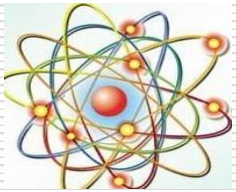
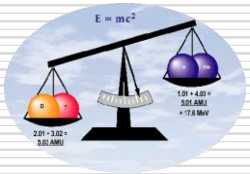




第8章　线性动态电路暂态过程的时域分析

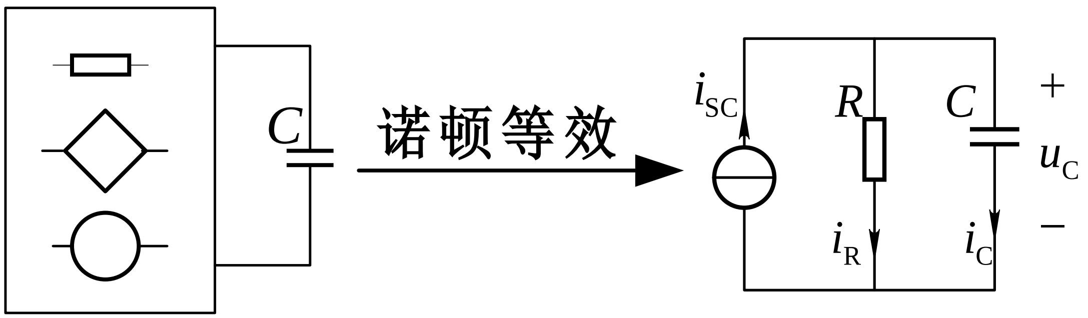
开课教师：　王灿

开课单位：机电学院--电气工程学科

8.3　一阶电路的零输入响应

基本要求：掌握一阶电路零输入响应的定义、计算及解的一般形式；理解时间常数的含义及与电路元件参数的关系。

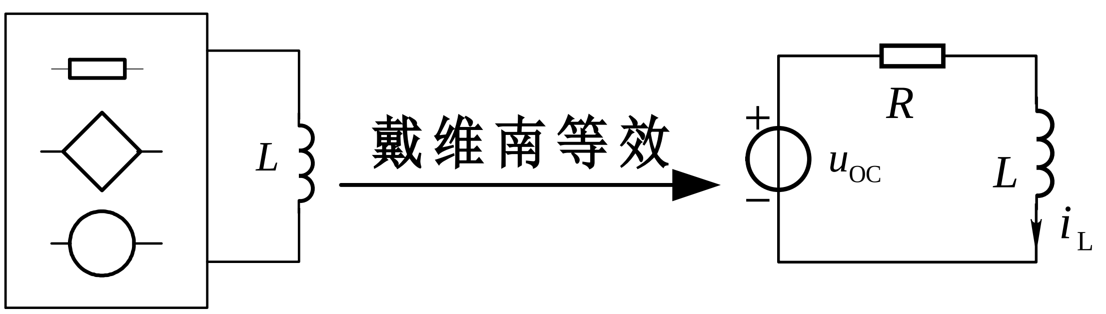
一阶电路



$$C\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{R}u_C=i_{SC}$$

$$\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{RC}u_C=\frac{1}{C}i_{SC}$$

$$u_C(0_+)=U_{C0}$$



$$L\frac{di_L}{dt}+Ri_L=u_{OC}$$

$$\frac{di_L}{dt}+\frac{1}{L/R}i_L=\frac{1}{L}u_{OC}$$

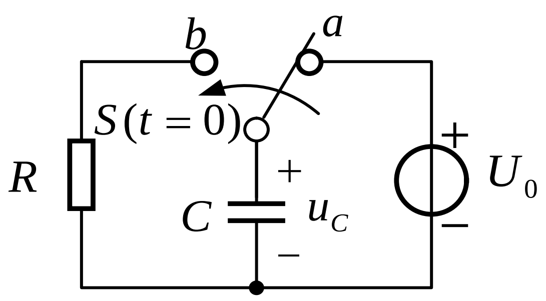
$$i_L(0_+)=L_{L0}$$

只含一个（或可化为一个）动态元件的电路，其暂态过程可用一阶常微分方程描述的电路 →一阶电路

零输入响应：

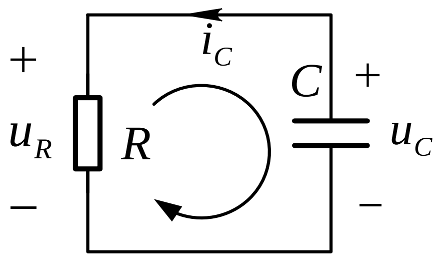
换路后无独立源作用，仅由储能元件初始储能引起的响应。

1　*RC*电路的零输入响应



（a）

$t > 0$



(b)

根据KVL列出$t > 0$ 时电路的微分方程

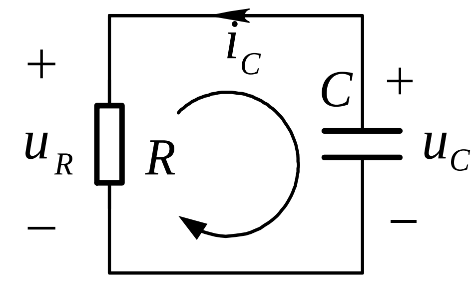
$-u_R + u_C = 0 \longrightarrow -Ri_C + u_C = 0 \longrightarrow \boxed{RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0}$

根据换路定律 $\longrightarrow \boxed{u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0}$

RC 零输入响应

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0$$

$$u_C(0_+)=U_0$$



***RC*电路零输入响应**

特征方程 $RCp+1=0$

特征根 $p=-\dfrac{1}{RC}$

通解 $u_C=A\mathrm{e}^{pt}=A\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$

代入初值 $u_C(0_+)=A\mathrm{e}^{0}=A=U_0$

解得

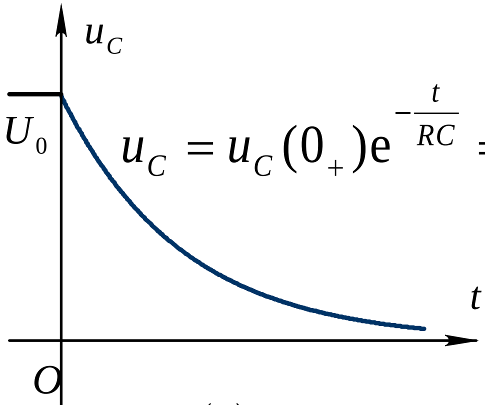
$$u_C=u_C(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}=U_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\quad(t\geq 0)$$

$$i_C=-C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=\frac{U_0}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\quad(t>0)$$

$$=\frac{u_C}{R}$$

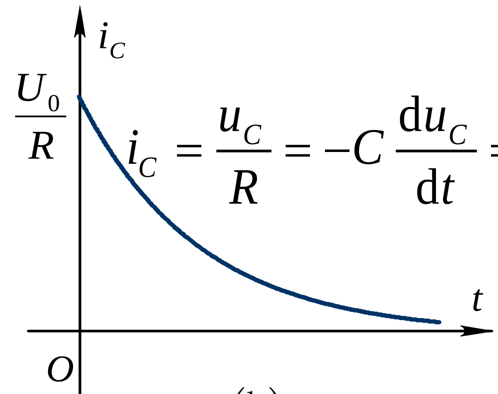
$t=0$处不连续

RC 零输入响应



$$u_C = u_C(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} = U_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \quad (t \geq 0)$$

(a)



$$i_C = \frac{u_C}{R} = -C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{U_0}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \quad (t > 0)$$

(b)

u_C 和 i_C 的 变 化 曲 线

可见u_C和i_C的衰减速率取决于RC之积。令

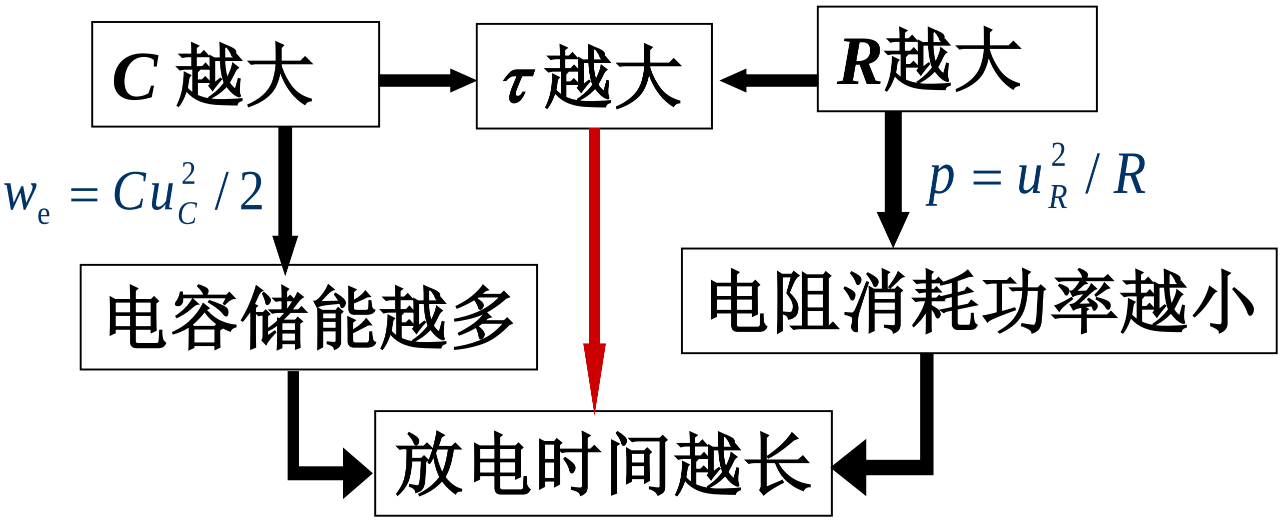
$\tau = RC$ 时间常数（单位：s）

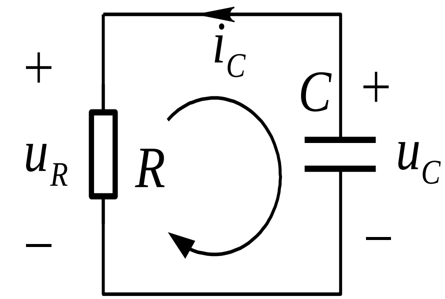
τ 对放电时间的影响

t	0	τ	2τ	3τ	4τ	5τ	…	∞
$u_C(t)$	U_0	$0.368U_0$	$0.135U_0$	$0.05U_0$	$0.018U_0$	$0.007U_0$	…	0

经过 3τ~5τ的时间, 放电基本结束

时间常数τ的理解





RC电路零输入响应

放电过程中的能量传递

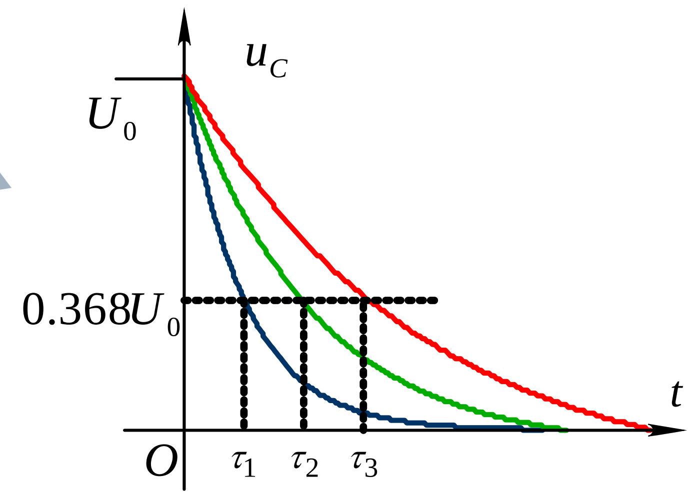
电容的原始储能

$$W_e(0_+) = \frac{1}{2}Cu_C^2(0_+) = \frac{1}{2}Cu_C^2(0_-) = \frac{1}{2}CU_0^2$$

$\|$

电阻所消耗的能量

$$\int_{0_+}^{\infty} p_R(t)\mathrm{d}t = \int_{0_+}^{\infty} i_C^2(t)R\mathrm{d}t = \int_{0_+}^{\infty}\left(\frac{U_0}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right)^2 R\mathrm{d}t = \frac{1}{2}CU_0^2$$

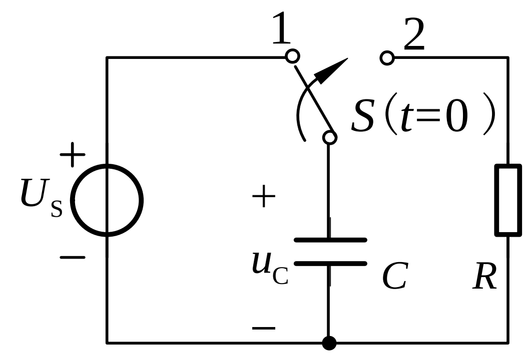


$\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$

不同τ值的 u_C

【补充例题2】

图示电路中 C 为高压电容器，且已充电完毕，u_C(0-)=10kV。设 t =0 开关由端子1打到端子2，15分钟后，u_C 降低为3.2kV，问



(1) 再经过15分钟后电容电压降为多少？

(2) 如果电容C=15μ F，R=？

【解】 全过程为零输入响应

$$u_C(t)=u_C(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}=10^4\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\ \mathrm{V}$$

$$3.2\times10^3=10\times10^3\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t=15\min=60\times15=900\ \mathrm{s}$$

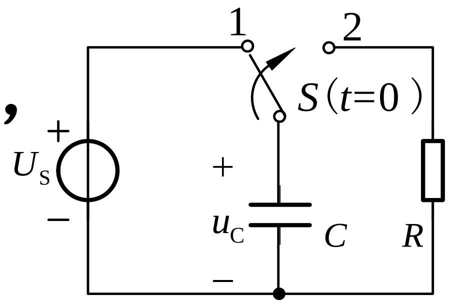
$$\mathrm{e}^{-\frac{900}{\tau}}=0.32\rightarrow \qquad \tau=RC=-\frac{900}{\ln 0.32}\approx 789.87\mathrm{s}$$

(1) $$u_C(30)=10^4\mathrm{e}^{-\frac{30\times60}{\tau}}=10^4\mathrm{e}^{-\frac{15\times60}{\tau}}\times\mathrm{e}^{-\frac{15\times60}{\tau}}=10^4\times0.32\times0.32=1024\mathrm{V}$$

(2) $$R=\frac{\tau}{C}=52.66\mathrm{M\Omega}$$

【补充例题2】

图示电路中 C 为高压电容器，且已充电完毕，$u_C(0\text{-})$=10kV。设 t =0 开关由端子1打到端子2，15分钟后，u_C 降低为3.2kV，问



(3) 需多长时间电容电压可降至30V以下?

(4) 若 C 不变，R 变为0.2Ω，电容最大放电电流是多少？若认为 $t = 5\tau$时放电完毕，那么放电的平均功率是多少?

$$(3)\quad 30 = 10^4 e^{-\frac{t}{\tau}} = 10^4 e^{-\frac{t}{790}} \Rightarrow t = -790\ln\frac{3}{1000} = 4589\text{s}$$

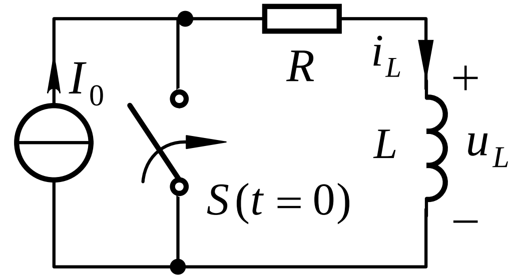
$$(4)\quad \tau' = 15\times 0.2\times 10^{-6} = 3\times 10^{-6}\text{s} \qquad u_C(t) = 10^4 e^{-\frac{1}{3}\times 10^6 t}\ \text{V}$$

$$i_C(t) = -C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -5\times 10^4 e^{-\frac{1}{3}\times 10^6 t}\ \text{A} \qquad i_{C\max} = i_C(0) = -5\times 10^4\ \text{A}$$

$$P = W/t = \frac{0.5Cu_C^2(0_-)}{5\tau'} = \frac{15\times 10^{-6}\times 10^8}{10\times 3\times 10^{-6}} = 50\times 10^6\ \text{W} = 50\text{MW}$$

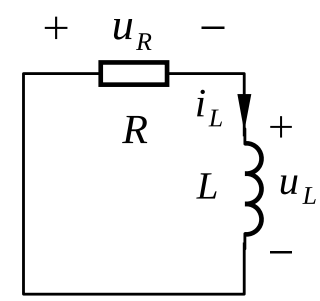
2 *RL*电路的零输入响应

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = I_0$$



(a)

$t>0$



(b)

KVL方程

$$u_L + u_R = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + Ri_L = 0$$

特征方程： $Lp + R = 0$

特征根： $p = -\dfrac{R}{L}$

通解： $i_L(t) = A\mathrm{e}^{pt} = A\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} = A\mathrm{e}^{-t/\tau}$

$\tau = L/R$

$$i_L(0_+) = A\mathrm{e}^0 = A = I_0$$

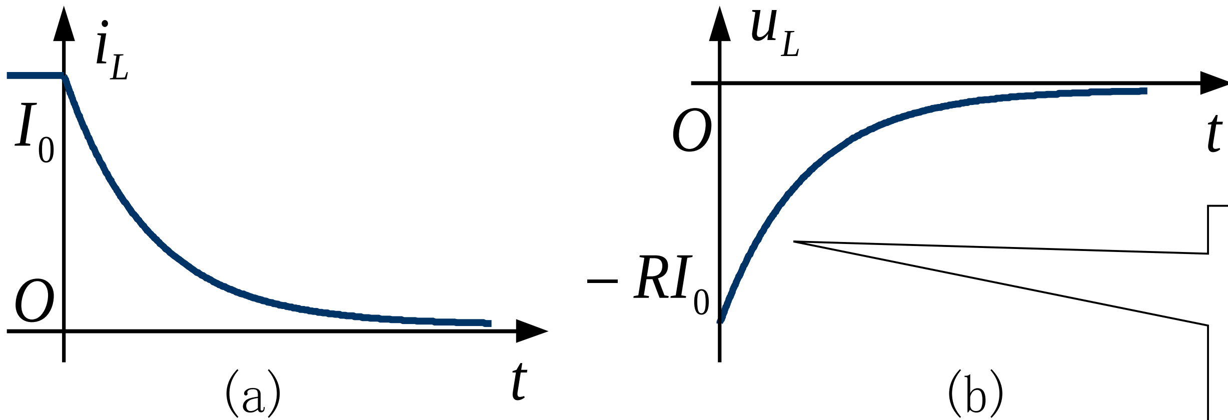
$$i_L(t) = i_L(0_+)\mathrm{e}^{-t/\tau} = I_0\mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad (t \ge 0)$$

$$u_L = -Ri_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = -RI_0\mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad (t > 0)$$

i_L 和 u_L 变化

$$i_L(t)=i_L(0_+)\mathrm{e}^{-t/\tau}=I_0\mathrm{e}^{-t/\tau}\ (t\ge 0)$$

$$u_L=-Ri_L=L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=-RI_0\mathrm{e}^{-t/\tau}\ (t>0)$$



换路时电感两端可能出现很高的瞬间电压

i_L 和 u_L 的变化曲线

τ 的理解

L越大 → **τ越大** ← **R越小**

L越大 → $w_L=Li_L^2/2$ → 电感储能越多

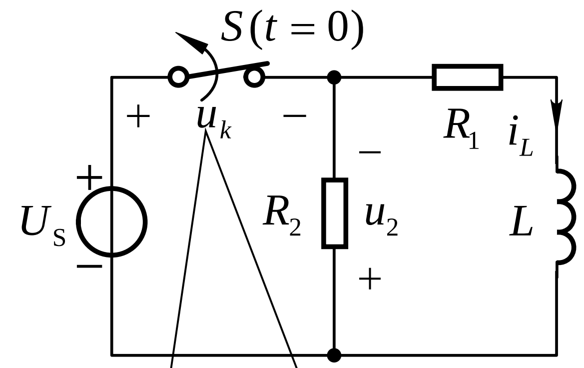
R越小 → $p=Ri_L^2$ → 电阻消耗功率越小

τ越大 → 放电时间越长

电感储能越多 → 放电时间越长 ← 电阻消耗功率越小

【例题8.2】

图示电路，已知U_S=35V，R_1=5Ω，R_2=5kΩ，L=0.4H。t<0时电路处于直流稳态。t=0时开关断开。求t>0时的电流i_L及开关两端电压u_k。



【解】 i_L初值： $i_L(0_+) = i_L(0_-) = \dfrac{U_S}{R_1} = 7\text{A}$

时间常数： $\tau = \dfrac{L}{R} = \dfrac{L}{R_1 + R_2} \approx 8\times10^{-5}\text{s}$

$$i_L(t) = i_L(0_+)e^{-t/\tau} = 7e^{-1.25\times10^4 t}\text{A} \qquad (t \geq 0)$$

$$u_k = U_S + u_2 = U_S + R_2 i_L = (35 + 3.5\times10^4 e^{-1.25\times10^4 t})\text{V} \qquad (t > 0)$$

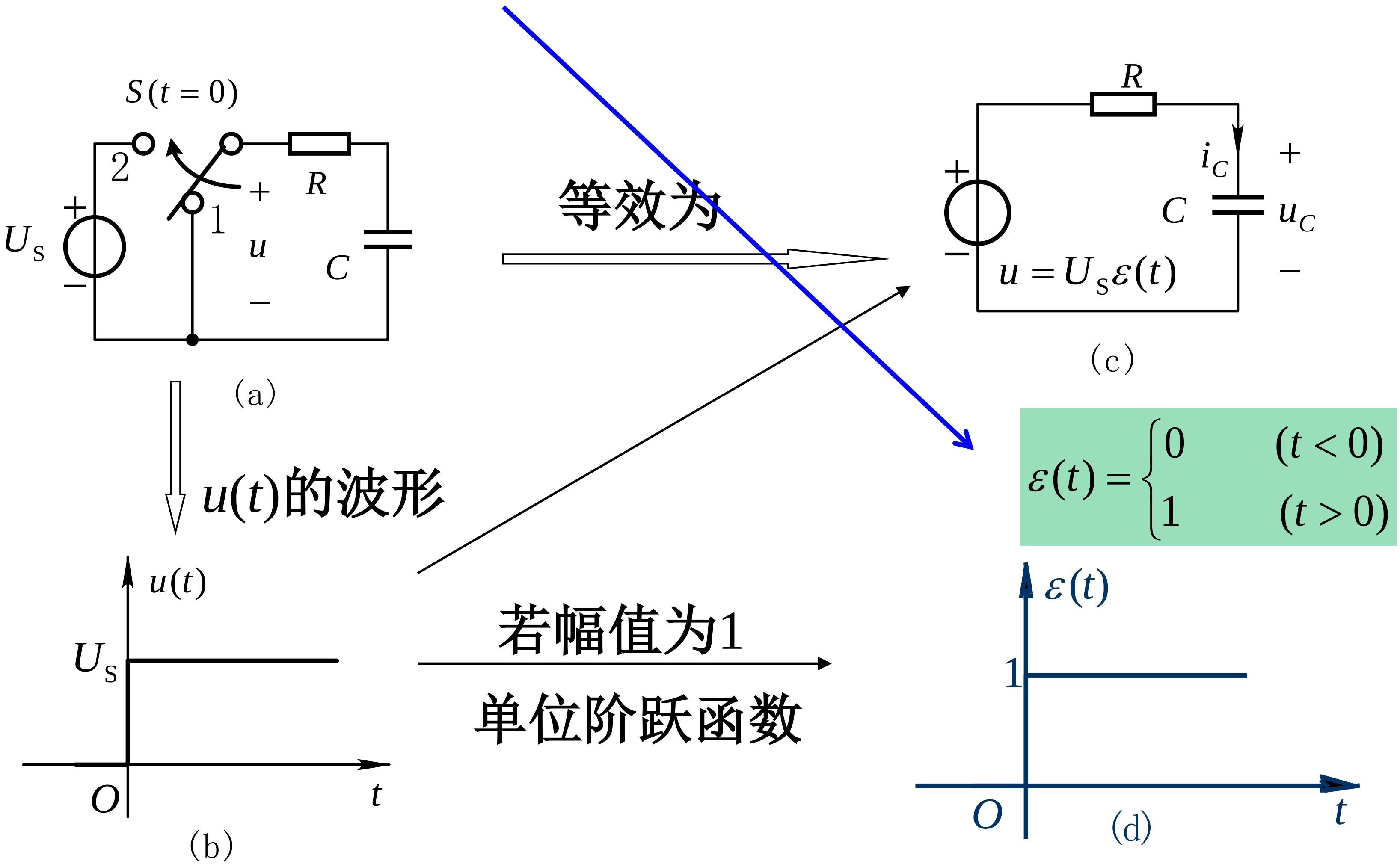
$t\to0_+$时 $u_k(0_+) = (35 + 3.5\times10^4)\text{V} \approx 3.5\times10^4\text{V}$

断开感性负载时，开关可能承受很高电压，损坏电路。

需采取并联保护措施

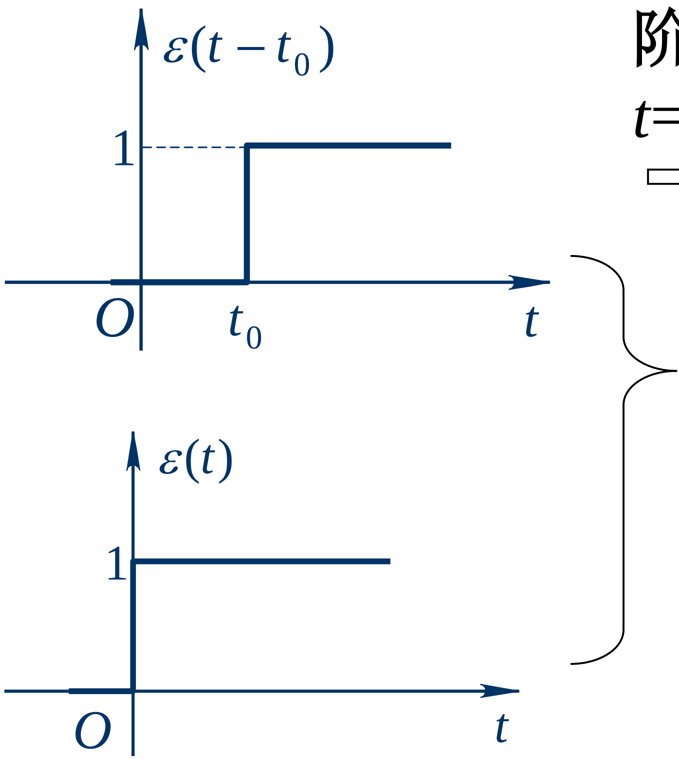
8.4 阶跃函数和冲激函数

1 单位阶跃函数



$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t>0)\end{cases}$$

2 单位脉冲函数



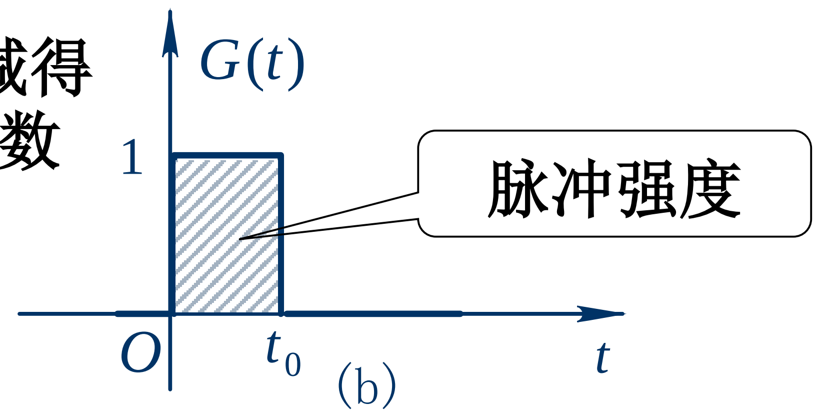
阶跃发生在

$t = t_0$ 时刻

延迟单位阶跃函数

$$\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0 & (t<t_0)\\ 1 & (t>t_0)\end{cases}$$

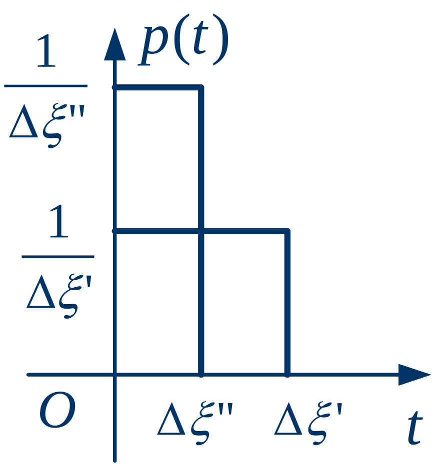
二者相减得脉冲函数



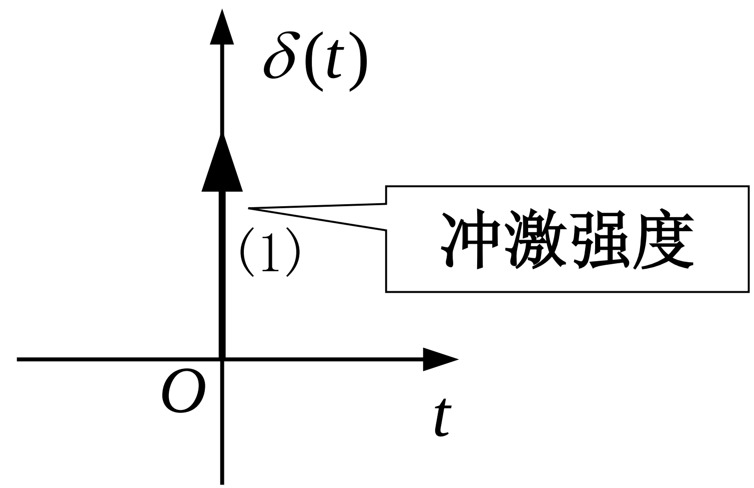
$$G(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-t_0)$$

单位脉冲：强度等于1的脉冲

3　单位冲激函数



宽度趋于零



单位脉冲函数宽度的变化

单位冲激函数

函数表示

$$\begin{cases} \delta(t) = \begin{cases} 0 & (t \neq 0) \\ \text{奇异} & (t = 0) \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \mathrm{d}t = 1 \end{cases}$$

延迟单位冲激函数

$\delta(t - t_0)$

4 单位冲激函数的性质

$$\begin{cases}\delta(t)=\delta(-t)\\ \delta(t-t_1)=\delta(t_1-t)\end{cases}$$

$$\begin{cases}f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)\\ f(t)\delta(t-t_1)=f(t_1)\delta(t-t_1)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t)\mathrm{d}t=f(0)\\ \int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t-t_1)\mathrm{d}t=f(t_1)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\delta(t)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varepsilon(t)=\varepsilon'(t)\\ \delta(t-t_1)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varepsilon(t-t_1)=\varepsilon'(t-t_1)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{t}\delta(\xi)\mathrm{d}\xi=\varepsilon(t)\\ \int_{-\infty}^{t}\delta(\xi-t_1)\mathrm{d}\xi=\varepsilon(t-t_1)\end{cases}$$