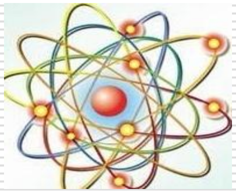
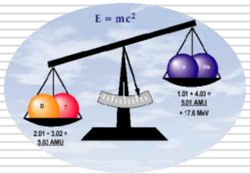




第7章 频率特性和谐振现象

开课教师： 王灿

开课单位：机电学院--电气工程学科

第7章 频率特性和谐振现象

提要：本章主要研究电路特性与频率的关系。主要内容有网络函数和频率特性的概念；串联谐振和并联谐振现象；*RLC*串联电路的频率特性。

重点：串联、并联谐振的条件和特点。

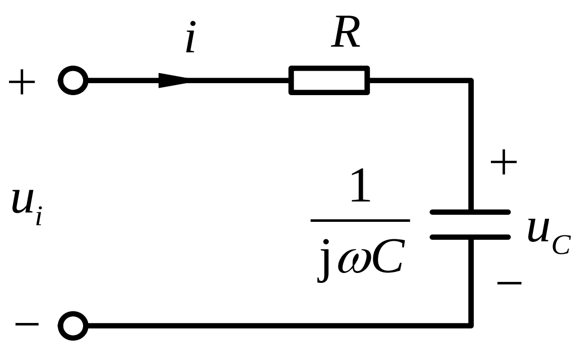
本章目次

7.1 网络函数和频率特性

基本要求：掌握网络函数的定义、幅频特性和相频特性以及低通、高通、带通和带阻等概念。

【引例】电路如图所示，当 $R=100\Omega$ ，$C=100\mu\text{F}$

$u_i=(\sqrt{2}+\sqrt{2}\cos 10t+\sqrt{2}\cos 100t+\sqrt{2}\cos 1000t)\ \text{V}$ ，求 u_C 。



$$u_C=\sqrt{2}+\sqrt{2}\times 0.995\cos(10t-5.71^\circ)$$
$$+\sqrt{2}\times 0.707\cos(100t-45^\circ)$$
$$+\sqrt{2}\times 0.099\cos(1000t-84.29^\circ)$$

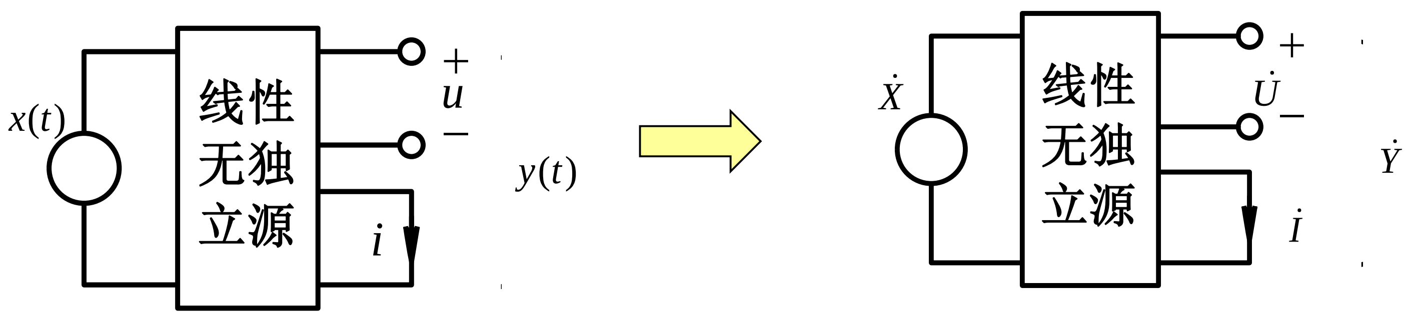
激励的**频率变化** → 感抗和容抗随频率变化 → 电路工作状态随频率变化

7.1 网络函数和频率特性

1. 网络函数

在只有一个激励的正弦电流电路中响应相量与激励相量之比，称为网络函数。

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\text{响应相量}}{\text{激励相量}}\overset{\text{def}}{=}\frac{\dot{Y}}{\dot{X}}$$



网络函数决定于电路**结构**、元件**参数**和电源**频率**，而与激励的相量无关。

7.1 网络函数和频率特性

1. 网络函数

激励和响应属于同一端口 $\begin{cases}\text{等效输入阻抗(驱动点阻抗)}\\ \text{等效输入导纳(驱动点导纳)}\end{cases}$

激励和响应属于不同端口时，网络函数又称为转移函数或传递函数。

激励	响应	转移函数
电流	电流	转移电流比 (transfer current ratio)
电流	电压	转移阻抗 (transfer impedance)
电压	电流	转移导纳 (transfer admittance)
电压	电压	转移电压比 (transfer voltage ratio)

7.1 网络函数和频率特性

2．频率响应

研究网络函数或响应随频率变动的规律称为**电路的频率响应**。

将网络函数写成极坐标形式得

$$H(\mathrm{j}\omega)=\left|H(\mathrm{j}\omega)\right|\angle\theta(\omega)$$

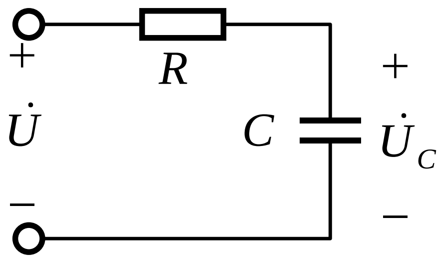
$\left|H(\mathrm{j}\omega)\right|$ 为网络函数的模，称为网络函数的**幅频特性**，反映响应与激励有效值之比与频率的关系。

$\theta(\omega)$ 为网络函数的辐角，称为网络函数的**相频特性**，反映响应越前于激励的相位差与频率的关系。

网络的幅频特性和相频特性总称为**频率特性**。

7.1 网络函数和频率特性

2．频率响应



$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\dot{U}_C}{\dot{U}}=\frac{1/\mathrm{j}\omega C}{R+1/\mathrm{j}\omega C}=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega RC}$$

令 $\omega_0=1/RC$ （RC电路的固有频率或自然频率）

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega/\omega_0}=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}}\angle-\arctan(\omega/\omega_0)$$

$$|H(\mathrm{j}\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}}$$

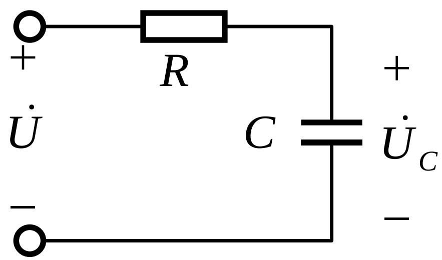
$$\theta(\omega)=-\arctan(\omega/\omega_0)$$

7.1 网络函数和频率特性

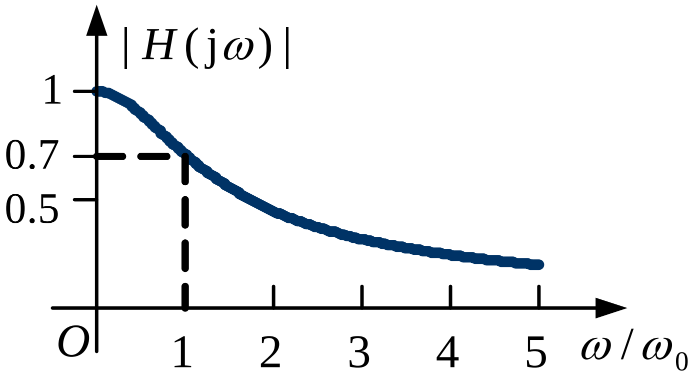
2. 频率响应

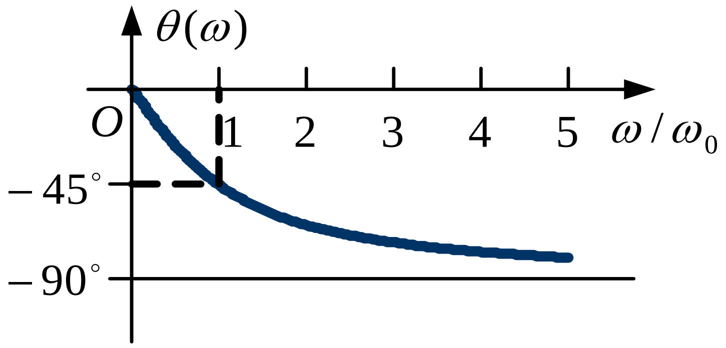
$$|H(\mathrm{j}\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}}$$

$$\theta(\omega) = -\arctan(\omega/\omega_0)$$

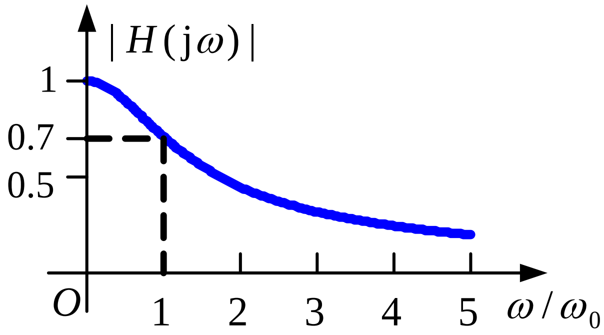


ω/ω_0	$\lvert H(\mathrm{j}\omega)\rvert$	$\theta(\omega)$
0	1	0°
1	$1/\sqrt{2}$	-45°
2	$1/\sqrt{5}$	-63.43°
⋮	⋮	⋮
∞	0	-90°

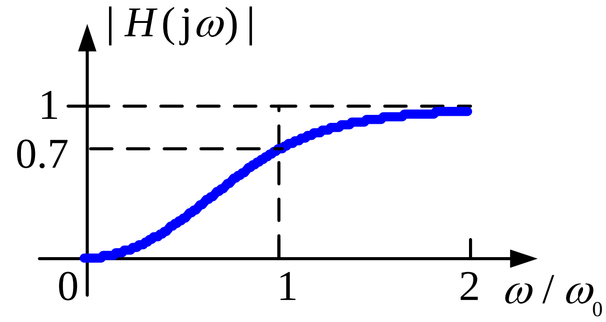




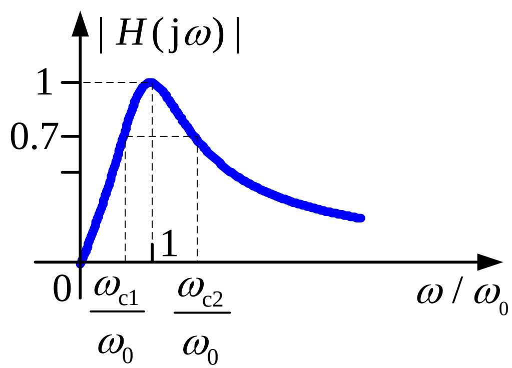
3．几个相关概念



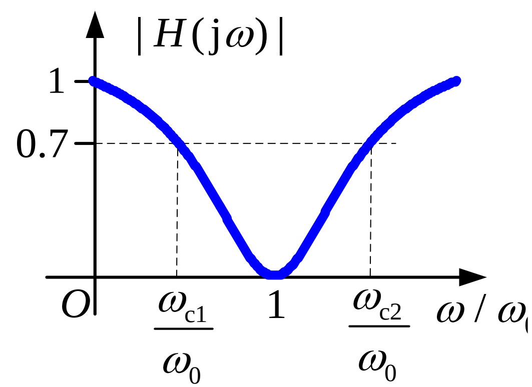
低通网络



高通网络



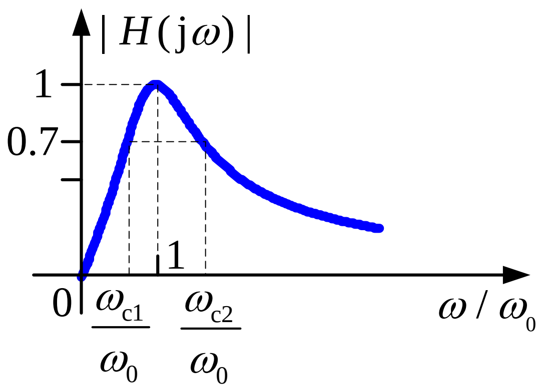
带通网络



带阻网络

7.1 网络函数和频率特性

3．几个相关概念



将网络函数的模下降到最大值的 $1/\sqrt{2}$ 时所对应的频率称为截止频率 ω_c 。

ω_{c1} —低频截止频率

ω_{c2} —高频截止频率

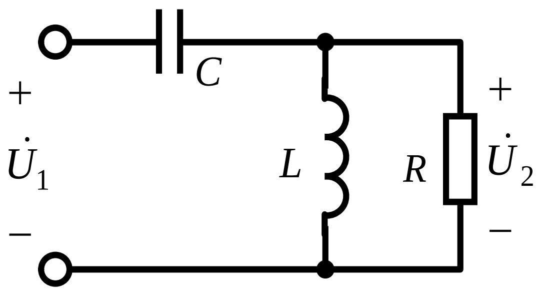
$\omega_{c1} < \omega < \omega_{c2}$ —通带

$\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1}$ —通带宽度，带宽

$0 < \omega < \omega_{c1}, \quad \omega > \omega_{c2}$ —阻带

【例题7.1】

求图示电路的网络函数 $H(\mathrm{j}\omega)=\dot{U}_2/\dot{U}_1$



【解】

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}=\frac{\dfrac{\mathrm{j}\omega L\times R}{\mathrm{j}\omega L+R}}{\dfrac{\mathrm{j}\omega L\times R}{\mathrm{j}\omega L+R}+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}$$

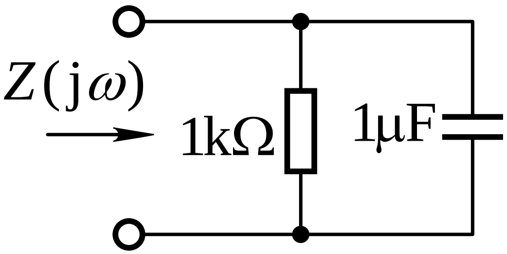
$$=\frac{-\omega^2}{-\omega^2+\mathrm{j}\dfrac{\omega}{RC}+\dfrac{1}{LC}}$$

【补充7.1】

求图示*RC*并联电路的输入阻抗 $Z(\mathrm{j}\omega)$，大致画出其幅频特性和相频特性，确定通带、阻带和截止频率。

【解】由阻抗并联等效公式得

$$Z(\mathrm{j}\omega)=\frac{10^3/(\mathrm{j}\omega 10^{-6})}{10^3+1/(\mathrm{j}\omega 10^{-6})}=\frac{10^3}{1+\mathrm{j}\omega 10^{-3}}\Omega$$



阻抗模及幅角分别为:

$$|Z(\mathrm{j}\omega)|=\frac{10^3}{\sqrt{1+(10^{-3}\omega)^2}} \qquad \theta(\omega)=-\arctan(10^{-3}\omega)$$

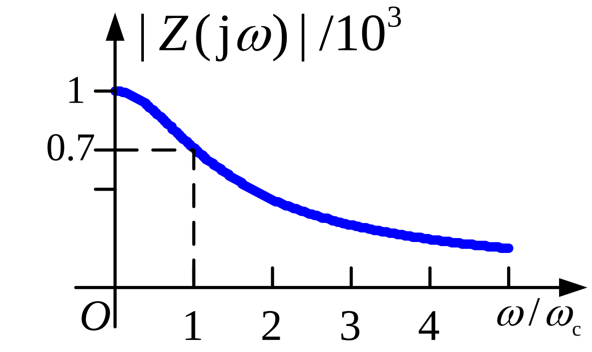
令: $|Z(\mathrm{j}\omega_c)|=10^3/\sqrt{2}$ 求得截止角频率 $\omega_c=10^3\,\mathrm{rad/s}$

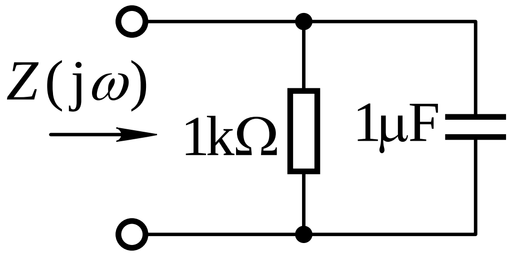
通带 $\boldsymbol{\omega}=0\sim 10^3\,\mathbf{rad/s}$ 阻带 $\boldsymbol{\omega}=10^3\,\mathbf{rad/s}\sim\infty$

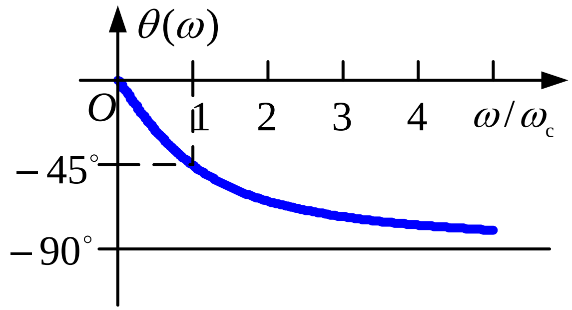
【补充7.1】

求图示*RC*并联电路的输入阻抗$Z(\mathrm{j}\omega)$，大致画出其幅频特性和相频特性，确定通带、阻带和截止频率。

【解】

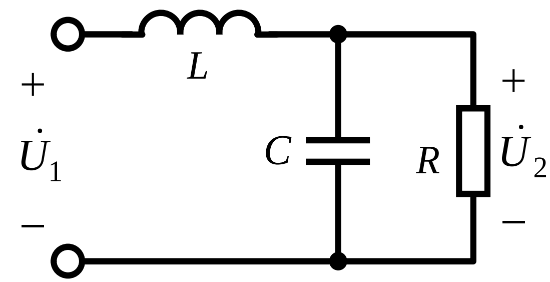






【补充7.2】

求图示电路的网络函数 $H(\mathrm{j}\omega)=\dot{U}_2/\dot{U}_1$，它具有高通特性还是低通特性？



【解】*RC*并联的等效阻抗

$$Z_{RC}=\frac{R/\mathrm{j}\omega C}{R+1/\mathrm{j}\omega C}=\frac{R}{1+\mathrm{j}\omega RC}$$

$$H(\mathrm{j}\omega)=\dot{U}_2/\dot{U}_1=\frac{Z_{RC}}{\mathrm{j}\omega L+Z_{RC}}=\frac{1}{1-\omega^2 LC+\mathrm{j}\omega L/R}$$

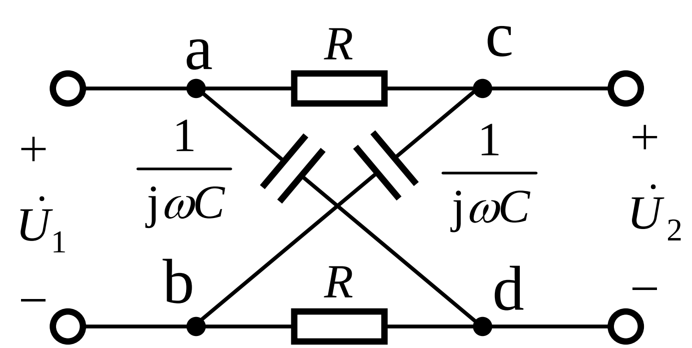
幅频特性 $|H(\mathrm{j}\omega)|=\dfrac{1}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2+(\omega L/R)^2}}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{当}\omega\to 0\text{ 时 } |H(\mathrm{j}\omega)|=1 \\ \text{当}\omega\to \infty\text{时 } |H(\mathrm{j}\omega)|=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

它具有低通特性

【补充7.3】

求图示电路的转移电压比 $H(\mathrm{j}\omega)=\dot{U}_2/\dot{U}_1$ ($\dot{U}_2$为开路电压)，写出其幅频特性和相频特性，指出 $H(\mathrm{j}\omega)$的辐角随频率变化的范围。



【解】由KVL及分压公式得

$$\dot{U}_2=\dot{U}_{\mathrm{cb}}-\dot{U}_{\mathrm{db}}$$

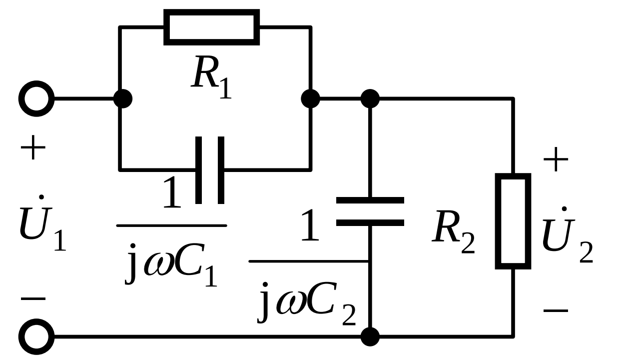
$$=\left(\frac{1/\mathrm{j}\omega C}{R+1/\mathrm{j}\omega C}-\frac{R}{R+1/\mathrm{j}\omega C}\right)\dot{U}_1$$

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}=\frac{1-\mathrm{j}\omega RC}{1+\mathrm{j}\omega RC} \Rightarrow \left|H(\mathrm{j}\omega)\right|=\frac{\sqrt{1^2+(\omega RC)^2}}{\sqrt{1^2+(\omega RC)^2}}=1$$

幅频特性为常量，与频率无关，具有全通特性，常用作移相 。

【补充7.4】

求图示电路的转移电压比 $H(\mathrm{j}\omega)=\dot{U}_2/\dot{U}_1$，当 $R_1C_1=R_2C_2$ 时此网络函数有何特性？



【解】设 $Z_1=R_1//\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}=\dfrac{R_1}{1+\mathrm{j}\omega R_1C_1}$

$$Z_2=R_2//\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}=\frac{R_2}{1+\mathrm{j}\omega R_2C_2}$$

由分压公式得 $\dot{U}_2=\dfrac{Z_2}{Z_1+Z_2}\dot{U}_1$

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}=\frac{R_2(1+\mathrm{j}\omega R_1C_1)}{R_1(1+\mathrm{j}\omega R_2C_2)+R_2(1+\mathrm{j}\omega R_1C_1)}$$

当 $R_1C_1=R_2C_2$ 时，得

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{R_2}{R_1+R_2}$$

此网络函数模及辐角均与频率无关。

7.2 串联谐振电路

为什么一队士兵在坚固的桥上整齐地走会导致桥坍塌？

物体、人体都有固有频率，当外界频率与固有频率相同时，会发生共振(**Resonance**)。

7.2 串联谐振电路

基本要求：了解谐振的定义；明确串联谐振条件； 掌握串联谐振特点，并熟练应用。

主要内容

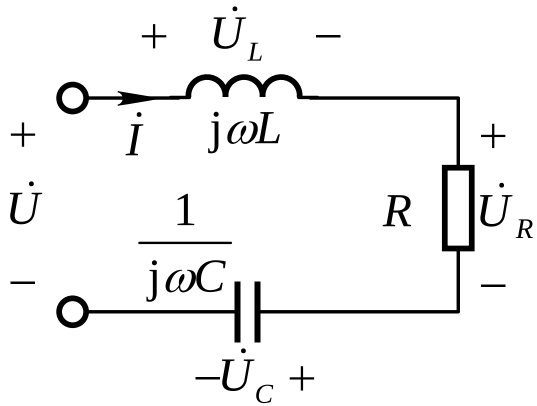
一、谐振的定义

二、 *RLC*串联电路发生谐振的条件

三、 *RLC*串联电路的谐振曲线

四、 *RLC*串联电路谐振时的特点

一、谐振的定义

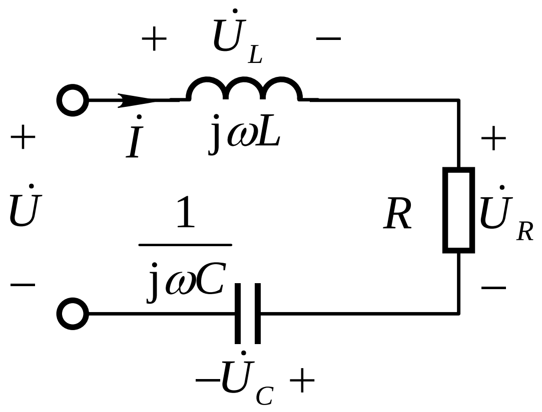


$$Z = R + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + \mathrm{j}X$$

对于任何含有电感和电容的一端口电路，在一定的条件下可呈现电阻性，其端口电压与电流同相位，则称此一端口电路发生谐振。

***RLC*串联电路中发生的谐振称为串联谐振。**

二、RLC串联电路发生谐振的条件



$$Z = R + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + \mathrm{j}X$$

$$\boxed{\mathrm{Im}[Z] = 0} \Rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{或} \quad L_0 = \frac{1}{\omega_0^2 C} \quad \text{或} \quad C_0 = \frac{1}{\omega_0^2 L}$$

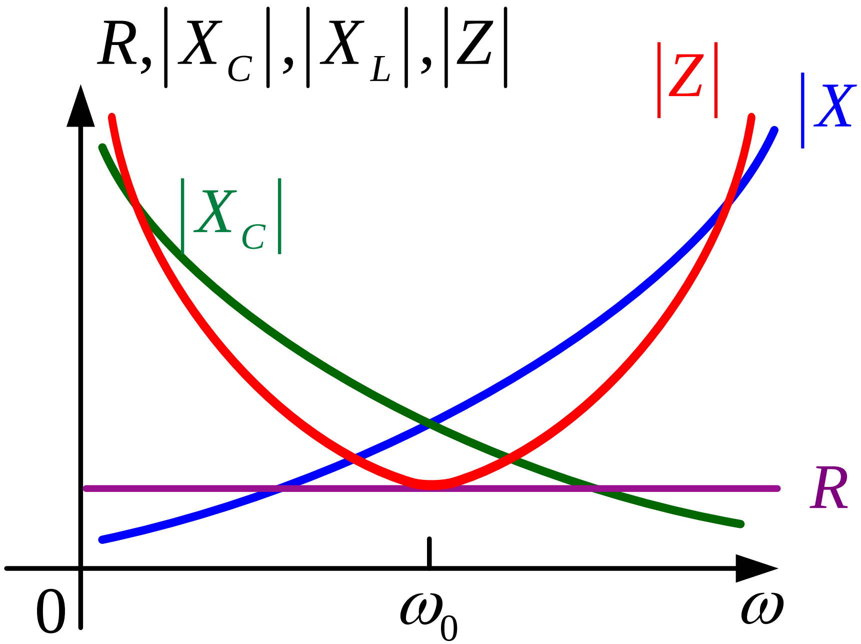
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$ 称为**RLC**串联电路的谐振角频率

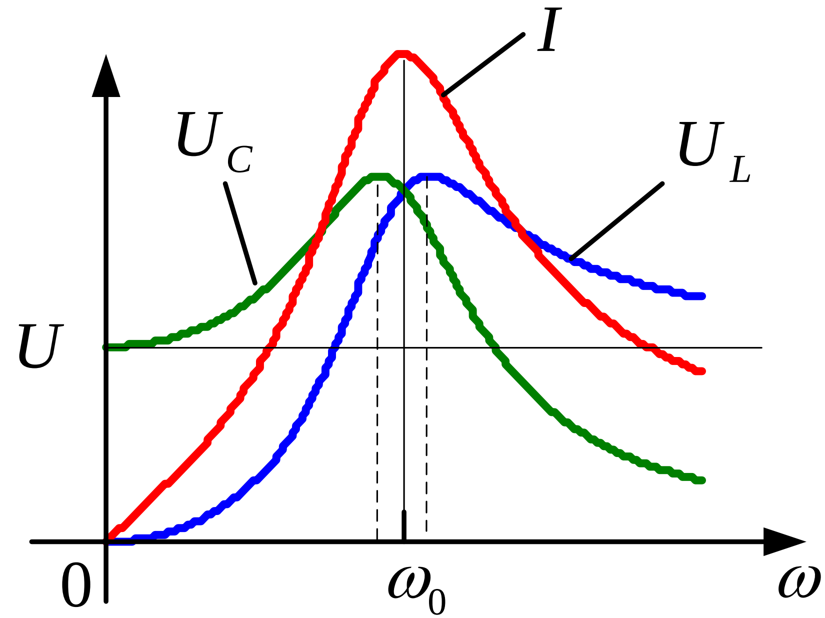
$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$ 称为**RLC**串联电路的谐振频率

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$ 称为**RLC**串联电路的特性阻抗

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R\omega_0 C} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$ 称为**RLC**串联电路的品质因数

三、*RLC*串联电路的谐振曲线





四、*RLC*串联电路谐振时的特点

1.谐振时的阻抗

$$Z = R + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + \mathrm{j}X$$

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$ 感抗与容抗作用相抵消

$$Z(\omega_0) = R$$ 电路呈纯阻性，阻抗模最小

2.谐振时的电流

$$I(\omega_0) = \frac{U}{|Z|} = \frac{U}{R}$$

在电源电压有效值一定的条件下，电流达到最大值。

四、*RLC*串联电路谐振时的特点

3.谐振时的电压

$$\dot{U}_R(\omega_0) = R\dot{I}(\omega_0) = \dot{U}$$

$$\dot{U}_L(\omega_0) = \mathrm{j}\omega_0 L\dot{I}(\omega_0) = \mathrm{j}\rho\dot{I}(\omega_0)$$

$$\dot{U}_C(\omega_0) = \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C}\dot{I}(\omega_0) = -\mathrm{j}\rho\dot{I}(\omega_0)$$

$$\dot{U}_L(\omega_0) + \dot{U}_C(\omega_0) = 0$$

LC串联谐振部分相当于短路

$$U_L(\omega_0) = U_C(\omega_0) = \rho I(\omega_0) = \rho\frac{U}{R} = QU$$

电压谐振

四、*RLC*串联电路谐振时的特点

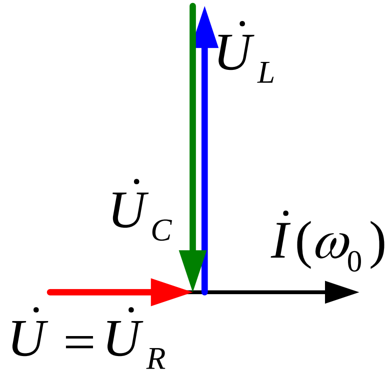
4.谐振时的无功功率

$$Q(\omega_0) = Q_L(\omega_0) + Q_C(\omega_0) = \omega_0 L I^2(\omega_0) - \frac{1}{\omega_0 C} I^2(\omega_0)$$

$$Q(\omega_0) = 0$$

电感吸收的无功功率等于电容发出的无功功率，
电路吸收的总无功功率等于零。

5.谐振时的相量图



【补充7.5】

某收音机接收等效电路如图所示。已知:

$R = 6\Omega$

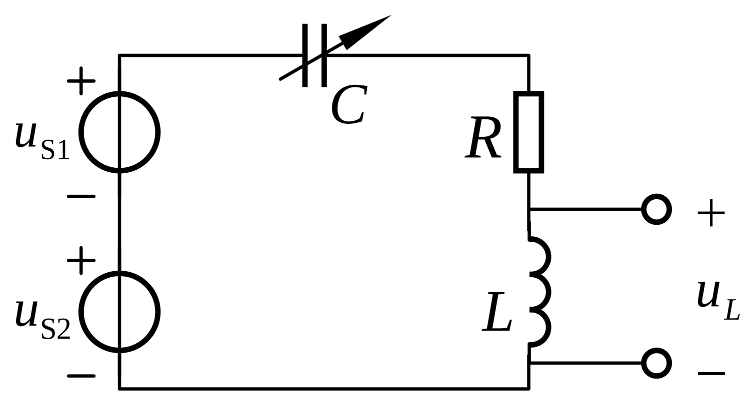
$L = 300\mu\text{H}$

两广播电台信号分别为

$$\begin{cases} U_{S1} = 1.5\text{mV} & f_1 = 540\text{kHz} \\ U_{S2} = 1.5\text{mV} & f_2 = 600\text{kHz} \end{cases}$$

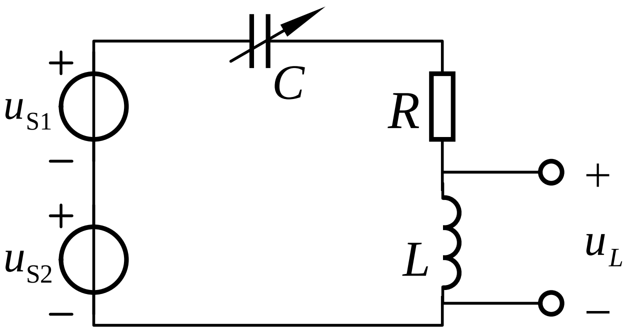
（1）要接收u_{S1}信号，求电容C值和品质因数Q；

（2）保持C值不变，分别计算u_{S1}和u_{S2}单独作用时的电流值及在电感L上的输出电压值。



【补充7.5】

（1）要接收u_{S1}信号，求电容C值和品质因数Q；



【解】

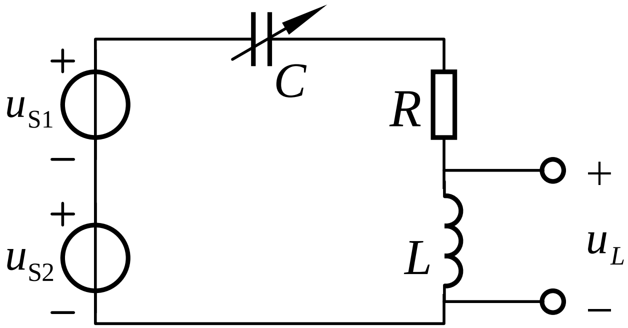
令C与L发生谐振：

$$C=\frac{1}{(2\pi f_1)^2 L}=\frac{1}{(2\times 3.14\times 540\times 10^3)^2\times 300\times 10^{-6}}=290\text{pF}$$

$$Q=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{2\times 3.14\times 540\times 10^3\times 300\times 10^{-6}}{6}=169.6$$

【补充7.5】

（2）保持C值不变，分别计算u_{S1}和u_{S2}单独作用时的电流值及在电感L上的输出电压值。



【解】

u_{S1}作用时电路处于谐振状态：

$$I_1 = I_0 = \frac{U_{S1}}{R} = \frac{1.5\times10^{-3}}{6} = 250\,\mu\text{A}$$

$$U_{L1} = QU_{S1} = 169.6\times1.5\times10^{-3} = 254.4\text{mV}$$

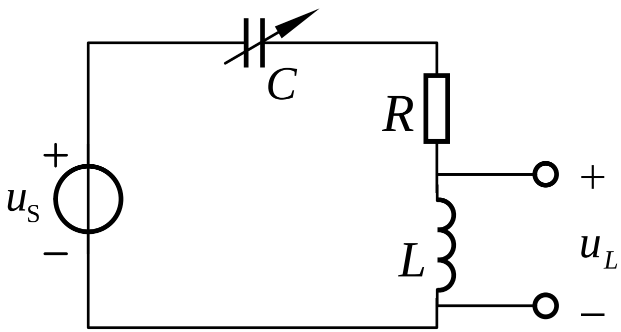
u_{S2}作用时电路处于失谐状态：

$$I_2 = \frac{U_{S2}}{\sqrt{R^2 + (\omega_2 L - \dfrac{1}{\omega_2 C})^2}} = 6.93\mu\text{A}$$

$$U_{L2} = \omega_2 L I_2 = 2\pi\times600\times10^3\times0.3\times10^{-3}\times6.93\times10^{-6} = 7.84\text{mV}$$

【补充7.6】

***RLC*串联电路中，已知电感$L=320\mu\text{H}$，若要求电路的谐振频率覆盖中波无线电广播频率(从550kHz到1.6MHz)。试求可变电容*C*的变化范围。**



【解】谐振时 $\omega L=\dfrac{1}{\omega C}$

$$C=\frac{1}{\omega^2 L}=\frac{1}{4\pi^2 f^2 L}$$

当 $f=550\text{kHz}$时 $C\approx 262\text{pF}$

当 $f=1.6\text{MHz}$时 $C\approx 31\text{pF}$

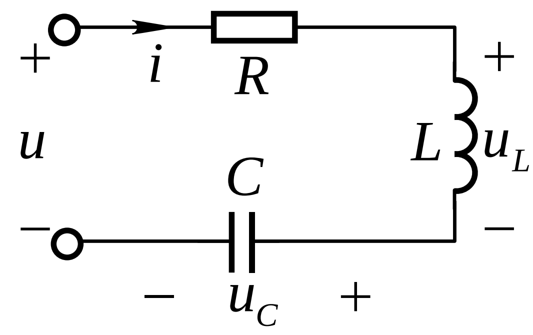
所以可变电容*C*的变化范围应为 **31～262pF**

【补充7.7】

图示电路，已知 $u = 0.1\sqrt{2}\cos\omega t$ V，$\omega=10^4$ rad/s 时电流 i 的有效值最大为1A，此时 $U_L = 10$ V

(1)求 R、L、C 及品质因数 Q。

(2)求电流 i 和电压 u_L、u_C。



【解】电路发生谐振时，有

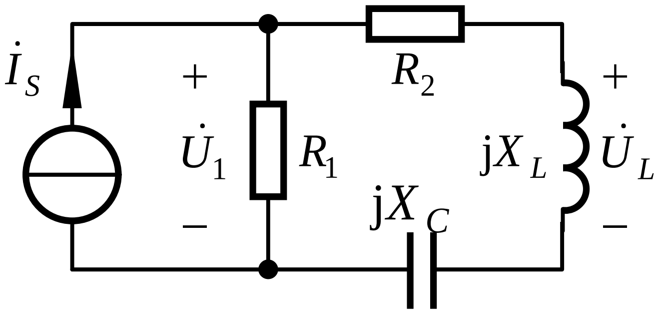
$$\left.\begin{aligned} &\omega = 1/\sqrt{LC} = 10^4 \text{ rad/s} \\ &I = U/R = 1\text{A} \\ &Q = U_L/U = \omega L/R = 100 \end{aligned}\right\} \text{解得} \begin{cases} R = 0.1\Omega \\ L = 1\text{mH} \\ C = 10\mu\text{F} \end{cases}$$

根据谐振特点，则

$$\begin{cases} i = \sqrt{2}\cos\omega t \text{ A} \\ u_L = 10\sqrt{2}\cos(\omega t + 90^\circ) \text{ V} \\ u_C = 10\sqrt{2}\cos(\omega t - 90^\circ) \text{ V} \end{cases}$$

【补充7.8】

设图示电路处于谐振状态，其中 $I_S = 1\text{A}$，$R_1 = |X_C| = 100\Omega$ $U_1 = 50\text{V}$。求电压 U_L 和电阻 R_2。



【解】因为电路处于谐振状态，电感电容串联相当于短路，则有

$$R_1 // R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{U_1}{I_\text{S}} = 50\Omega$$

解得 $R_2 = 100\,\Omega$

电路处于谐振状态 ，则 $X_\text{L} = \left|X_\text{C}\right| = 100\Omega$

得到 $U_\text{L} = \dfrac{1}{2} I_\text{S} X_\text{L} = 50\text{V}$