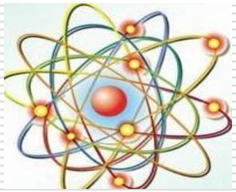

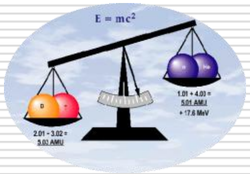

第9章 线性动态电路暂态过程的复频域分析

开课教师： 王灿
开课单位：机电学院--电气工程学科

导 言

复频域分析法属于变换域分析法，各种变换域分析法在解决电路计算问题或其它工程问题时发挥着重要作用。在前面将正弦量变换为相量然后再加以分析的方法也属于电路的变换域分析法。其原理同样适用于本章的复频域分析法，只是分析问题的对象不同，因而所用的数学变换也不同。本章针对高阶动态电路

首先简要介绍拉普拉斯正反变换及其基本性质；

然后建立电路的复频域模型，包括基尔霍夫定律的复频域形式和元件方程的复频域形式，并在此基础上讨论复频域分析法；

最后讨论网络函数。

目 录

9.1 拉普拉斯变换

$f(t)$ 在$t>0$及$t=0$的某一邻域内有定义，且积分

$\int_{0_-}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$ 在复平面**s**的某一邻域内收敛，则

$$\boldsymbol{F(s)} = \int_{0_-}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

称为 $f(t)$的拉普拉斯变换

$s=\sigma+\mathrm{j}\omega$ 复频率

$$f(t)=\mathbf{L}^{-1}\{F(s)\}=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s$$

拉普拉斯逆变换

$$F(s)=\mathbf{L}\{f(t)\} \qquad f(t)=\mathbf{L}^{-1}\{F(s)\}$$

象函数 原函数

电路常用到符号:

$$U(s)=\mathrm{L}\{u(t)\},\quad u(t)=\mathrm{L}^{-1}\{U(s)\}$$

$$I(s)=\mathrm{L}\{i(t)\},\quad i(t)=\mathrm{L}^{-1}\{I(s)\}$$

常用函数的拉普拉斯变换

1. 单位阶跃函数 $f(t)=\varepsilon(t)$

$$F(s)=\boldsymbol{L}\{\varepsilon(t)\}=\int_{0_-}^{\infty}\varepsilon(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_{0_+}^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\Big|_{0_+}^{\infty}$$

$$\begin{cases}\mathrm{L}\{\varepsilon(t)\}=1/s\\ \mathrm{L}^{-1}\{1/s\}=\varepsilon(t)\end{cases}$$

2. 指数函数 $f(t)=\mathrm{e}^{at}$

$$F(s)=\boldsymbol{L}\{\mathrm{e}^{at}\}=\int_{0_-}^{\infty}\mathrm{e}^{at}\cdot\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{1}{a-s}\mathrm{e}^{(a-s)t}\Big|_{0_-}^{\infty}(\mathrm{Re}[s]>\mathrm{Re}[a])$$

$$\begin{cases}\mathbf{L}\{\mathrm{e}^{at}\}=\dfrac{1}{s-a}\\ \mathbf{L}^{-1}\{\dfrac{1}{s-a}\}=\mathrm{e}^{at}\end{cases}$$

3. 单位冲激函数 $f(t)=\delta(t)$

$$F(s)=\boldsymbol{L}\{\delta(t)\}=\int_{0_-}^{\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{0}\int_{0_-}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1$$

$$\begin{cases}\mathbf{L}\{\delta(t)\}=1\\ \mathbf{L}^{-1}\{1\}=\delta(t)\end{cases}$$

常用函数拉普拉斯变换对

$f(t)(t \geq 0)$	$F(s)$	$f(t)(t \geq 0)$	$F(s)$
A	A/s	$\sin(\omega t+\psi)$	$\dfrac{s\sin\psi+\omega\cos\psi}{s^2+\omega^2}$
$A(1-e^{-\alpha t})$	$\dfrac{A\alpha}{s(s+\alpha)}$	$\cos(\omega t+\psi)$	$\dfrac{s\cos\psi-\omega\sin\psi}{s^2+\omega^2}$
t^n (n为正整数)	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$e^{-\alpha t}\sin(\omega t+\psi)$	$\dfrac{(s+\alpha)\sin\psi+\omega\cos\psi}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
$t^n e^{-\alpha t}$ (n为正整数)	$\dfrac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$	$e^{-\alpha t}\cos(\omega t+\psi)$	$\dfrac{(s+\alpha)\cos\psi-\omega\sin\psi}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
$(1-\alpha t)e^{-\alpha t}$	$\dfrac{s}{(s+\alpha)^2}$		

9.2 拉普拉斯变换的基本性质

1 唯一性质

$$\mathrm{L}\{f_1(t)\}=F_1(s),\quad \mathrm{L}\{f_2(t)\}=F_2(s)$$

2 线性性质

$$\mathrm{L}\{af_1(t)+bf_2(t)\}=aF_1(s)+bF_2(s)$$

$$\mathrm{L}^{-1}\{aF_1(s)+bF_2(s)\}=af_1(t)+bf_2(t)$$

原函数线性组合的拉氏变换等于各原函数拉氏变换的同一线性组合。

象函数的拉氏反变换亦有相同的线性性质。

【例题9.1】求 $f(t)=A(1-\mathrm{e}^{-at})$、$f(t)=\sin\omega t$ 的象函数

【解】 $F(s)=\mathrm{L}\{A(1-\mathrm{e}^{-at})\}=A\mathrm{L}\{1\}-A\mathrm{L}\{\mathrm{e}^{-at}\}=\dfrac{A}{s}-\dfrac{A}{s+a}=\dfrac{Aa}{s(s+a)}$

$$F(s)=\mathrm{L}\{\sin\omega t\}=\mathrm{L}\{\frac{1}{2\mathrm{j}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t})\}$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{j}}\mathrm{L}\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\}=\frac{1}{2\mathrm{j}}(\frac{1}{s-\mathrm{j}\omega}-\frac{1}{s+\mathrm{j}\omega})=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

拉普拉斯变换的基本性质

3 时域微分性质

$$\mathbf{L}\left\{\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right\}=sF(s)-f(0_{-})$$

该性质表明一个函数求导后的拉氏变换等于这个函数的拉氏变换后乘以复参量s，再减去0_{-}时刻的起始值。

【例题9.2】用微分性质求 $f(t)=\cos\omega t$ 的象函数

【解】 $$F(s)=\mathbf{L}\{\cos\omega t\}=\mathbf{L}\{\frac{1}{\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin\omega t\}$$

$$=\frac{1}{\omega}\left(s\mathbf{L}\{\sin\omega t\}-\sin\omega t\big|_{t=0_{-}}\right)=\boxed{\frac{s}{s^{2}+\omega^{2}}}$$

4 时域积分性质

$$\mathbf{L}\{\int_{0_{-}}^{t}f(\xi)\mathrm{d}\xi\}=\frac{1}{s}F(s)$$

一个函数积分后的拉氏变换等于这个函数的拉氏变换除以复参量s。

拉普拉斯变换的基本性质

5 时域延迟性质 $\mathbf{L}\{f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)\}=\mathrm{e}^{-st_0}F(s)$

$f(t)$延迟至t_0的拉氏变换

等于原函数拉氏变换乘以因子 e^{-st_0}

6 频域位移性质 $\mathbf{L}\{\mathrm{e}^{at}f(t)\}=F(s-a)\quad[\mathrm{Re}(s-a)>0]$

一个函数乘以指数函数 e^{at} 的拉氏变换

等于其象函数位移a

7 初值定理 $f(0_+)=\lim\limits_{t\to 0_+}f(t)=\lim\limits_{s\to\infty}sF(s)$

8 终值定理 $f(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=\lim\limits_{s\to 0}sF(s)$

拉普拉斯变换的基本性质

【补充例题1】求 $f(t)=\mathrm{e}^{-2t}\cos 30t$ 的象函数

查表（+频域位移性质） $F(s)=\mathbf{L}\{f(t)\}=\dfrac{s+2}{(s+2)^2+30^2}$

由初值定理得 $f(0_+)=\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)=\lim\limits_{s\to\infty} s\times\dfrac{s+2}{(s+2)^2+30^2}=1$

由终值定理得 $f(\infty)=\lim\limits_{s\to 0} sF(s)=\lim\limits_{s\to 0} s\times\dfrac{s+2}{(s+2)^2+30^2}=0$

9 卷积定理

$$\mathbf{L}\{f_1(t)*f_2(t)\}=F_1(s)F_2(s)$$

$$\mathbf{L}^{-1}\{F_1(s)F_2(s)\}=f_1(t)*f_2(t)$$

原函数卷积的象函数等于相应象函数的乘积；
象函数乘积的原函数等于原函数的卷积 。

9.3 拉普拉斯反变换

在线性集中参数电路中，电压和电流的象函数都是s的有理分式，可以展开成部分分式之和的形式，对每个部分分式求原函数是很简单的。

再根据反变换的线性性质，将所有部分分式的原函数代数相加，就得所求象函数的原函数。

集中参数电路的象函数$F(s)$可表示成下列有理分式:

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

1、$n>m$: 根据 $D(s)=0$ 分单根、复根、重根几种情况

2、$n\le m$: $\rightarrow$ $n>m$

1、$n > m$: (1) $D(s)=0$ 只有单根时:

$$F(s)=\frac{A_1}{s-p_1}+\frac{A_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{A_k}{s-p_k}+\cdots+\frac{A_n}{s-p_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{s-p_k}$$

$$f(t)=\mathbf{L}^{-1}\{F(s)\}=\mathbf{L}^{-1}\{\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{s-p_k}\}=\sum_{k=1}^{n}A_k e^{p_k t}$$

$$=A_1e^{p_1t}+A_2e^{p_2t}+\cdots+A_ke^{p_kt}+\cdots+A_ne^{p_nt}$$

求 A_k:

$$F(s)(s-p_k)=\frac{A_1(s-p_k)}{s-p_1}+\frac{A_2(s-p_k)}{s-p_2}+\cdots+A_k+\cdots+\frac{A_n(s-p_k)}{s-p_n}$$

$$A_k=\lim_{s\to p_k}F(s)(s-p_k)=\lim_{s\to p_k}\frac{N(s)(s-p_k)}{D(s)}\qquad(k=1,2,\cdots,n)$$

【补充例题2】求 $F(s)=\dfrac{4s+5}{s^2+5s+6}$ 的原函数

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4s+5}{s^2+5s+6}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4s+5}{(s+2)(s+3)}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A_1}{(s+2)}+\frac{A_2}{(s+3)}\right]$$

$$A_1=(s+2)\cdot F(s)\big|_{s=-2}=(s+2)\cdot\frac{4s+5}{(s+2)(s+3)}\bigg|_{s=-2}=-3$$

$$A_2=(s+3)\cdot F(s)\big|_{s=-3}=(s+3)\cdot\frac{4s+5}{(s+2)(s+3)}\bigg|_{s=-3}=7$$

$$f(t)=-3e^{-2t}+7e^{-3t}$$

用洛比达法则求系数A_k：

$$A_k=\lim_{s\to p_k}\frac{N(s)(s-p_k)}{D(s)}=\lim_{s\to p_k}\frac{N(s)+N'(s)(s-p_k)}{D'(s)}=\frac{N(p_k)}{D'(p_k)}$$

$$A_1=\frac{4s+5}{(2s+5)}\bigg|_{s=-2}=-3 \qquad A_2=\frac{4s+5}{(2s+5)}\bigg|_{s=-3}=7$$

1、$n>m$： (2) $D(s)=0$ 有单复根时→共轭复根

$$F(s)=\frac{A}{s-p}+\frac{\overset{*}{A}}{s-\overset{*}{p}}$$

若：$p=a+\mathrm{j}\beta$ $A=|A|\angle\theta$

则：$\overset{*}{P}=\alpha-\mathrm{j}\beta$ $\overset{*}{A}=|A|\angle-\theta$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=A\mathrm{e}^{pt}+\overset{*}{A}\mathrm{e}^{\overset{*}{p}t}=|A|\mathrm{e}^{at}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\beta t+\theta)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\beta t+\theta)}]$$

$$=2|A|\mathrm{e}^{at}\cos(\beta t+\theta)\quad(t\geq0)$$

【例题9.5】求 $F(s)=\dfrac{s+1}{s^3+2s^2+2s}$ 的原函数。

$$p_1=0$$
$$p_2=a+\mathrm{j}\beta=-1+\mathrm{j}$$
$$p_3=\overset{*}{p_2}=-1-\mathrm{j}$$

$$F(s)=\frac{A_1}{s-p_1}+\frac{A_2}{s-p_2}+\frac{A_3}{s-p_3}$$

$D(s)=s^3+2s^2+2s=0$ 根为：

$$A_1=\frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)}=\left.\frac{s+1}{3s^2+4s+2}\right|_{s=p_1}=0.5$$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=A_1\mathrm{e}^{p_1t}+2|A_2|\mathrm{e}^{at}\cos(\beta t+\theta)$$

$$A_2=\frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)}=\left.\frac{s+1}{3s^2+4s+2}\right|_{s=p_2}$$

$$A_3=\overset{*}{A_2}$$

$$=0.5+0.5\sqrt{2}\mathrm{e}^{-t}\cos(t-135^\circ)\qquad(t\geq0)$$

$$=|A_2|\angle\theta=0.25\sqrt{2}\angle-135^\circ$$

1、$n > m$： (3) $D(s)=0$有重根时

【例题9.6】求 $F(s)=\dfrac{10s^2+4}{s(s+1)(s+2)^2}$ 的原函数

【解】展开式: $F(s)=\dfrac{A_1}{s}+\dfrac{A_2}{s+1}+\dfrac{B_2}{(s+2)^2}+\dfrac{B_1}{s+2}$

确定系数:

$$A_1=\lim_{s\to 0}\frac{10s^2+4}{s(s+1)(s+2)^2}s=1$$

$$A_2=\lim_{s\to -1}\frac{10s^2+4}{s(s+1)(s+2)^2}(s+1)=-14$$

$$B_2=\lim_{s\to -2}\frac{10s^2+4}{s(s+1)(s+2)^2}(s+2)^2=22$$

$$B_1=\lim_{s\to -2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{10s^2+4}{s(s+1)(s+2)^2}(s+2)^2\right]=13$$

$$f(t)=\mathbf{L}^{-1}\{F(s)\}=A_1+A_2\mathrm{e}^{-t}+(B_2t+B_1)\mathrm{e}^{-2t}$$

$$=1-14\mathrm{e}^{-t}+(22t+13)\mathrm{e}^{-2t}$$

2、$n \le m$：

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

【补充例题3】求 $F(s)=\dfrac{s^4+9s^3+24s^2+22s+1}{s^3+7s^2+10s}$ **的原函数**

化为真分式:

$$F(s)=s+2+\frac{2s+1}{s^3+7s^2+10s}$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & s+2 \\
\hline
s^3+7s^2+10s & s^4+9s^3+24s^2+22s+1 \\
 & s^4+7s^3+10s^2 \\
\hline
 & 2s^3+14s^2+22s+1 \\
 & 2s^3+14s^2+20s \\
\hline
 & 2s+1
\end{array}
$$

$$=s+2+\left(\frac{0.1}{s}+\frac{0.5}{s+2}+\frac{-0.6}{s+5}\right)$$

$$\mathbf{L}^{-1}\{s\}=\delta'(t)$$

$$f(t)=\delta'(t)+2\delta(t)+0.1+0.5\mathrm{e}^{-2t}-0.6\mathrm{e}^{-5t}$$