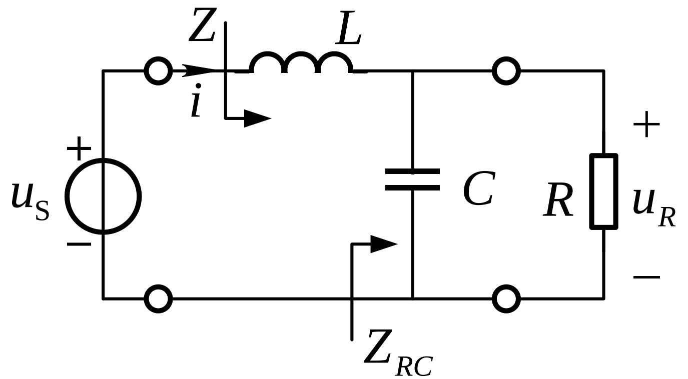
***RC*并联的阻抗:**

$$Z_{RC}(\text{j}2\omega_1) = \frac{R/(\text{j}2\omega_1 C)}{R+1/(\text{j}2\omega_1 C)} = \frac{R}{1+\text{j}2\omega_1 CR} \approx (0.0506-\text{j}1.5899)\Omega$$

输入阻抗: $Z(\text{j}2\omega_1) = \text{j}2\omega_1 L + Z_{RC}(\text{j}2\omega_1) \approx 61.2419\angle 89.95^\circ\Omega$

【例题6.5 】

电感电流相量和瞬时值:



$$\dot{I}(\mathrm{j}2\omega_1)=\frac{\dot{U}_{S(2)}}{Z(\mathrm{j}2\omega_1)}=\frac{45\angle 0^\circ\,\mathrm{V}}{61.2419\angle 89.95^\circ\,\Omega}$$

$$\approx 0.7350\angle -89.95^\circ\,\mathrm{A}$$

$$i_{(2)}(t)=0.7350\sqrt{2}\cos(2\omega_1 t-89.95^\circ)\mathrm{A}$$

输出电压相量和瞬时值:

$$\dot{U}_R(\mathrm{j}2\omega_1)=Z_{RC}(\mathrm{j}2\omega_1)\times\dot{I}(\mathrm{j}2\omega_1)\approx 1.1693\angle -1.78^\circ\,\mathrm{V}$$

$$u_{R(2)}(t)=1.1693\sqrt{2}\cos(2\omega_1 t-1.78^\circ)\mathrm{V}$$

【例题6.5】

③四次谐波电压作用：$u_{S(4)} = 9\sqrt{2}\cos(4\omega_1 t + 180^\circ)\text{V}$

RC并联阻抗：$Z_{RC}(\text{j}4\omega_1) = \dfrac{R}{1+\text{j}4\omega_1 RC} = (0.0127 - \text{j}0.7956)\Omega$

输入阻抗：$Z(\text{j}4\omega_1) = \text{j}4\omega_1 L + Z_{RC}(\text{j}4\omega_1) = 124.8681\angle 89.99^\circ\Omega$

电感电流：$\dot{I}(\text{j}4\omega_1) = \dfrac{\dot{U}_{S(4)}}{Z(\text{j}4\omega_1)} = 0.0721\angle 90.01^\circ\text{A}$

$$i_{(4)}(t) = 0.0721\sqrt{2}\cos(4\omega_1 t + 90.01^\circ)\text{A}$$

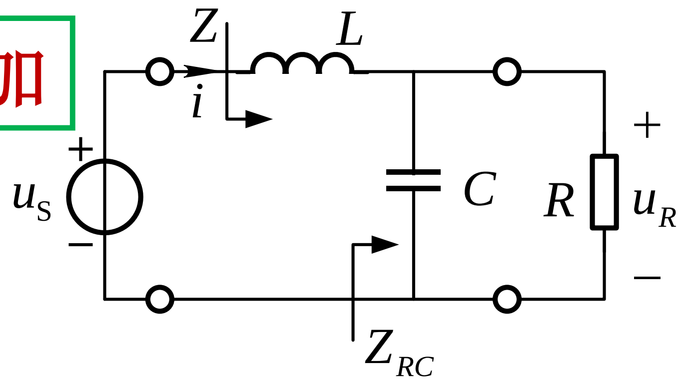
输 出 电 压：$\dot{U}_R(\text{j}4\omega_1) = Z_{RC}(\text{j}4\omega_1)\times\dot{I}(\text{j}4\omega_1) = 0.0574\angle 0.92^\circ\text{V}$

$$u_{R(4)}(t) = 0.0574\sqrt{2}\cos(4\omega_1 t + 0.92^\circ)\text{V}$$

负载电压中，四次谐波有效值仅占恒定电压的0.0574/95.5≈0.0601%，故更高频率的谐波分量可省略计算。

#【例题6.5】

(3)将恒定分量与各谐波分量相叠加



$$i(t)=I_{(0)}+i_{(2)}(t)+i_{(4)}(t)$$

$$\approx 1.91+0.7350\sqrt{2}\cos(2\omega_1 t-89.95^\circ)+0.0721\sqrt{2}\cos(4\omega_1 t+90.01^\circ)\mathrm{A}$$

$$u_R(t)=U_{R(0)}+u_{R(2)}(t)+u_{R(4)}(t)$$

$$\approx 95.5+1.1693\sqrt{2}\cos(2\omega_1 t-1.78^\circ)+0.0574\sqrt{2}\cos(4\omega_1 t+0.92^\circ)\mathrm{V}$$

本 章 小 结

$$f(t)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_{\mathrm{m}k}\cos(k\omega_1 t+\psi_k)$$

有效值 $$A=\sqrt{A_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}A_{\mathrm{m}k}^2}=\sqrt{A_0^2+A_1^2+A_2^2+\cdots}$$

平均功率 $$P=U_0I_0+\sum_{k=1}^{\infty}U_kI_k\cos\varphi_k=P_0+\sum_{k=1}^{\infty}P_k$$

计算非正弦周期电流电路的步骤：

1.将非正弦周期性激励分解为恒定分量、基波和各次谐波分量；

2.分别计算激励中不同频率的分量引起的响应；

3.最后将响应的各分量的瞬时表达式相加。