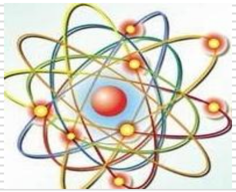
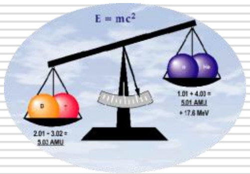


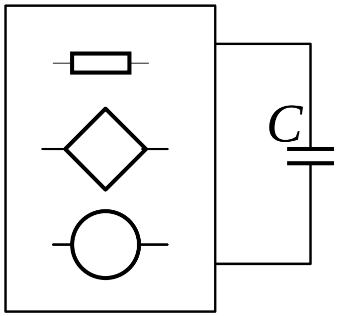


第8章　线性动态电路暂态过程的时域分析

开课教师：　王灿
开课单位：机电学院--电气工程学科

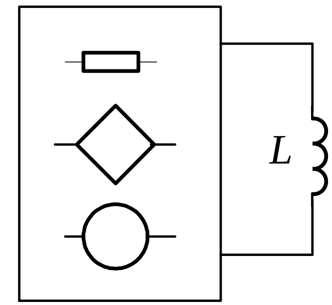
8.9 一阶电路暂态响应的一般形式

基本要求：熟练掌握一阶电路暂态响应的一般形式即三要素公式

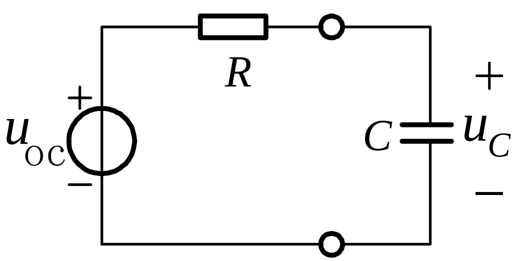


戴维南等效

一阶电路的一般形式



诺顿等效



KVL方程

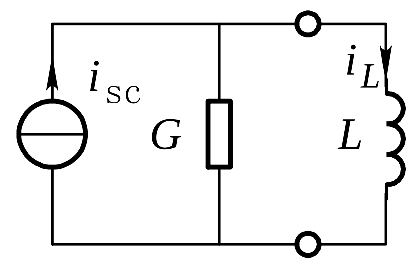
$$\begin{cases} RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = u_{oc} \\ u_C(0_+) = U_0 \end{cases}$$

时间常数　响应　激励

$$\tau\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} + f(t) = g(t)$$

$$f(0_+) = F_0$$

方程统一表示



KCL方程

$$\begin{cases} \dfrac{L}{R}\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + i_L = i_{sc} \\ i_L(0_+) = I_0 \end{cases}$$

三要素公式

$$f(0_+) = F_0$$

$$\tau \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} + f(t) = g(t) \qquad \tau \frac{\mathrm{d}f_\mathrm{h}(t)}{\mathrm{d}t} + f_\mathrm{h}(t) = 0$$

通解为

$$f(t) = f_\mathrm{p}(t) + f_\mathrm{h}(t) = f_\mathrm{p}(t) + A\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

令$t=0_+$ $\quad f(0_+) = f_\mathrm{p}(0_+) + A$ 代入得

$$A = f(0_+) - f_\mathrm{p}(0_+)$$

三要素公式: $f(t) = f_\mathrm{p}(t) + [f(0_+) - f_\mathrm{p}(0_+)]\mathrm{e}^{-t/\tau}$

利用响应的初始值 $f(0_+)$ 、时间常数 τ 和特解 $f_\mathrm{p}(t)$ (通常用强制分量作为特解)来求响应 $f(t)$ 的方法—经典法

三要素公式分析

全响应＝ 零输入响应＋ 零状态响应

$$= f(0_+)\mathrm{e}^{-t/\tau} + [f_\mathrm{p}(t) - f_\mathrm{p}(0_+)\mathrm{e}^{-t/\tau}]$$

$$f(t) = f_\mathrm{p}(t) + [f(0_+) - f_\mathrm{p}(0_+)]\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

三要素公式

全响应＝强制分量＋ 自由分量

全响应＝稳态分量＋暂态分量

周期电源

直流电源

$$f(t) = f_\infty + [f(0_+) - f_\infty(0_+)]\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

$$= f(0_+)\mathrm{e}^{-t/\tau} + f(\infty)(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})$$

$g(t)$ 形式	$f_\mathrm{p}(t)$ 形式
K	***A***
Kt	***A+Bt***
$\boldsymbol{Kt^2}$	$\boldsymbol{A+Bt+Ct^2}$
$K\mathrm{e}^{-bt}(b \neq 1/\tau)$	$A\mathrm{e}^{-bt}$
$K\mathrm{e}^{-bt}(b = 1/\tau)$	$(A+Bt)\mathrm{e}^{-bt}$
$K\cos(\omega t+\varphi)$	$A\cos(\omega t+\theta)$

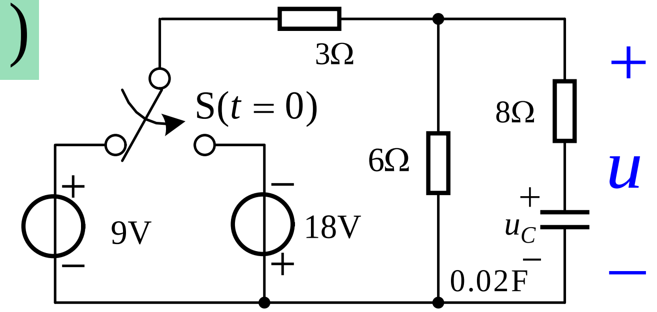
强制分量 $f_\mathrm{p}(t)$ 决定于独立源 $g(t)$ 与初值无关；

自由分量 总是e指数形式，由电路结构和参数决定，与激励无关；指数系数由初值和特解初值决定。

【补充例题7】 三要素求解

图示电路t<0时稳态，t=0换路。求t>0时的电压u。

【解】换路定律 $u_C(0_+)=u_C(0_-)=6\text{V}=u(0_-)$



t=0+ $$\left(\frac{1}{3\Omega}+\frac{1}{6\Omega}+\frac{1}{8\Omega}\right)u(0_+)=\frac{6\text{V}}{8\Omega}-\frac{18\text{V}}{3\Omega}$$

$$u(0_+)=-8.4\text{V}$$

$$u_C(\infty)=\frac{6}{6+3}\times(-18\text{V})=-12\text{V}=u(\infty)$$

全响应 $u_C(t)==(-12+18\text{e}^{-5t})\text{V}$

等效电阻 $R_\text{i}=10\Omega$

时间常数 $\tau=R_\text{i}C=0.2\text{s}$

$$u(t)=u(\infty)+[u(0_+)-u(\infty)]\text{e}^{-t/\tau}$$

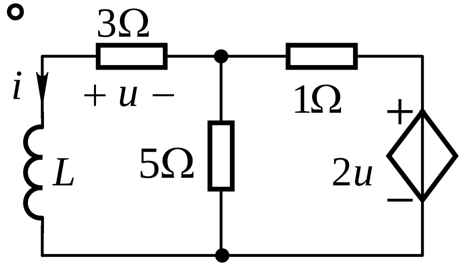
$$=\left(-12+[-8.4-(-12)]\text{e}^{-5t}\right)\text{V}=[-12+3.6\text{e}^{-5t}]\text{V}$$

$$u(t)=8\Omega\times C\frac{\text{d}u_C}{\text{d}t}+u_C$$

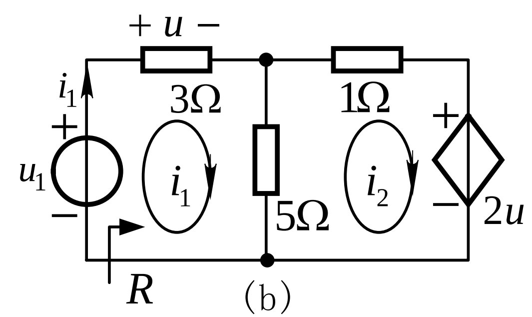
$$=[-12+3.6\text{e}^{-5t}]\text{V}$$

【例题8.5】

图(a)所示电路，电感电流$i(0_-)=10\text{A}$， $L=(1/6)\text{H}$。求$t\geq0$时电流 i 的变化规律。



(a)



(b)

【解】

i为零输入响应。其稳态值 $i(\infty)=0$；初值 $i(0_+)=i(0_-)=10\text{A}$

求τ：等效电阻R求解如图(b)所示

回路方程

$$\begin{cases}(3+5)\Omega\times i_1-5\Omega\times i_2=u_1\\-5\Omega\times i_1+(5+1)\Omega\times i_2+2u=0\\u=3\Omega\times i_1\end{cases}$$

整理得等效电阻

$$R=u_1/i_1=53/6\ (\Omega)$$

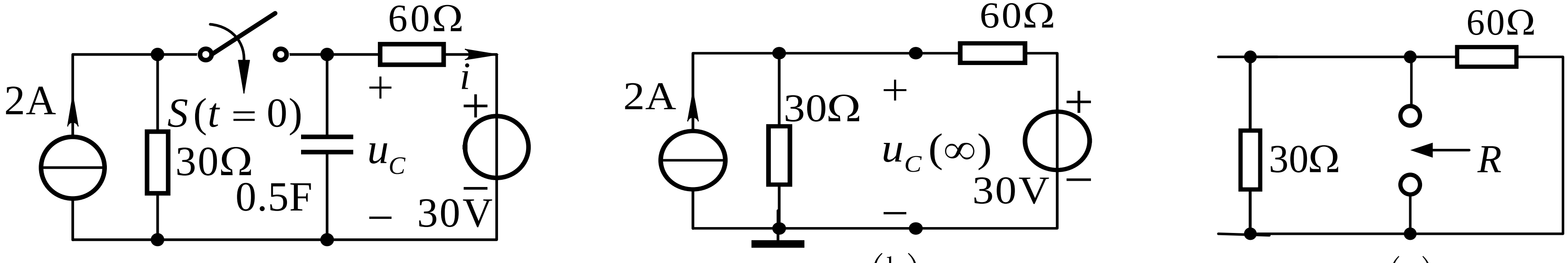
时间常数 $\tau=\dfrac{L}{R}=\dfrac{1}{53}\text{s}$

三要素公式

$$i(t)=i(\infty)+[i(0_+)-i(\infty)]\mathrm{e}^{-t/\tau}=i(0_+)\mathrm{e}^{-t/\tau}=10\mathrm{e}^{-53t}\text{A}\quad(t\geq0)$$

【例题8.6】方法一

图(a)所示电路t<0时处于稳态。t=0时开关接通。求t>0时电压u_C和电流 i 。



(a) (b) (c)

【解】t<0 $u_C(0_-)=30\text{V}=u_C(0_+)$ $t\to\infty$时电路如图(b)

$$\left(\frac{1}{30\Omega}+\frac{1}{60\Omega}\right)u_C(\infty)=2\text{A}+\frac{30\text{V}}{60\Omega}$$

解得 $u_C(\infty)=50\text{V}$

等效电阻，电路如图(c) $R=\dfrac{30\times 60}{30+60}\Omega=20\Omega$

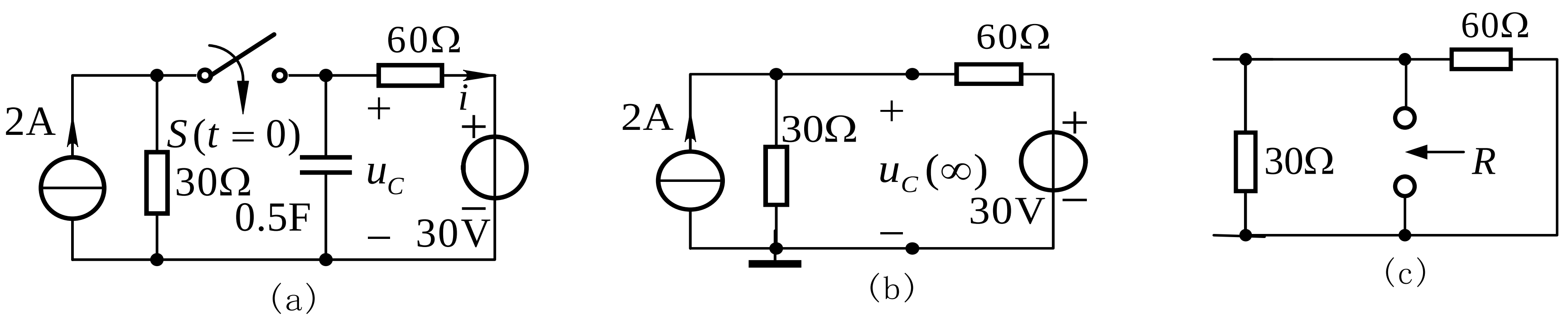
时间常数 $\tau=RC=20\Omega\times 0.5\text{F}=10\text{s}$

三要素公式 $u_C(t)=u_C(\infty)+[u_C(0_+)-u_C(\infty)]\text{e}^{-t/\tau}=(50-20\text{e}^{-0.1t})\text{V}\quad (t\geq 0)$

电流 $i(t)=\dfrac{u_C-30\text{V}}{60\Omega}=\dfrac{1}{3}(1-\text{e}^{-0.1t})\text{A}\qquad (t>0)$

【例题8.6】方法二

图(a)所示电路$t<0$时处于稳态。 $t=0$时开关接通。求$t>0$时电流 i 。



【解】 $u_C(0_+)=30\text{V}$

$t\to\infty$时电路如图(b)

$$i(0_+)=\frac{u_C(0_+)-30}{60}=0\text{A}$$

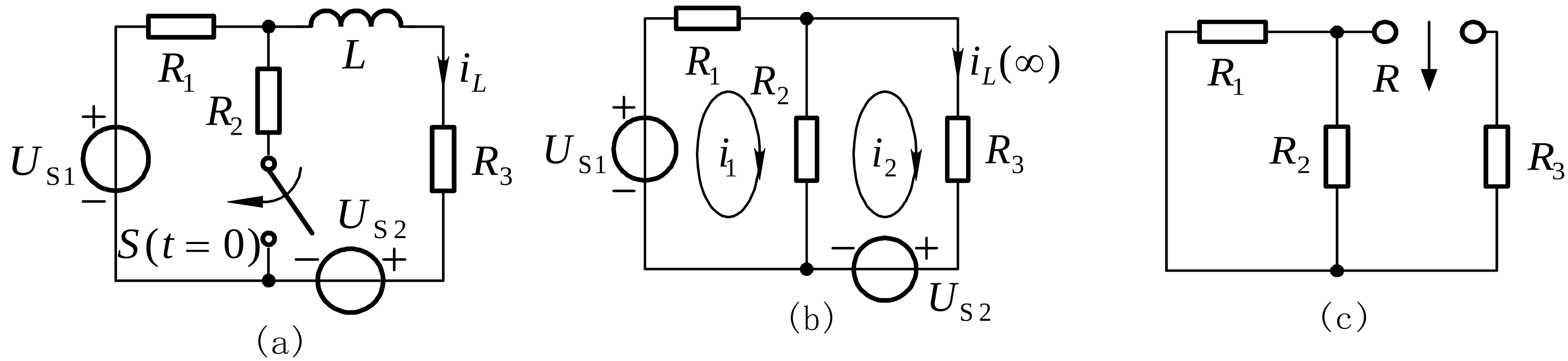
$$i(\infty)=\frac{60-30}{90}=\frac{1}{3}\text{A}$$

时间常数 $\tau=RC=20\Omega\times0.5\text{F}=10\text{s}$

$$i(t)=i(\infty)(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})=\frac{1}{3}(1-\mathrm{e}^{-0.1t})\text{A}\qquad(t>0)$$

【例题8.7】

图(a)所示电路中 $t<0$ 时处于稳态。设U_{S1}=38V，U_{S2}=12V, R_1=20Ω , R_2=5Ω , R_3=6Ω , L=0.2H，求 $t\geq 0$ 时的电流i_L 。



【解】$t<0$

$$i_L(0_-)=\frac{U_{S1}-U_{S2}}{R_1+R_3}=1\text{A}\ =i_L(0_+)$$

$t\to\infty$时电路如图(b)

$$\begin{cases}(R_1+R_2)i_1-R_2i_2=U_{S1}\\ -R_2i_1+(R_2+R_3)i_2=-U_{S2}\end{cases}$$

解得

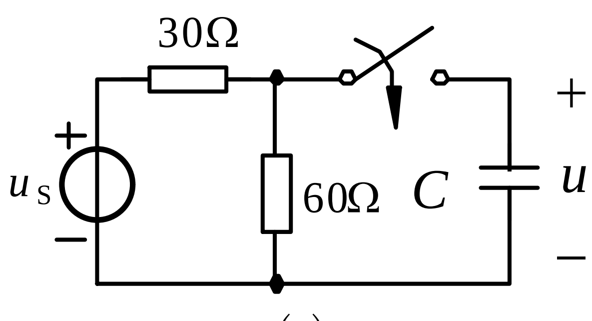
$$i_L(\infty)=i_2=-0.44\text{A}$$

等效电阻如图(c) $R=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}+R_3=10\Omega$　　时间常数 $\tau=\dfrac{L}{R}=0.02\text{s}$

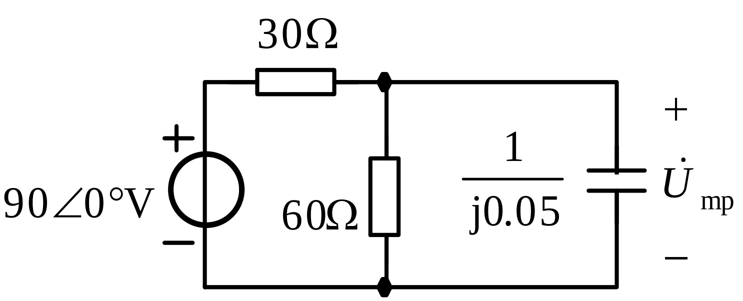
$$i_L(t)=i_L(\infty)+[i_L(0_+)-i_L(\infty)]\text{e}^{-t/\tau}=(-0.44+1.44\text{e}^{-50t})\text{A}\qquad(t\geq 0)$$

【例题8.8】

电路如图(a)所示，C=0.001F，u_S为正弦电压源，幅值为90V，角频率为50rad/s。当u_S为正的最大值时，将开关接通，开关接通前电容电压为10V。求开关接通后电压 u 的变化规律。



(a)



(b)

【解】设开关接通时刻 $t=0$，则u_S为 $u_S = 90\cos(50t)\text{V}$

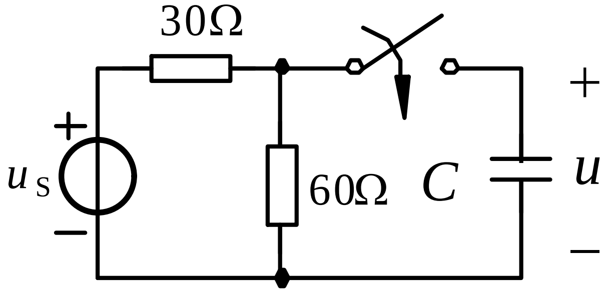
u是电容电压，依题意 $u_C(0_-) = 10\text{V} = u_C(0_+) = u(0_+)$

当$t \to \infty$时，正弦稳态相量模型图(b)计算$u_p(t)$

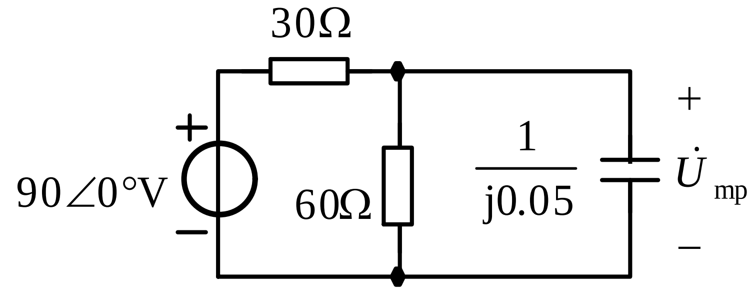
节点电压方程

$$\left(\frac{1}{30\Omega} + \frac{1}{60\Omega} + \text{j}0.05\text{S}\right)\dot{U}_{mp} = \frac{90\angle 0^\circ\text{V}}{30\Omega}$$

【例题8.8】



(a)



(b)

$$\dot{U}_{mp} = \frac{3V}{0.05(1+j)} = 30\sqrt{2}\angle -45^\circ V$$

$$u_p(t) = 30\sqrt{2}\cos(50t - 45^\circ)\ V \qquad u(0_+) = 10V$$

时间常数 $\tau = RC = \dfrac{30\times 60}{30+60}\Omega \times 0.001F = 0.02s$

$$\boxed{u(t) = u_p(t) + [u(0_+) - u_p(0_+)]e^{-t/\tau}}$$

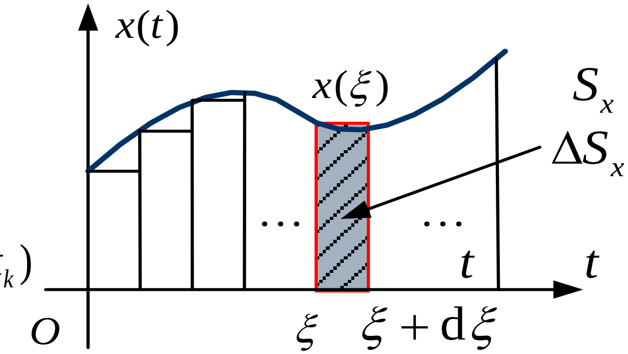
$$= 30\sqrt{2}\cos(50t - 45^\circ) + [10 - 30\sqrt{2}\cos(-45^\circ)]e^{-50t}$$

$$= 30\sqrt{2}\cos(50t - 45^\circ) - 20e^{-50t}V \qquad (t \geq 0)$$

8.10 求解暂态响应的卷积积分法

基本要求：理解卷积积分蕴含的电路概念及其计算。

激励x(t)对电路的影响相当于其积分面积S_x对电路的作用



任意激励分解

$$x_\Delta(\xi)=\sum_{k=0}^{n-1}x(t_k)p_\Delta(\xi-t_k)\Delta \quad \text{if } \xi=t_k \quad x_\Delta(t_k)=\sum_{k=0}^{n-1}x(t_k)p_\Delta(t_k-t_k)\Delta=x(t_k)$$

$$x_\Delta(\xi)=\sum_{k=0}^{n-1}x(t_k)p_\Delta(\xi-t_k)\Delta \Rightarrow y_\Delta(t)=\sum_{k=0}^{n-1}x(t_k)n_\Delta(t-t_k)\Delta$$

$n\to\infty,\Delta\to 0$时：$t_k\to\xi,\Delta\to\mathrm{d}\xi$

激励 $p(t)$ $\longrightarrow$ $n(t)$ 响应

$$x(\xi)\mathrm{d}\xi\cdot\delta(t-\xi) \longrightarrow x(\xi)\mathrm{d}\xi\cdot h(t-\xi)=x(\xi)h(t-\xi)\cdot\mathrm{d}\xi$$

$$\sum x(\xi)\mathrm{d}\xi\cdot\delta(t-\xi) \longrightarrow y(t)=\int_0^t x(\xi)h(t-\xi)\cdot\mathrm{d}\xi$$

卷积

8.10 求解暂态响应的卷积积分法

卷积： $$y(t)=\int_{0}^{t}x(\xi)h(t-\xi)\cdot \mathrm{d}\xi$$

若$x(t)$在0或 t 时刻存在冲激信号

$$y(t)=\int_{0_-}^{t_+}x(\xi)h(t-\xi)\cdot \mathrm{d}\xi$$

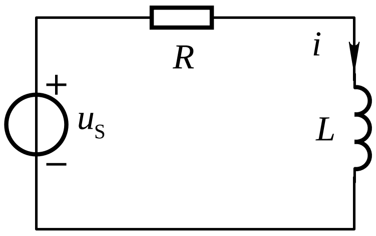
记作

$$y(t)=x(t)*h(t)=h(t)*x(t)$$

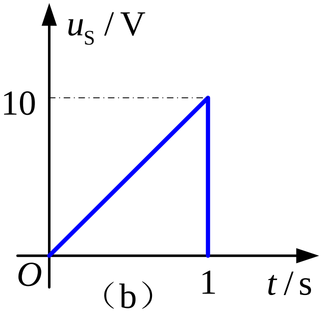
利用卷积，可获得任意激励$x(t)$引起的响应$y(t)$

【例题8.11】

图 (a) 电路 R=10Ω , L=1H，激励 u_S波形如图 (b)所示。求零状态响应 i 。



（a）



（b）

【解】单位阶跃特性$s(t)$

$$s(t)=\frac{1}{R}(1-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t})=0.1(1-\mathrm{e}^{-10t})\Omega^{-1}\quad(t>0)$$

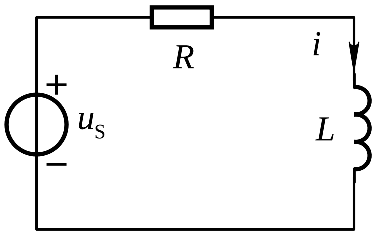
单位冲激特性$h(t)$ $$h(t)=\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{-10t}(\Omega\mathrm{s})^{-1}\quad(t>0)$$

$0\le t<1\mathrm{s}$ $$i=\int_0^t u_S(\xi)h(t-\xi)\mathrm{d}\xi=\int_0^t 10\xi\mathrm{e}^{-10(t-\xi)}\mathrm{d}\xi$$

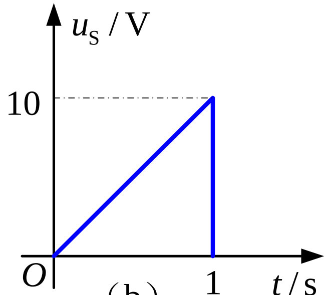
$u_S(t)=10t$ $$=10\mathrm{e}^{-10t}\int_0^t \xi\mathrm{e}^{10\xi}\mathrm{d}\xi=(t-0.1+0.1\mathrm{e}^{-10t})\mathrm{A}$$

【例题8.11】

图 (a) 电路 R=10Ω , L=1H，激励 u_S波形如图 (b)所示。求零状态响应 i 。



（a）



（b）

$$t \geq 1\text{s} \qquad u_S(t) = 0$$

$$i = \int_0^t u_S(\xi)h(t-\xi)\mathrm{d}\xi = \int_0^1 u_S(\xi)h(t-\xi)\mathrm{d}\xi + \int_1^t u_S(\xi)h(t-\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$= \int_0^1 10\xi \mathrm{e}^{-10(t-\xi)}\mathrm{d}\xi + 0 = 10\mathrm{e}^{-10t}\int_0^1 \xi \mathrm{e}^{10\xi}\mathrm{d}\xi = (0.9 + 0.1\mathrm{e}^{-10})\mathrm{e}^{-10(t-1)}\text{A}$$

零输入响应

$$(0 \leq t < 1\text{s}) \qquad i = (t - 0.1 + 0.1\mathrm{e}^{-10t})\text{A}$$

零状态响应