第10章 二端口网络

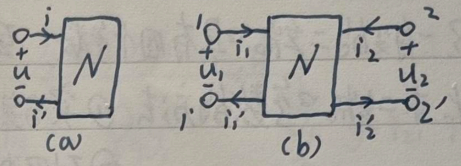
一、概念

1. 网络的一个端口由满足端口条件的一对端子构成

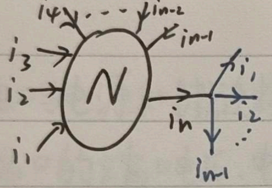
端口条件：有一对端子，从其中一个端子流入的电流等于从另一个端子流出的电流

如右图，二端网络一定满足端口条件 $i=i'$，称为一端口

若四端网络满足 $i_1=i_1'$，$i_2=i_2'$，便是一个二端口



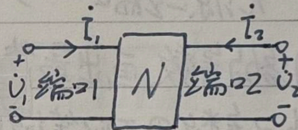
2. 一个n端网络可用n-1端口参数代替



有 $i_n=i_1+i_2+\cdots+i_{n-1}$

3. 本章只讨论线性无源二端口，若二端口含动态元件，则为零状态。

二、二端口的参数方程



1. 均设二端口的端口电压、电流为关联参考方向

参数方程的理解：数学上：$\dot{I}_1$、$\dot{I}_2$、$\dot{U}_1$、$\dot{U}_2$中两个作为自变量，两个作为因变量，共有$C_4^2=6$种方程形式

物理上：施加两个源，根据齐性定理和叠加定理，另两个参数为其线性组合

全部记忆

参数	开路阻抗参数Z	短路导纳参数Y	传输参数A	混合参数H
代数方程	$\begin{cases}\dot{U}_1=Z_{11}\dot{I}_1+Z_{12}\dot{I}_2\\ \dot{U}_2=Z_{21}\dot{I}_1+Z_{22}\dot{I}_2\end{cases}$	$\begin{cases}\dot{I}_1=Y_{11}\dot{U}_1+Y_{12}\dot{U}_2\\ \dot{I}_2=Y_{21}\dot{U}_1+Y_{22}\dot{U}_2\end{cases}$	$\begin{cases}\dot{U}_1=A_{11}\dot{U}_2+A_{12}(-\dot{I}_2)\\ \dot{I}_1=A_{21}\dot{U}_2+A_{22}(-\dot{I}_2)\end{cases}$	$\begin{cases}\dot{U}_1=H_{11}\dot{I}_1+H_{12}\dot{U}_2\\ \dot{I}_2=H_{21}\dot{I}_1+H_{22}\dot{U}_2\end{cases}$
矩阵方程	$\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\end{bmatrix}=Z\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}=Y\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{I}_1\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}\dot{U}_2\\ -\dot{I}_2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}=H\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{U}_2\end{bmatrix}$
互易条件	$Z_{12}=Z_{21}$	$Y_{12}=Y_{21}$	$\lvert A\rvert=A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21}=1$	$H_{12}=-H_{21}$
对称条件	$Z_{12}=Z_{21}$且$Z_{11}=Z_{22}$	$Y_{12}=Y_{21}$且$Y_{11}=Y_{22}$	$\lvert A\rvert=1$且$A_{11}=A_{22}$	$H_{12}=-H_{21}$且$\lvert H\rvert=1$
互逆关系	$Z=Y^{-1}$		$A\neq B^{-1}$	$H=G^{-1}$

注意：写参数矩阵时一定要带上单位，写对称条件时顺便把互易、对称条件都写上

2、若一个二端口是互易的，即满足互易定理（有三种表述形式）

互易性电路：仅含线性二端电阻和独立源的电路，服从互易定理

• 若一个二端口是对称的，则对换输入和输出端口，不会改变二端口的特性

此时，二端口的结构和参数都是对称的

3、一般的二端口具有四个参数，互易二端口：三个　对称二端口：两个

4、求二端口参数的方法 ① 实验测试（开路短路法）

② 列写电路方程，消去中间变量　求Y：列节点电压方程

二、二端口网络的等效电路

等效代替：　无源一端口 ⟶ 一个阻抗/导纳

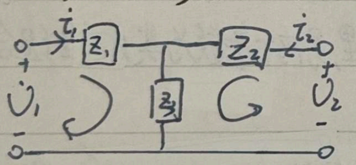
有源一端口 ⟶ 戴维南/诺顿电路

无源二端口 ⟶ T形/π形等效电路

作用：已知网络的参数，画出最简等效电路

1、互易二端口　现推

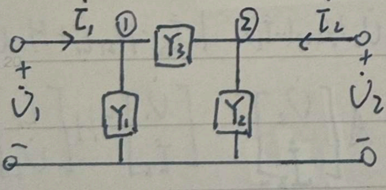
• 给定Z参数，用T形等效



$$\begin{cases}\dot{U}_1=(Z_1+Z_3)\dot{I}_1+Z_3\dot{I}_2\\ \dot{U}_2=Z_3\dot{I}_1+(Z_2+Z_3)\dot{I}_2\end{cases}$$

对比Z，有 $\begin{cases}Z_{11}=Z_1+Z_3\\ Z_{12}=Z_{21}=Z_3\\ Z_{22}=Z_2+Z_3\end{cases}$　反解，有 $\begin{cases}Z_1=Z_{11}-Z_{12}\\ Z_2=Z_{22}-Z_{12}\\ Z_3=Z_{12}\end{cases}$

• 给定Y参数，用π形等效



$$\begin{cases}\dot{I}_1=(Y_1+Y_3)\dot{U}_1-Y_3\dot{U}_2\\ \dot{I}_2=-Y_3\dot{U}_1+(Y_2+Y_3)\dot{U}_2\end{cases}$$

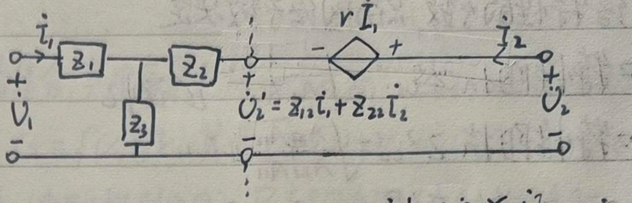
对比Y，有 $\begin{cases}Y_{11}=Y_1+Y_3\\ Y_{12}=Y_{21}=-Y_3\\ Y_{22}=Y_2+Y_3\end{cases}$　反解，有 $\begin{cases}Y_1=Y_{11}+Y_{12}\\ Y_2=Y_{22}+Y_{12}\\ Y_3=-Y_{12}\end{cases}$

• 给定其他参数：先化为Z/Y参数，再用T/π形等效

2、非互易二端口:添一个受控源

· 给定Z参数

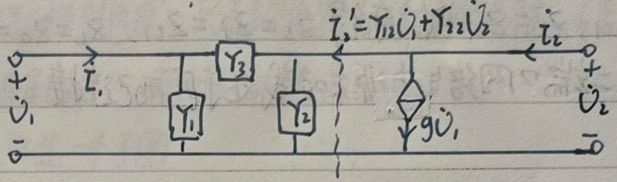
$$\begin{cases}\dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = Z_{12}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 + (Z_{21}-Z_{12})\dot{I}_1\end{cases}$$



$r = Z_{21} - Z_{12}$

· 给定Y参数

$$\begin{cases}\dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = Y_{12}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 + (Y_{21}-Y_{12})\dot{U}_1\end{cases}$$



$g = Y_{21} - Y_{12}$

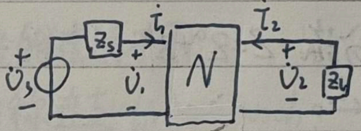
三、二端口与电源和负载连接

1. 求二端口的端口电压、电流通用方法:四方程联立

二端口参数方程 $\begin{cases}\dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}(-\dot{I}_2) \\ \dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}(-\dot{I}_2)\end{cases}$

电源支路方程 $\dot{U}_1 = \dot{U}_S - Z_S\dot{I}_1$

负载支路方程 $\dot{U}_2 = -Z_L\dot{I}_2$ 　非关联!



2. 输入阻抗:即输入端口电压与电流之比

$$Z_i = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{A_{11}\dot{U}_2 - A_{12}\dot{I}_2}{A_{21}\dot{U}_2 - A_{22}\dot{I}_2} = \frac{A_{11}(-Z_L\dot{I}_2) - A_{12}\dot{I}_2}{A_{21}(-Z_L\dot{I}_2) - A_{22}\dot{I}_2} = \frac{A_{11}Z_L + A_{12}}{A_{21}Z_L + A_{22}}$$ 现推

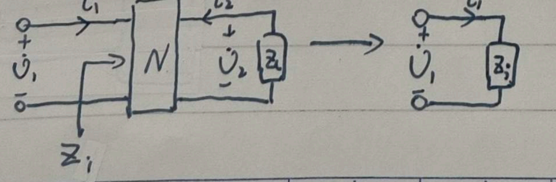
给定Z_L,经由N,可得到不同的Z_i,故二端口具有变换阻抗的作用

3. 输出阻抗 即输入端所接源不作用时,输出端口电压与电流之比

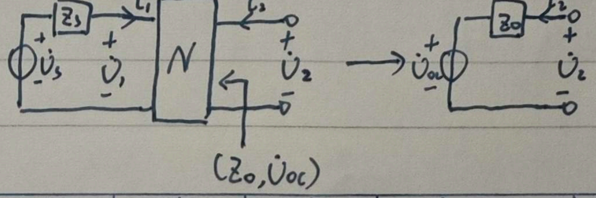
由①②③式得 $\dot{U}_2 = \frac{\dot{U}_S}{A_{21}Z_S + A_{11}} + \frac{A_{22}Z_S + A_{12}}{A_{21}Z_S + A_{11}}\dot{I}_2$

即 $\dot{U}_{oc} = \frac{\dot{U}_S}{A_{21}Z_S + A_{11}}$, $Z_0 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}\Big|_{\dot{U}_S=0} = \frac{A_{22}Z_S + A_{12}}{A_{21}Z_S + A_{11}}$ 现推

2、



3.



2. 求输入阻抗时,是从输入端口往里看而不在意输入端是什么,因此缺少输入端口方程　　3. 同理

No.

Date

3.特性阻抗

是表征网络特性的参数，只由网络参数决定

输入端口特性阻抗 $Z_{c1}=\sqrt{\frac{A_{11}A_{12}}{A_{21}A_{22}}}$ ↙记忆

输出端口特性阻抗 $Z_{c2}=\sqrt{\frac{A_{22}A_{12}}{A_{21}A_{11}}}$

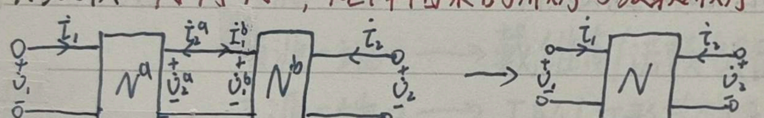
· 当 $Z_S=Z_{c1}$，$Z_L=Z_{c2}$ 时，可得 $Z_S=Z_i=Z_{c1}$，$Z_L=Z_o=Z_{c2}$

称二端口网络与电源和负载处于匹配连接

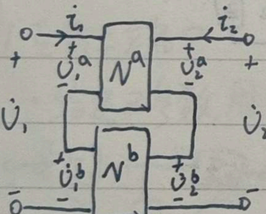
四、复合二端口

多个二端口按一定方式连接起来而不破坏端口条件，成为一个复合二端口

1.级联 $A=A^aA^b$，矩阵相乘的顺序与级联顺序一致



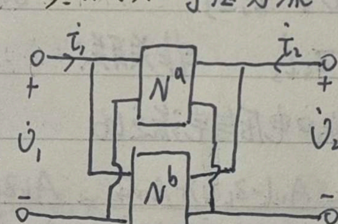
2.串联 等流分压 $Z=Z^a+Z^b$



$\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\end{bmatrix}=Z\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}$

相加 相等

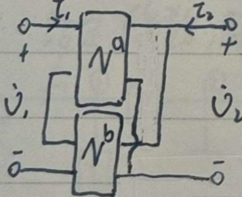
3.并联 等压分流 $Y=Y^a+Y^b$



$\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}=Y\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\end{bmatrix}$

相加 相等

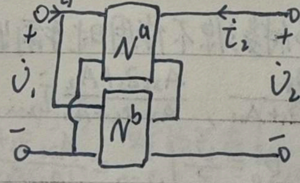
4.串并联 $H=H^a+H^b$



$\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}=H\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{U}_2\end{bmatrix}$

相加 相等

5.并串联 $G=G^a+G^b$



$\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{U}_2\end{bmatrix}=G\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}$

相加 相等

第1章 网络图论与网络方程

一、网络的图

1.图 是由节点和支路组成的集合，其中每条支路两端都连到相应的节点上.
graph vertex edge $G=\{V,E\}$，其中 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$E=\{e_1,e_2,\cdots e_b\}$

电路的图是对实际电路的抽象(电路模型也是)，只表现电路的结构特征 不表现元件特征

2.连通图 图中任两个节点之间都存在路径 否则:非连通图

子图 图的子集 一个孤立节点也是一个子图

有向图 图中所有支路都指定了方向 否则:无向图

平面图 图的所有支路可以画在一个平面上而不交叉

回路 从图的某一节点出发，经过若干节点和支路(均只许经过一次)后又回到出发节点所形成的闭合路径

3.树 tree

连通图的树是一个包含全部节点而不形成回路的连通子图

属于树的支路称树支 tree branch，其余支路称连支 link branch

树是将全部节点连通起来所需要的一组最少支路集合

对一个b条支路、n个节点的连通图: 树的个数 n^{n-2}，树支数 $b_t=n-1$ 连支数 $b_l=b-(n-1)$

4.割集 cut-set

连通图的割集是满足以下条件的一组支路集合

(1)移去此集合中的所有支路(保留所有节点)，则此图变为两个分离的部分，成为非连通图

(2)若留下该集合中的任一支路，剩下的图仍是连通的

二、基本回路和基本割集

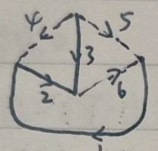
对一个电路模型，先画出其图，再任选一树

1、基本回路 fundamental loop

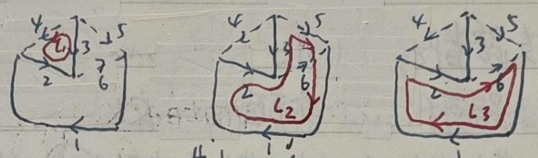
由每一个连支和必要的树支所构成的单连支回路　其方向规定为与所含连支同向

对基本回路列写的KVL方程是独立的，因此基本回路是一组独立回路，回路数 $b_l=b-(n-1)$

仅由树支不能形成回路 ⇒ 在全部支路电压中，树支电压是一组独立变量



图与树



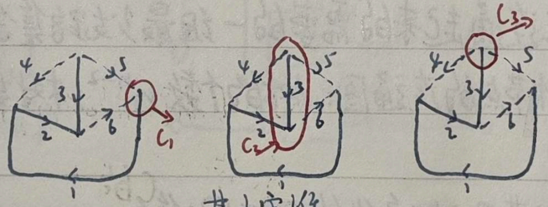
基本回路

2、基本割集 fundamental cut-set

由每一个树支和必要的连支所构成的单树支割集　其方向(流入或流出)规定为树支方向

对基本割集列写的KCL方程是独立的，因此基本割集是一组独立割集，割集数 $b_t=n-1$

仅由连支不能形成割集 ⇒ 在全部支路电流中，连支电流是一组独立变量



基本割集

三、图的矩阵表示

目的：作为图的一种数学表示，矩阵可以直接参与运算

分类 $\begin{cases}\text{独立节点—支路　关联矩阵 } A \\ \text{基本回路—支路　基本回路矩阵 } B \\ \text{基本割集—支路　基本割集矩阵 } C\end{cases}$

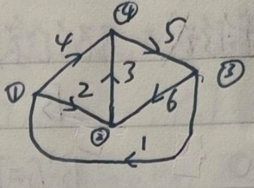
1、关联矩阵 A $\in F^{(n-1)\times b}$

A的行号对应节点号，列号对应支路号，元素为 $a_{ij}=\begin{cases}0 & \text{支路}j\text{与节点}i\text{无关}\\ 1,-1 & \text{支路}j\text{从“1”指向“-1”}\end{cases}$

通常将第n号节点设为参考节点，并省略参考节点对应的行

eg、

$$A=\begin{array}{c|cccccc} \text{节点}\backslash\text{支路} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline ① & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ ② & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ ③ & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}$$



关联矩阵与网络的图一一对应

给定图写 A：先画出矩阵框，一行一行写；由A画图：先确定节点数，一列一列画

2、基本回路矩阵 B $\in F^{b_l\times b}$

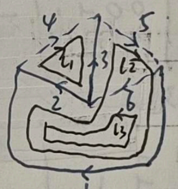
B的行对应基本回路，列对应支路，元素为 $b_{ij}=\begin{cases}0 & \text{基本回路}i\text{与支路}j\text{无关}\\ 1,-1 & \text{同向为1 反向为-1}\end{cases}$

B与选取的树有关，通常①支路编号为先树支后连支 ②基本回路编号顺序与连支顺序一致

B的右端必为一个 $b_l\times b_l$ 的单位阵，即 $B=[B_t \vdots I_l]$

eg

$$B=\begin{array}{c|cccccc} \text{基本回路}\backslash\text{支路} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline l_1 & 0 & 1 & -1 & 1 & & \\ l_2 & 1 & -1 & 1 & & 1 & \\ l_3 & -1 & 1 & 0 & & & 1 \end{array}$$

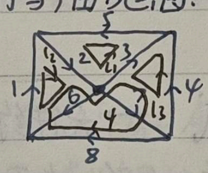


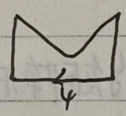
给定图写B：先画出矩阵框，一行一行写；由B画图：先按B中的行画出对应回路，最后将所有回路整合成一个图

eg、

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & & 1 & & \\ 0 & 0 & -1 & 1 & & & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & -1 & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow$





3.基本割集矩阵 C $\in F^{b_t\times b}$

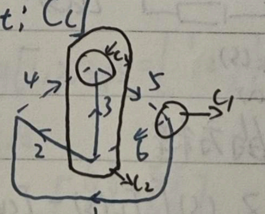
C的行对应基本割集，列对应支路，元素为 $c_{ij}=\begin{cases}0 & \text{基本割集}i\text{与支路}j\text{无关}\\ 1,-1 & \text{同向为1 反向为-1}\end{cases}$

C与选取的树有关，通常①支路编号为先树支后连支 ②基本割集编号顺序与树支顺序一致

C的左端必为一个 $b_t\times b_t$ 的单位阵，即 $C=[I_t \vdots C_l]$

eg.

$$C=\begin{array}{c|cccccc} \text{基本割集}\backslash\text{支路} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline c_1 & 1 & & & & -1 & 1 \\ c_2 & & 1 & & -1 & 1 & -1 \\ c_3 & & & 1 & 1 & -1 & \end{array}$$



给定图写C：先画出矩阵框，一行一行写；由C画图：无法直接画，由 $B_t=-C_l^T$ 得B后，由B画图

4、三类矩阵的关系

若对同一网络选定同种的树,有 $AB^T=0$ $BA^T=0$

$B_t=-C_l^T$ $BC^T=0$ $CB^T=0$

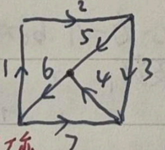
5、基尔霍夫定律的矩阵形式 记红字,利用 $B=[B_t \vdots I_l]$, $C=[I_t \vdots C_l]$,现推蓝字

	A	B		C	
KCL	$AI=0$	$B^TI_l=I$	$I_t=B_t^TI_l$	$CI=0$	$I_t=-C_lI_l$
KVL	$A^TU_n=U$	$BU=0$	$U_l=-B_tU_t$	$C^TU_t=U$	$U_l=C_l^TU_t$

注:由C求B或由B求C

①若有单位阵 I 则直接用公式 $B_t=-C_l^T$

②若无单位阵,则先找出哪些支路是树支/连支,重排矩阵的列后再求

eg. $C=\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & & & & 0 & -1 & 1 \\ & 1 & & & 0 & -1 & 1 \\ & & 1 & & 1 & -1 & 1 \\ & & & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow B=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & \\ -1 & -1 & -1 & 0 & & & 1 \end{array}\right] \end{array} \longrightarrow$ 

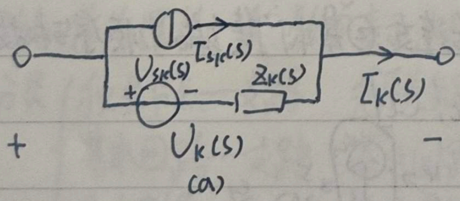
eg. $C=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & & 1 & & 1 \\ & & 1 & -1 & & \\ & & 1 & -1 & 1 & \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{重排} C'=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & & & -1 & 1 & -1 \\ & 1 & & 0 & -1 & 1 \\ & & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{支路编号不变} B'=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & 1 & & \\ -1 & 1 & 1 & & 1 & \\ 1 & -1 & 0 & & & 1 \end{array}\right] \end{array} \longrightarrow B=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & & & -1 & \\ -1 & & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & & -1 & & & 1 \end{array}\right] \end{array}$

1、3、5为树支,2、4、6为连支

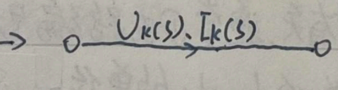
四、广义支路及其方程的矩阵形式 —— 元件约束

1、如图 a 所示复频域形式的广义支路,在图中对应一条支路

要求广义支路满足如下条件:①电流、电压关联 ②电流源与支路电流同向 ③电压源与支路电压同向



(a)



(b)

第k条广义支路的方程

(1) $U_k(s)=Z_k(s)[I_k(s)-I_{sk}(s)]+U_{sk}(s)=Z_k(s)I_k(s)-Z_k(s)I_{sk}(s)+U_{sk}(s)$ $k=1,2,\cdots b$

或(2) $I_k(s)=Y_k(s)[U_k(s)-U_{sk}(s)]+I_{sk}(s)=Y_k(s)U_k(s)-Y_k(s)U_{sk}(s)+I_{sk}(s)$ $k=1,2,\cdots b$

则 b 条支路的支路方程矩阵形式：

$U = ZI - ZI_s + U_s$ $\qquad$ $I = YU - YU_s + I_s$

其中：U：支路电压向量，I：支路电流向量

这两是同向为正：$U_s = [U_{s1}, U_{s2}, \cdots, U_{sb}]^T$：支路源电压向量；$I_s = [I_{s1}, I_{s2}, \cdots, I_{sb}]^T$：支路源电流向量

$Z = diag[Z_1, Z_2, \cdots, Z_b]$，$Y = diag[Y_1, Y_2, \cdots, Y_b]$ $\qquad$ $Z = Y^{-1}$

注：当电路中各支路与其他支路均无关，即支路间无耦合时，Z、Y 为对角阵

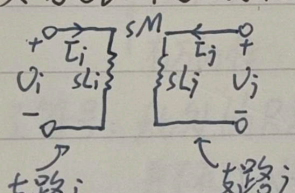
2、若电路中含受控源

则 Z、Y 不再是对角阵

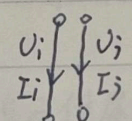
若含压控电流源 VCCS，宜列 Y 方程，若含流控电压源 CCVS，宜列 Z 方程

支路导纳矩阵 $\qquad$ 支路阻抗矩阵

3、若电路中含互感元件：



$\longrightarrow$



$\longrightarrow \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sL_i & \pm sM \\ \pm sM & sL_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_i \\ I_j \end{bmatrix}$

五、电路方程的矩阵形式 $\quad$ 电路的结构约束 + 元件约束

1、节点电压方程的矩阵形式

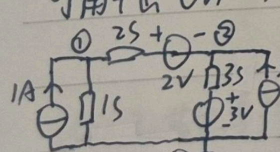
$AI = 0$、$I = YU - YU_s + I_s$、$A^T U_n = U \Rightarrow AYA^T U_n = AYU_s - AI_s$

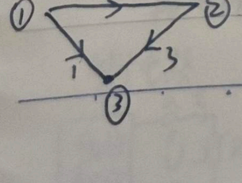
令 节点导纳矩阵 $Y_n = AYA^T$ 其对角线元素为自导纳，其余元素为互导纳

令 节点源电流向量 $I_{sn} = AYU_s - AI_s$ 其元素以注入节点电流为正

$$Y_n U_n = I_{sn}$$

可解出 $U_n = Y_n^{-1} I_{sn}$，eg.





则 $A = \begin{array}{c} \\ ① \\ ② \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$，$Y = diag[1, 2, 3]S = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix} S$

$U_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} V$，$I_s = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} A$

$\Rightarrow Y_n = AYA^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} S$ $\qquad$ $\begin{bmatrix} 自导 & 互导 \\ 互导 & 自导 \end{bmatrix}$

$I_{sn} = AYU_s - AI_s = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} A$ $\qquad$ 注入电流为正

从而 $U_n = \begin{bmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \end{bmatrix} = Y_n^{-1} I_{sn} = \cdots$

No.

Date

2.回路电流方程的矩阵形式

$BU=0$　$U=ZI-ZI_s+U_s$、$I=B^TI_l \Rightarrow BZB^TI_l=BZI_s-BU_s$

令回路阻抗矩阵 $Z_l=BZB^T$

令回路源电压向量 $U_{sl}=BZI_s-BU_s$　其元素以沿回路电位升为正

$$Z_lI_l=U_{sl}$$

可解出 $I_l=Z_l^{-1}U_{sl}$

3.割集电压方程的矩阵形式

$CI=0$，$I=YU-YU_s+I_s$，$C^TU_t=U \Rightarrow CYC^TU_t=CYU_s-CI_s$

令割集导纳矩阵 $Y_t=CYC^T$

割集源电流向量　$I_{st}=CYU_s-CI_s$

$$Y_tU_t=I_{st}$$

注：①计算 $Y_n=AYA^T$ 时，AY 的结果可以用在下一问求 AYU_s-AI_s

②若 Y 为对角阵则 $Y_n=AYA^T$ 为对称阵

第12章 非线性电阻电路

非线性电路指含有非线性元件的电路，其电路方程是非线性的

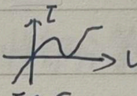
非线性电阻电路是最简单的非线性电路

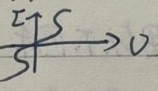
一、非线性电阻的元件特性

1.特点：非线性电阻的U-I关系不是通过原点的一条直线，故不满足欧姆定律

2.分类：分类的目的是对不同类型的非线性电阻选用不同的方法列写电路方程

- 单调型 $U=f(I)$ $I=f^{-1}(U)$
- 压控型 $I=f(U)$ "N"型
- 流控型 $U=f(I)$ "S"型

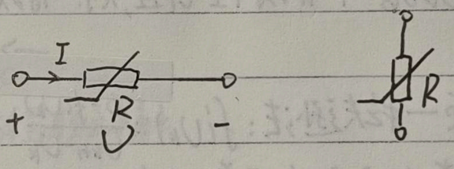




谁是自变量就是谁控

- 双向性 特征曲线关于原点对称
- 有方向性

3.符号：此处的R只表示该元件属于电阻元件，并不表示元件的参数



二、非线性直流电路方程

电路定理 —— 只适用于线性电路 齐性、叠加定理，等效电源定理

都适用 置换定理

1.电路只含一个非线性电阻

Step 1. 将电路划分为线性部分和非线性部分，利用等效电源定理将线性部分化到最简

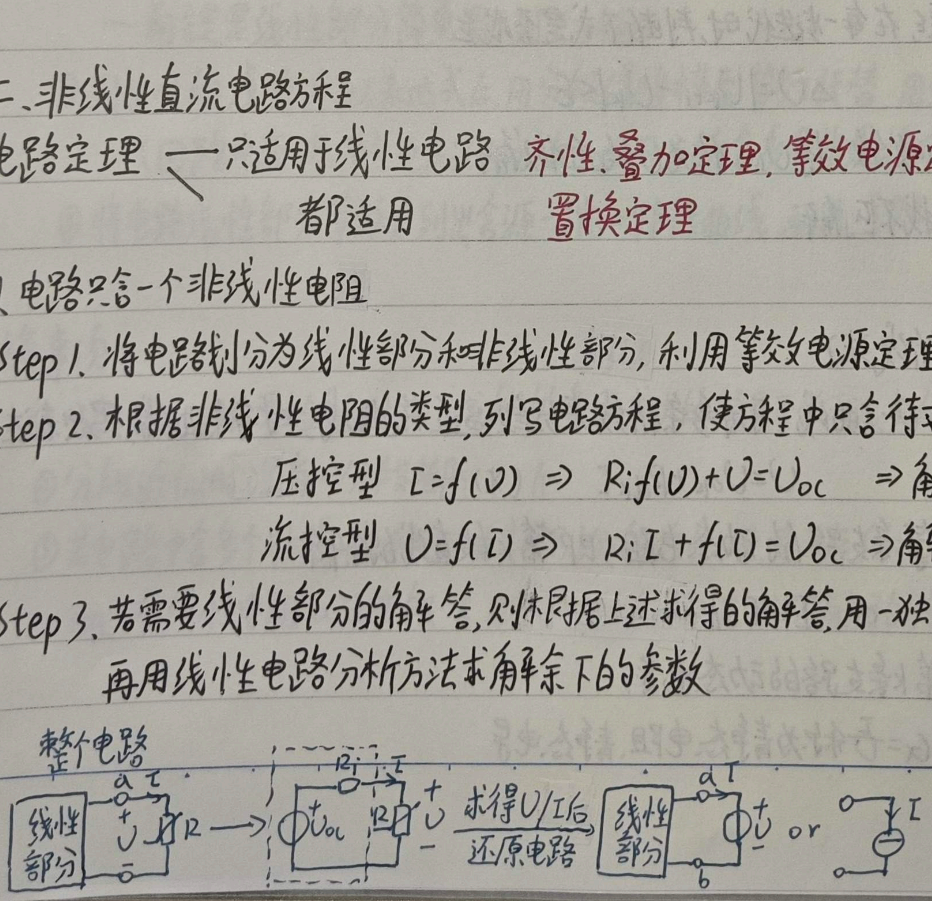
Step 2. 根据非线性电阻的类型，列写电路方程，使方程中只含待求量U或I

压控型 $I=f(U) \Rightarrow R_i f(U)+U=U_{oc} \Rightarrow$ 解出U

流控型 $U=f(I) \Rightarrow R_i I+f(I)=U_{oc} \Rightarrow$ 解出I

Step 3. 若需要线性部分的解答，则根据上述求得的解答用一独立源置换非线性电阻，再用线性电路分析方法求解余下的参数

整个电路



2.电路含多个非线性电阻

方法：若电路中非线性电阻多是压控的，则列节点电压方程，

eg、$R_1: I_1=I_1(U_1)$ 用节点电压表示U_1、U_2，代入方程组中消去I_1、I_2

$R_2: I_2=I_2(U_2)$

若电路中非线性电阻多是流控的，则列写回路电流方程

eg、$R_1: U_1=U_1(I_1)$ 用回路电流表示I_1、I_2，代入方程组中消去U_1、U_2

$R_2: I_2=U_2(I_2)$

若非线性方程难以求出解析解，则可考虑使用以下四种近似分析法

一、牛顿—拉夫逊法：

属于数值分析法、迭代法、一阶近似

若电路含一个非线性电阻，则：将线性部分等效 → 列出电路方程 如 $I(U)-I_{sc}+G_iU=0$

→ 记 $f(U)=I(U)-I_{sc}+G_iU$，求其零点、

牛顿—拉夫逊法：$f'(U_k)=\frac{0-f(U_k)}{U_{k+1}-U_k} \Rightarrow U_{k+1}=U_k-\frac{f(U_k)}{f'(U_k)}$

通常给定容许误差ε，在每一步迭代时，判断下式是否成立

$$\Delta U=|U_{k+1}-U_k|<\varepsilon$$

若成立，则结束，称为收敛，将U_{k+1}作为U的近似解

缺点：可能漏解、找不到解

二、分段线性近似法（折线法）

1、若给出非线性电阻的U-I曲线，可用多条折线来分段逼近该曲线，对每条折线，写出表达式

$$U=U_{0k}+R_{dk}I$$

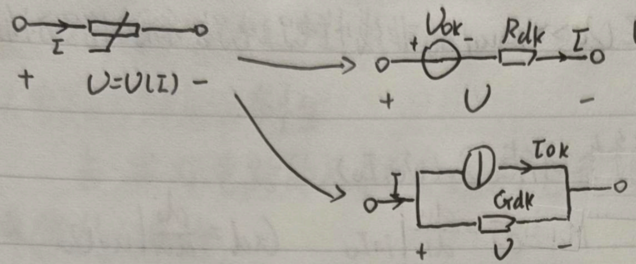
其中$R_{dk}=(\frac{dU}{dI})_k$为第k条支路的动态电阻，即第k段直线的斜率

$$\text{or}\quad I=I_{0k}+G_{dk}U$$

其中$G_{dk}=(\frac{dI}{dU})_k$为第k条支路的动态电导.

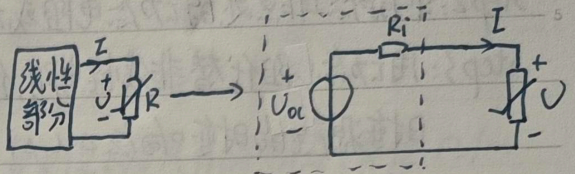
原来定义的$R=\frac{U}{I}$，$G=\frac{I}{U}$称为静态电阻、静态电导

2、列出表达式后，可用线性模型来表示非线性电阻的每一个分段（可选）



$U=U_{ok}+R_{dk}I$

$I=I_{ok}+G_{dk}U$

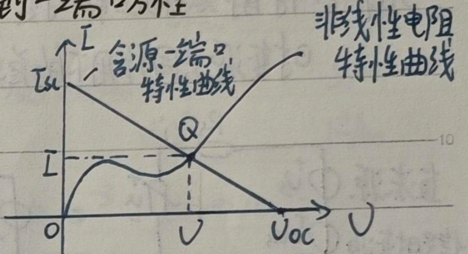


三、图解法：

对于只含一个非线性电阻的电路，将线性部分等效之后，得到一端口方程

$$U=U_{oc}-R_iI$$

将其与非线性电阻的特性曲线画在同一 I-U 图上，两线交点即为解，称为静态工作点。



综合以上两种方法，有以下解题思路

① 列出分段线性近似表达式后，将其与电路其他方程联立求解
— 前提是线性部分简单，易于列出方程

② 列出分段线性近似表达式后，用分段线性模型等效代替，用线性电路分析方法（回路电流法、节点电压法）分析 — 可分析含多个非线性电阻的电路

③ 将电路线性部分等效后列出含源一端口特性曲线，画图找交点。

注意事项

① 分段近似时，要检验由某一分段的条件求出的解是否位于该分段内，否则是虚解

② 分段近似时，对每一分段都要分析

③ 若电路中含多个非线性电阻，对其分别分段近似时，要考虑所有可能的组合

eg. 非线性电阻 a 分两段 Ⅰ、Ⅱ，b 分两段 Ⅰ'、Ⅱ'，分别有自己的条件，则有四种组合 ⅠⅡ、ⅠⅡ'、Ⅰ'Ⅱ、Ⅰ'Ⅱ'

No.

Date

四、小信号分析法

电路中既有直流源U_s，又有时变电源Δu_s，且满足$U_s >> |\Delta u_s|$的非线性电阻电路，采用小信号分析法

步骤

Step1：只考虑直流源U_s，求解出非线性电路的静态工作点$Q_0(U_0, I_0)$

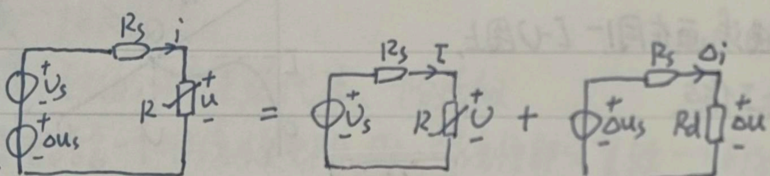
Step2：求静态工作点处的动态电阻或动态电导　$R_d = \frac{1}{G_d} = \frac{du}{di}\Big|_{i=I_0}$　$G_d = \frac{di}{du}\Big|_{u=U_0}$

Step3：用动态电阻代替非线性电阻，做出只考虑时变源的小信号等效电路，求解出时变源产生的时变响应Δu、Δi

Step4：将静态响应和时变响应叠加，得到非线性电路的电路参数，在直流源和小信号时变源共同作用下的总响应　$u \approx U_0 + \Delta u$　$i \approx I_0 + \Delta i$.

直流源

小信号时变源



No.

Date

第13章 均匀传输线

一、均匀传输线

1.电路参数的分布性

当一实际电路的尺寸并非远小于它工作频率 f 下的电磁波波长 $\lambda=\frac{v}{f}$ 时，必须考虑线路参数的分布性。

eg. ① 长距离的电力输电线路 ②高频电路（通信工程）

均匀线的参数

R_0	两根均匀线（往返）每单位长度具有的	电阻，单位	Ω/m
L_0		电感	H/m
G_0	两根均匀线之间 每单位长度具有的	电导	S/m
C_0		电容	F/m

注：一定要注意单位，单位换算：$k\to10^3$ $m\to10^{-3}$ $\mu\to10^{-6}$

定义：单位长度的阻抗 $Z_0=R_0+j\omega L_0$ 单位长度的导纳 $Y_0=G_0+j\omega C_0$

定义：波阻抗 $Z_c=\sqrt{\frac{R_0+j\omega L_0}{G_0+j\omega C_0}}$ 单位 Ω

传播常数 $\gamma=\sqrt{(R_0+j\omega L_0)(G_0+j\omega C_0)}=\alpha+j\beta$ 单位 m^{-1}

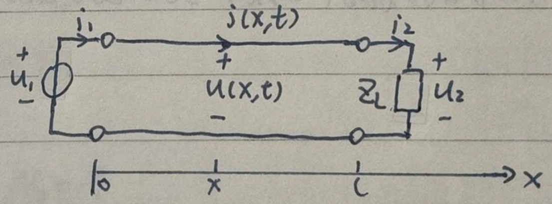
衰减常数 $\alpha=Re[\gamma]$ 相位常数 $\beta=Im[\gamma]$

注：注意各物理量的单位

计算方法：$R_0、L_0、G_0、C_0\to Z_0、Y_0\to\frac{Z_0}{Y_0}、Z_0Y_0$ 然后手动给复数开平方

2.电报方程 ×

$$\begin{cases}-\frac{\partial u}{\partial x}=R_0 i+L_0\frac{\partial i}{\partial t}\\ -\frac{\partial i}{\partial x}=G_0 u+C_0\frac{\partial u}{\partial t}\end{cases}$$



二、正弦稳态解 ×

已知始端电压 $\dot U_1$、电流 $\dot I_1$：距离始端 x 处

$$\begin{bmatrix}\dot U(x)\\ \dot I(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cosh\gamma x & -Z_c\sinh\gamma x\\ -\frac{1}{Z_c}\sinh\gamma x & \cosh\gamma x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot U_1\\ \dot I_1\end{bmatrix}$$

已知终端电压 $\dot U_2$、电流 $\dot I_2$：距离终端 x' 处

$$\begin{bmatrix}\dot U(x')\\ \dot I(x')\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cosh\gamma x' & Z_c\sinh\gamma x'\\ \frac{1}{Z_c}\sinh\gamma x' & \cosh\gamma x'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot U_2\\ \dot I_2\end{bmatrix}$$

注：均匀线是一个对称二端口，其中 $\cosh\theta=\frac{e^\theta+e^{-\theta}}{2}$，$\sinh\theta=\frac{e^\theta-e^{-\theta}}{2}$

三、均匀线上的行波

1. 当线路达到正弦稳态时，线路上的电压、电流可以认为是两个行进方向相反的波叠加而成

而正向行波和反向行波又分别是所有入射波、反射波叠加形成的

$$u(x,t)=u^+(x,t)+u^-(x,t)=\sqrt{2}U'e^{-\alpha x}\cos(\omega t-\beta x+\psi')+\sqrt{2}U''e^{\alpha x}\cos(\omega t+\beta x+\psi'')$$

$$i(x,t)=i^+(x,t)-i^-(x,t)=\sqrt{2}\frac{U'}{|Z_c|}e^{-\alpha x}\cos(\omega t-\beta x+\psi'-\varphi_c)+\sqrt{2}\frac{U''}{|Z_c|}e^{\alpha x}\cos(\omega t+\beta x+\psi''-\varphi_c)$$

注意：电压是相加，电流是相减，参数 α、β、ω 的位置

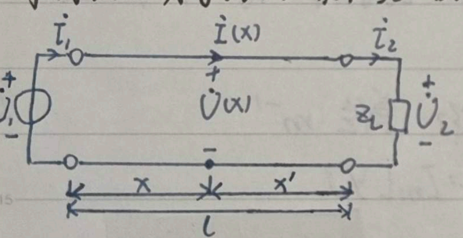
2. 计算： $Z_c=|Z_c|\angle\varphi_c=\frac{\dot{U}^+}{\dot{I}^+}=\frac{\dot{U}^-}{\dot{I}^-}$

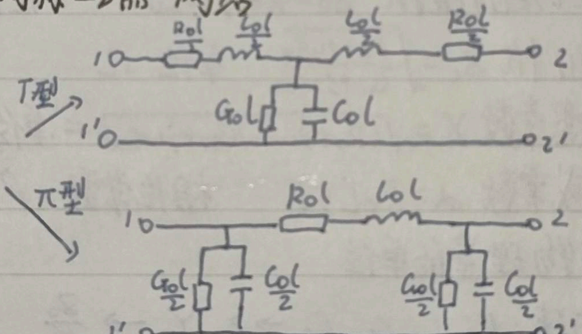
波速 $v_p=\frac{\omega}{\beta}$，$v_p=\frac{\lambda}{T}=\lambda f$ $\Rightarrow \lambda=\frac{2\pi}{\beta}$

四、均匀线的集中参数等效电路 ×

当无需研究均匀线各处的电压、电流分布情况，只需考虑线路始端、终端的电压、电流时

可将均匀线等效为 集中参数的对称二端口网络





对不太长的线路（工频下 50～200 km）可以作上述等效

No.

Date

五、无损线

1.参数：无损线的 $R_0=G_0=0$

从而：波阻抗 $Z_C=\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$ 为一实数 ⇒ 同方向上的电压、电流行波在同一位置处是同相位的

传播常数 $\gamma=j\omega\sqrt{L_0C_0}$ 为一纯虚数 ⇒ 衰减常数 $\alpha=0$

⇒ 无损线上行波传播是不衰减的

2.方程

① 已知始端电压 $\dot{U}_1$，电流 $\dot{I}_1$

$$\begin{cases}\dot{U}(x)=\dot{U}_1\cos\beta x-j\dot{I}_1Z_C\sin\beta x\\ \dot{I}(x)=-j\frac{\dot{U}_1}{Z_C}\sin\beta x+\dot{I}_1\cos\beta x\end{cases}$$

注：① 注意是弧度还是角度！

若用 $\beta=\frac{2\pi}{\lambda}$ 则 βl 为弧度

② 口决：从后往前为全正

$-j\ \sin\ Z_C$ 凑一块

② 已知终端电压 $\dot{U}_2$、电流 $\dot{I}_2$

$$\begin{cases}\dot{U}(x')=\dot{U}_2\cos\beta x'+j\dot{I}_2Z_C\sin\beta x'\\ \dot{I}(x')=j\frac{\dot{U}_2}{Z_C}\sin\beta x'+\dot{I}_2\cos\beta x'\end{cases}$$

3.方程的应用

① 从 x' 处向终端视入的输入阻抗　其中终端负载阻抗为 Z_L；波阻抗 Z_C

$$Z_i(x')=\frac{\dot{U}(x')}{\dot{I}(x')}=Z_C\frac{Z_L\cos\beta x'+jZ_C\sin\beta x'}{jZ_L\sin\beta x'+Z_C\cos\beta x'}$$

特别地：当 $x'=\frac{\lambda}{4}$ 时，四分之一波长无损线可实现阻抗变换 $Z_i=\frac{Z_C^2}{Z_L}$

② 、定义：终端反射系数 $N_2=\frac{Z_L-Z_C}{Z_L+Z_C}$　始端反射系数 $N_1=\frac{Z_S-Z_C}{Z_S+Z_C}$

终端开路：$|Z_L|\to\infty$，$\dot{I}_2=0$，$N_2=1$

$$Z_i(x')=-jZ_C\cot\beta x'$$

用于等效电容

终端短路：$|Z_L|=0$，$\dot{U}_2=0$　$N_2=-1$

$$Z_i(x')=jZ_C\tan\beta x'$$

用于等效电感

题型：无损线终端接电抗，求无损线上电流 or 电压始终为零的地方

Step1：用一段长度为 l' 的终端短路(电感) or 断路(电容)无损线等效电抗，相当于 $l+l'$ 的终端～无损线

Step2：求出等效无损线上满足条件的地方

Step3：反推原无损线上满足条件的地方

KOKUYO

③ 入射波与其反射波形成驻波的条件

i 行波沿线传播无衰减，即 $\alpha=0$ → 无损线

AND ii 反射波幅度与入射波相等 即 $|N_2|=1$ → 终端为开路、短路、接纯电抗负载

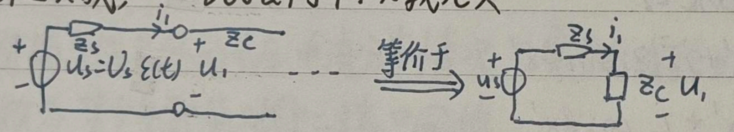
驻波的相邻波腹距 $\frac{\lambda}{2}$，相邻波节距 $\frac{\lambda}{2}$，波腹—波节 $\frac{\lambda}{4}$

4. 无损线的波速

$v=\frac{1}{\sqrt{L_0C_0}}$　若无相关条件，则认为无损线的波速 $v=c=3\times10^8 m/s$

六、无损线上波的发出与反射

1. 波从电源发出之际（即只有正向行波时），无损线对电源来说相当于一个电阻值为 Z_c 的纯电阻负载，与电路接何种负载无关

用法：


用分压求 $u_1=\frac{Z_c}{Z_s+Z_c}u_s$，求 $i_1=\frac{u_1}{Z_c}$

2. 终端开路时波的反射

$Z_2(s)\to\infty$，$N_2(s)=1$　全反射

⇒入射波第一次达到开路终端时：终端电流为0，符合开路条件；终端电压×2

3. 终端短路时波的反射

$Z_2(s)=0$，$N_2(s)=-1$　负全反射

⇒入射波第一次达到短路终端时，终端电压为0，符合短路条件，终端电流×2

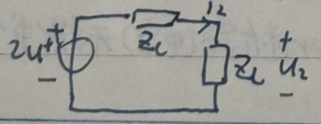
4. 波的多次反射（达到直流稳态时，无损线相当于理想导线）

同时运用 N_1 与 N_2　　电流：Σ正向 − Σ反向

某一时刻的无损线线间电压等于该时刻之前传到此处的所有正向与反向行波电压之和

5. 彼德生法则

终端接一般负载时，当入射波 u_1 第一次到达终端时使用



已知 u^+，求 u_2、i_2 等，用三要素法或拉氏变换法

注意时间延迟 $t_0=\frac{l}{v}$，从 $t=t_0$ 开始

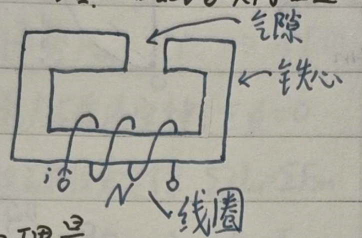
☆常用结论：若负载与传输线匹配，即 $Z_L=Z_c$，则无反射波（相当于一无限长无损线）始端的输入阻抗即为波阻抗 Z_c

第14章 磁路

一、磁路及其基本定律

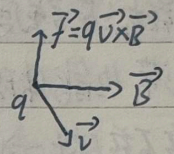
1.磁路概念

电机、电器等由于铁磁材料磁导率高的特性，使得磁通的绝大部分存在于一个规定的路径之内，形成磁路。磁路实际上是一种特殊边界的磁场，磁路由铁心、线圈和气隙组成

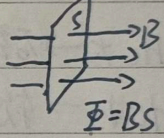


2、磁场中的物理量

(1) 磁感应强度 $\vec{B}$ 单位 T $\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}$



(2) 磁通 Φ 标量 单位 Wb $\Phi=\iint\vec{B}\cdot d\vec{S}$



=> $\vec{B}$ 又称磁通密度

(3) 磁场强度 $\vec{H}$ 单位 A/m $\vec{B}=\mu\vec{H}$

(4) 磁导率 = 相对磁导率×真空磁导率 单位 H/m $\mu=\mu_0\mu_r$

定义：μ为常量的介质称为线性介质 eg. 非铁磁物质 $\mu=\mu_0$

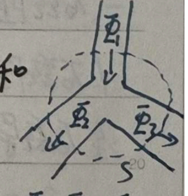
铁磁物质是非线性介质

3.磁场的基本性质与磁路定律

(1) 磁通连续性定律：$\oint_S\vec{B}\cdot d\vec{S}=0$ 即磁感线总是闭合的，磁场是无源的

=> 基尔霍夫磁通定律：在磁路中任选一闭合面，穿出此闭合面的各支路磁通代数和恒为零，即 $\sum\Phi_k=0$

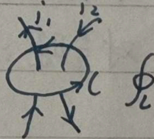
规定磁通穿出闭合面取正



$-\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3=0$

(2) 安培环路定律：$\oint_l\vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum i$ 即磁场是有旋的

规定某一电流与回路方向符合右手螺旋定则为正



$\oint_l\vec{H}\cdot d\vec{l}=i_1-i_2$

定义：回路的磁通势 $F_m=\sum i$，磁场中a.b两点的磁位差 $U_m=\int_a^b\vec{H}\cdot d\vec{l}$ 单位 A

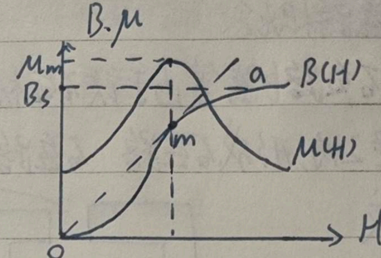
基尔霍夫磁位差定律：磁路中沿任一回路，磁位差的代数和恒等于磁通势的代数和

$\sum Hl=\sum Ni$

二、铁磁物质的磁化特性

材料的磁化特性用磁化曲线即 B-H 曲线来描述

铁磁物质的三种磁化曲线如下

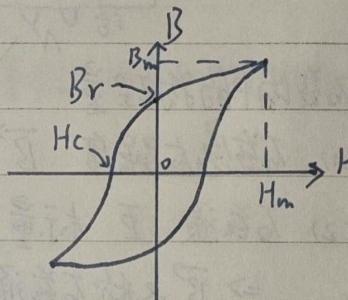


1. 起始磁化曲线

称点 a 为饱和点，对应的 B_s 为饱和磁感应强度

称点 m 为膝点，对应的磁导率最大，记 μ_m

2. 磁滞回线



是关于原点中心对称的

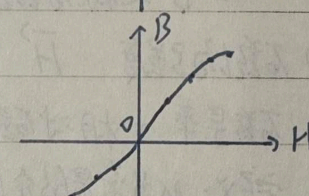
称 B_r 为剩余磁感应强度，H_c 为矫顽力

既能体现磁滞，也能体现磁饱和

B_r、H_c 大 → 硬磁材料 → 永磁器件

B_r、H_c 小 → 软磁材料 → 电机、变压器的铁心

3. 基本磁化曲线



用来查表

4. 铁磁物质的主要特征

高导磁性、磁饱和性、磁滞性

三、磁阻与磁导

1. 磁阻 R_m 单位 H^{-1} $R_m=\frac{U_m}{\Phi}=\frac{l}{\mu S}$ 磁导 $\Lambda=\frac{1}{R_m}$

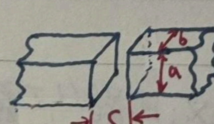
注：截面积 S 的计算

① 对铁磁物质：须乘以叠片系数 k（若有）

② 对气隙：不必考虑叠片系数

若考虑边缘效应，则应稍作修正

矩形：$S_\delta=(a+\delta)(b+\delta)$ 圆形：$S_\delta=\pi(r+\frac{\delta}{2})^2$



No.

Date

磁路与电路的对比

	磁路	电路
变量	磁感应强度 $\vec{B}$ (T)	电流密度 $\vec{J}$ (A/m^2)
	磁通 $\Phi=\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$ (Wb)	电流 $I=\iint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$ (A)
	磁位差 $U_m=\int_a^b \vec{H}\cdot d\vec{l}\rightarrow Hl$	电压 $U=\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}$ (V)
	磁通势 $F_m=\sum i \rightarrow NI$ (A)	电动势 E (V)
定律	基尔霍夫磁通定律 $\sum\Phi=0$	基尔霍夫电流定律 $\sum I=0$
	基尔霍夫磁位差定律 $\sum U_m=\sum F_m$	基尔霍夫电压定律 $\sum U=0$
	欧姆定律 $U_m=R_m\Phi$	欧姆定律 $U=RI$
参数	磁导率 μ (H/m)	电导率 γ (S/m) 电阻率 ρ
	磁阻 $R_m=\frac{l}{\mu S}$ (1/H)	电阻 $R=\frac{l}{\gamma S}=\frac{\rho l}{S}$ (Ω)
	磁导 $\lambda=\frac{1}{R_m}$ (H)	电导 $G=\frac{1}{R}$ (S)

四、恒定磁通磁路的计算

加恒定电流 → 得恒定磁通磁路

问题：已知某处磁通，求源电流 $\Phi\xrightarrow{计算S}B\xrightarrow[查表]{使用\mu_0}H\xrightarrow{l}U_m\xrightarrow{=}F_m\xrightarrow{除以N}I$

步骤：① 分段：将材料与截面积都相同的部分磁路分作一段

② 计算尺寸：注意是中心线的长度，得出铁心 S、l、气隙 S_δ、δ

③ 计算 B：铁心 $B=\frac{\Phi}{S}$ 气隙 $B_\delta=\frac{\Phi}{S_\delta}$

④ 由 B 得 H：铁心：查表 气隙：$H_\delta=\frac{B_\delta}{\mu_0}$

⑤ 计算各段磁路的磁位差：铁心：$U_m=Hl$ 气隙 $U_{m\delta}=H_\delta\delta$

⑥ 计算磁通势：$F_m=NI=\sum_i U_{mi}=\sum_i H_il_i$

注：计算时要全化为国际标准单位！

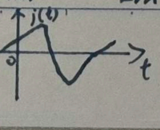
五、正弦电压作用下铁心磁路的磁通

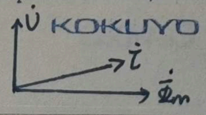
铁心线圈两端施加正弦交变电压（有效值 U、频率 f），形成交变的 i 与 Φ，称交变磁通磁路

忽略线圈电阻与漏磁，$U=4.44fN\Phi_m$

题型：已知外加 U，求线圈电流极大值：$U\xrightarrow{4.44}\Phi_m\xrightarrow{S}B_m\xrightarrow{查表}H_m\longrightarrow I_m=\frac{H_ml}{N}$

忽略线圈电阻与漏磁，线圈电流波形为前坡后陡的尖顶波





KOKUYO

No.

Date

六、铁损

1. 磁滞损耗 $P_{h0} = \sigma_h f B_m^n$ （单位体积的）

其中 σ_h 与材料有关，$B_m<1T$ 时 n 取 1.6，$B_m>1T$ 时 n 取 2

2. 涡流损耗 $P_{e0}=\frac{\pi^2}{6} f^2 B_m^2 d^2 \gamma$ （单位体积的）

3. 综合考虑：损耗

B=1.5T, f=50Hz 的比损耗

比损耗：铁心单位质量的损耗 eg. $P_{7.5/50}$、$P_{10/50}$、$P_{15/50}$

一般情况下的损耗 $P_{Fe0} = P_{10/50} B_m^n \left(\frac{f}{50Hz}\right)^{1.3}$

其中 $B_m<1T$ 时 n 取 1.6，$B_m>1T$ 时 n 取 2

题型：B_m 不变的情况下改变 f，考虑铁损的变化情况

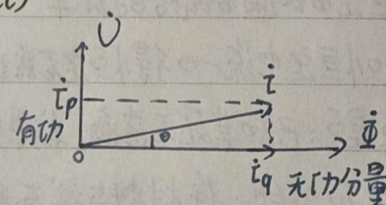
由于 B_m 不变，铁损可写为 $P_{Fe}=P_h+P_e=k_1 f+k_2 f^2$，$k_1$、$k_2$ 为常数

七、正弦磁通磁路的计算

即通正弦电压 $u(t)$，得正弦磁通 $\Phi(t)$，求励磁电流 $i(t)$

由于 $i(t)$ 不是正弦波，用等效正弦波来代替、

将（等效）电流相量正交分解 $\dot I=\dot I_p+\dot I_q$



1. 无功分量有效值 I_q 的计算

Step 1. $\Phi_m \to B_m \to H_m \to I_m$

Step 2. 由 I_m 求 I_q：未饱和 $I_q=\frac{I_m}{\sqrt2}$ 饱和 $I_q=\frac{I_m}{3\sqrt2}$

2. 有功分量有效值 I_p 的计算

$$I_p=\frac{P_{Fe}}{U}=\frac{P_{Fe}}{4.44fN\Phi_m}$$

3. 励磁电流的计算

$$I=\sqrt{I_p^2+I_q^2},\quad \theta=\arctan\frac{I_p}{I_q}$$

八、铁心线圈及其电路模型

线圈电感 $L=\frac{N^2}{R_m}$ R_m 为磁阻