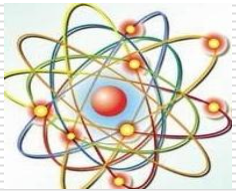
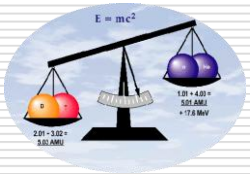




第8章　线性动态电路暂态过程的时域分析

开课教师：　王灿
开课单位：机电学院--电气工程学科

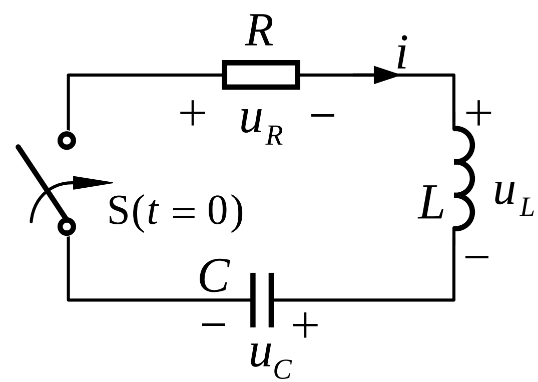
8.11 二阶电路的暂态过程

基本要求：掌握二阶电路微分方程求解过程、微分方程特征根与响应自由分量性质的关系。

二阶电路： 用二阶微分方程描述的电路(一般含有两个储能元件)。

设 $u_C(0_-)=U_{C0}>0$ ， t=0时开关接通,

求t>0时u_C和回路i 。



t>0：

$$u_R+u_L+u_C=0$$

$$u_R=Ri \qquad i=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \qquad u_L=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

***RLC*零输入响应**

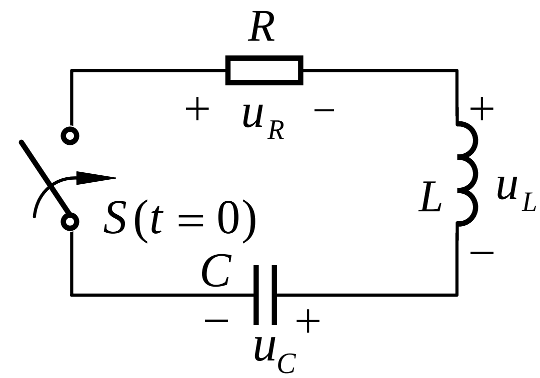
$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{LC}u_C=0$$

两个初始条件：

$$\begin{cases} u_C(0_+)=u_C(0_-)=U_{C0} \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+}=\dfrac{1}{C}i(0_+)=\dfrac{1}{C}i(0_-)=0 \end{cases}$$

解方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{LC}u_C=0$$



RLC零输入响应

特征方程: $p^2+\frac{R}{L}p+\frac{1}{LC}=0$

特征根: $p=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$

令 $\alpha=R/(2L)$

$\omega_0=1/\sqrt{LC}$

$$\begin{cases} p_1=-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2} \\ p_2=-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2} \end{cases}$$

1、互异负实根

2、共轭复根

3、相等负实根

二阶暂态过程与特征根的关系

$$p_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$p_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = 0$$

$$\begin{cases} u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_{C0} \\ \left.\dfrac{du_C}{dt}\right|_{t=0_+} = \dfrac{1}{C}i(0_+) = \dfrac{1}{C}i(0_-) = 0 \end{cases}$$

确定系数

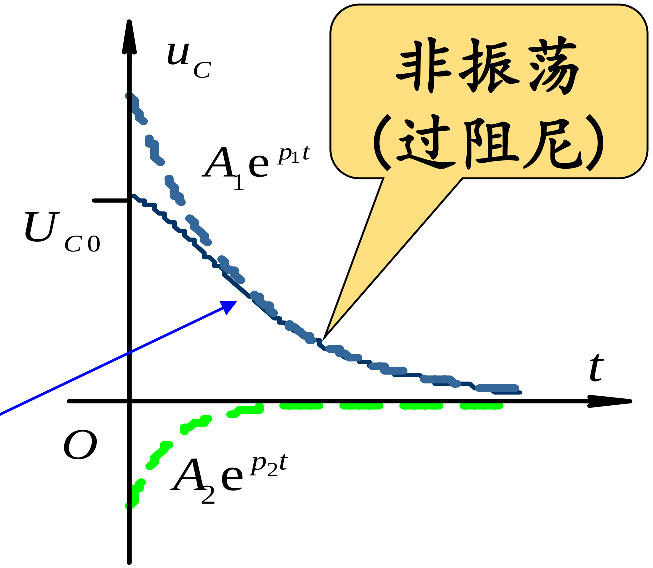
A_1、A_2

$$\alpha = R/(2L);\ \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

1、互异负实根

$\alpha > \omega_0$ 即 $R > 2\sqrt{L/C}$

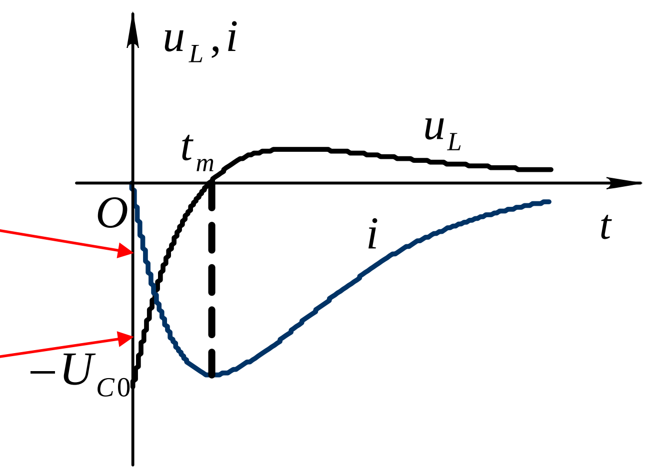
通解： $u_C = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$



得： $$u_C = \frac{U_{C0}}{p_2 - p_1}\left(p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}\right)$$

$$i = C\frac{du_C}{dt} = \frac{U_{C0}}{L(p_2 - p_1)}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right)$$

$$u_L = L\frac{di}{dt} = \frac{U_{C0}}{p_2 - p_1}\left(p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}\right)$$



2、共轭复根 $\alpha < \omega_0$ 即 $R < 2\sqrt{L/C}$

$$\begin{cases} u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_{C0} \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+} = \dfrac{1}{C} i(0_+) = \dfrac{1}{C} i(0_-) = 0 \end{cases}$$

确定系数A、θ

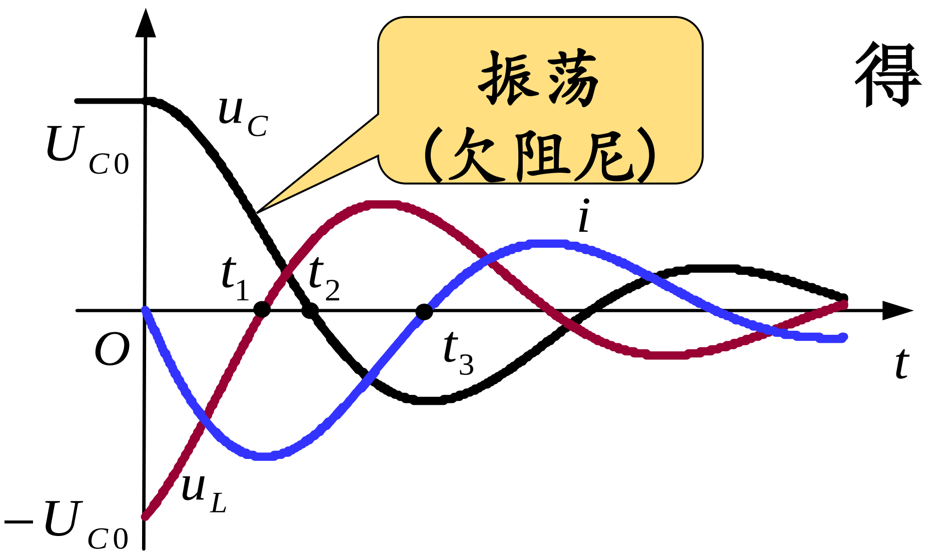
$$p_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha + \mathrm{j}\omega_\mathrm{d}$$

$$p_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha - \mathrm{j}\omega_\mathrm{d}$$

p_2与p_1共轭

$$\omega_\mathrm{d} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

通解： $u_C = \mathrm{e}^{-\alpha t}(A_1 \sin\omega_\mathrm{d} t + A_2 \cos\omega_\mathrm{d} t) = A\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega_\mathrm{d} t + \theta)$



$\theta = \arctan(\omega_\mathrm{d}/\alpha)$

得：

$$u_C = \frac{\omega_0}{\omega_\mathrm{d}} U_{C0}\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega_\mathrm{d} t + \theta)$$

衰减系数

$$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\frac{U_{C0}}{\omega_\mathrm{d} L}\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\omega_\mathrm{d} t$$

$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega_0}{\omega_\mathrm{d}} U_{C0}\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega_\mathrm{d} t - \theta)$$

临界电阻

3、相等负实根

$a=\omega_0$ 即 $R=2\sqrt{L/C}$

$$p_1=-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$$

$$p_2=-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$$

$$p_1=p_2=p=-\alpha$$

$$\begin{cases} u_C(0_+)=u_C(0_-)=U_{C0} \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+}=\dfrac{1}{C}i(0_+)=\dfrac{1}{C}i(0_-)=0 \end{cases}$$

确定系数A_1、A_2

通解： $u_C=(A_1+A_2t)\mathrm{e}^{-\alpha t}$

临界状态

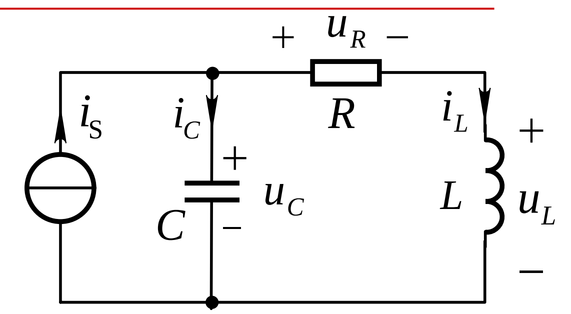
$$u_C=U_{C0}(1+at)\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

$$i=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=-\alpha^2CU_{C0}t\mathrm{e}^{-\alpha t}=-\frac{U_{C0}}{L}t\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

$$u_L=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=U_{C0}(\alpha t-1)\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

【例题8.12】

图示电路，R=20Ω，L=0.1H，C=20μF。求 i_L 的单位阶跃特性 $s(t)$。



【解】 设 $i_S = \varepsilon(t)$ A

$$\left.\begin{aligned} i_C + i_L &= C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + i_L = i_S \\ u_L - u_C + u_R &= L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} - u_C + i_L R = 0 \end{aligned}\right\} \quad \frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}i_L = \frac{1}{LC}i_S \quad (t>0)$$

代入数据

$$\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2} + 200\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + 5\times10^5 i_L = 5\times10^5$$

非齐次方程通解:

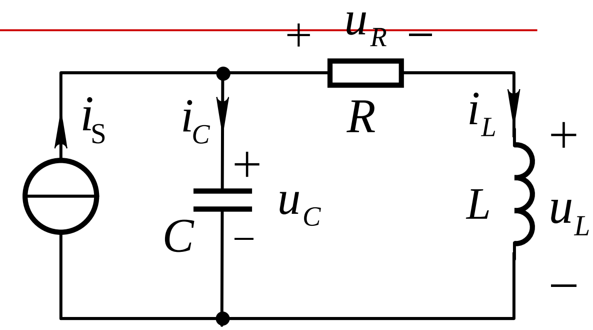
$$i_L = i_{Lp} + i_{Lh}$$

i_{Lp} =1A--稳态解

$$\begin{cases} i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0 \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+} = \dfrac{1}{L}u_L(0_+) = \dfrac{1}{L}[-Ri_L(0_+) + u_C(0_+)] = 0 \end{cases}$$

齐次方程: $\dfrac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2} + 200\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + 5\times10^5 i_L = 0$

【例题8.12】



齐次方程: $\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 200\frac{di_L}{dt} + 5\times10^5 i_L = 0$

特征方程: $p^2 + 200p + 5\times10^5 = 0$

特征根: $p_{1,2} = (\frac{-200 \pm \sqrt{200^2 - 4\times5\times10^5}}{2})\text{s}^{-1} = (-100 \pm \text{j}700)\text{s}^{-1} = -\alpha \pm \text{j}\omega_\text{d}$

i_L自由分量: $i_{L\text{h}} = B\text{e}^{-\alpha t}\sin(\omega_\text{d} t + \theta) = B\text{e}^{-100t}\sin(700t + \theta)$

非齐次通解: $i_L = i_{L\text{p}} + i_{L\text{h}} = 1 + B\text{e}^{-100t}\sin(700t + \theta)$

回代

代入初始值

$$\begin{cases} i_L(0_+) = 1\text{A} + B\sin\theta = 0 \\ \left.\frac{\text{d}i_L}{\text{d}t}\right|_{t=0_+} = -100B\sin\theta + 700B\cos\theta = 0 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} B \approx -1.01\text{A} \\ \theta \approx 81.87^\circ \end{cases}$

完全解 $i_L = [1 - 1.01\text{e}^{-100t}\sin(700t + 81.87^\circ)]\text{A} \qquad (t \geq 0)$

单位阶跃特性 $s(t) = [1 - 1.01\text{e}^{-100t}\sin(700t + 81.87^\circ)]\varepsilon(t)$

8.12 状态变量分析法

基本要求：理解状态变量的概念，掌握状态方程标准形式及输出方程的一般列写方法。

经典法处理高阶电路时的不足

- 微分方程的列写困难
- 初始值难以确定
- 求解过程复杂

状态变量分析法

优点

状态方程易于列写

易于确定初始值

便于计算机求数值解

状态变量与状态方程

状态变量 能完整地、确定地描述动态电路时域行为的最少变量，是一组独立的动态变量，如 u_C和 i_L 。

状态方程 由状态变量及其一阶导数组成的一阶微分方程组。

状态方程的列写步骤

取u_C和i_L为状态变量

(1) 对联接单电容的节点列KCL方程； $C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \to C\dot{u}_C$

(2) 对包含单电感的回路列KVL方程； $L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \to L\dot{i}_L$

(3) 消去上述方程中的非状态变量；

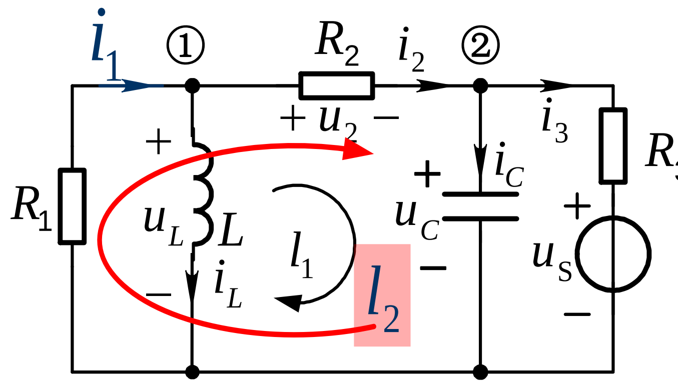
(4) 整理成标准形式的状态方程。

输出方程

将输出变量表示为状态变量和输入激励之间的关系、写成矩阵形式的方程。

例题【8.13】

列出图示电路状态方程的标准形式。



【解】

1、对联接电容的节点②列KCL方程：

$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=i_2-i_3$$

2、对包含电感的回路 l_1列KVL方程：

$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=u_C+u_2$$

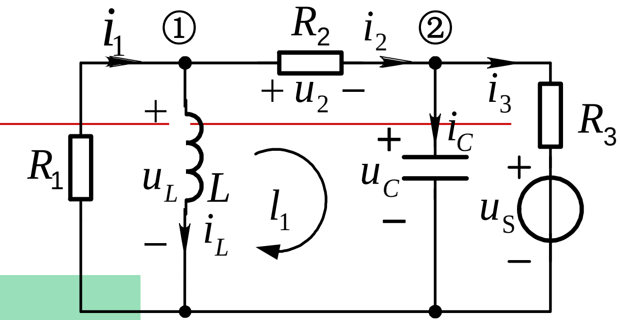
3、消去非状态变量i_2、i_3和u_2

$$i_3=\frac{u_C-u_S}{R_3} \qquad i_2=i_1-i_L$$

对回路 l_2列KVL方程： $R_1i_1+R_2i_2+u_C=0$

$$i_2=-\frac{u_C}{R_1+R_2}-\frac{R_1i_L}{R_1+R_2} \longrightarrow u_2=R_2i_2=-\frac{R_2u_C}{R_1+R_2}-\frac{R_1R_2i_L}{R_1+R_2}$$

例题【8.13】



4、整理得状态方程标准式

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C}(\frac{1}{R_1+R_2}+\frac{1}{R_3}) & -\frac{R_1}{C(R_1+R_2)} \\ \frac{R_1}{L(R_1+R_2)} & -\frac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{CR_3} \\ 0 \end{bmatrix} [u_S]$$

$$\begin{cases} u_C(0_+) = U_0 \\ i_L(0_+) = I_0 \end{cases}$$

若以i_1为输出，输出方程：

$$[i_1] = [-\frac{1}{R_1+R_2} \quad \frac{R_2}{R_1+R_2}] \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix}$$

$$\dot{X} = AX + BV$$

- $X = [u_{C1}\ u_{C2} \cdots i_{L1}\ i_{L2} \cdots]^T$ 状态变量列向量
- $\dot{X}$ 状态变量的一阶导数列向量
- $V = [u_{S1}\ u_{S2} \cdots i_{S1}\ i_{S2} \cdots]^T$ 输入列向量
- $\boldsymbol{A}$ 是$n \times n$方阵，n为状态变量个数
- $\boldsymbol{B}$ 是$n \times m$方阵，m为外加激励个数

决定于电路结构和参数

□ 本章小结

1 电路量的初始值

换路定律 $u_C(0_+) = u_C(0_-)$ $i_L(0_+) = i_L(0_-)$

除u_C、i_L之外各初值可通过分析直流电阻电路的方法求解。

KVL $\sum u(0_+) = 0$ **KCL** $\sum i(0_+) = 0$

电阻元件 $u_R(0_+) = Ri_R(0_+)$ 或 $i_R(0_+) = Gu_R(0_+)$

全响应＝ 零输入响应 ＋ 零状态响应

$$= f(0_+)\mathrm{e}^{-t/\tau} + [f_{\mathrm{p}}(t) - f_{\mathrm{p}}(0_+)\mathrm{e}^{-t/\tau}]$$

2 三要素公式

$$f(t) = f_{\mathrm{p}}(t) + [f(0_+) - f_{\mathrm{p}}(0_+)]\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

特解

初始值

时间常数

全响应＝强制分量＋ 自由分量

□ 本章小结

3 $s(t) \sim h(t)$

$$h(t) = \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \delta(t) = \frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$s(t) = \int_{0_-}^{t} h(\xi)\mathrm{d}\xi \qquad \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\xi)\mathrm{d}\xi$$

4 $x(t) \longrightarrow y(t)$

$$y(t) = \int_{0_-}^{t_+} x(\xi)h(t-\xi)\mathrm{d}\xi$$

5 *RLC*串联二阶电路零输入参数与暂态过程对应关系

$R > 2\sqrt{L/C}$ p_1、p_2相异负实根 $f_h(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$ 过阻尼

$R = 2\sqrt{L/C}$ p_1、p_2相等负实根 $f_h(t) = (A_1 + A_2 t)e^{pt}$ 临界阻尼

$R < 2\sqrt{L/C}$ p_1、p_2共轭复根 $f_h(t) = A e^{-\alpha t}\sin(\omega_d t + \theta)$ 欠阻尼

6 状态方程标准式 $\dot{X} = AX + BV$