理论力学

期末试题

理论力学期末考试试题(闭卷)

班号	
学号	
姓名	

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
分数											

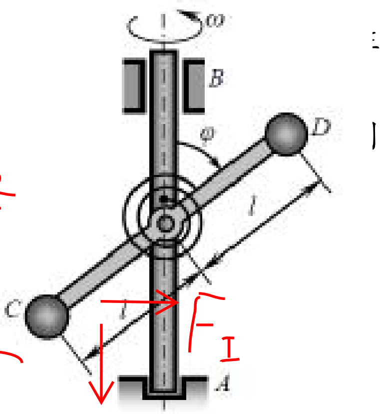
注意行为规范

遵守考场纪律

主管领导审核签字

一、正确解答下列各题（10 分）

1、图示机构，杆 CD 长为 $2l$，两端各有质量为 m 的 C 球和 D 球，CD 杆与转轴 AB 铰接于各自的中点，质量不计。当转轴 AB 转动时，杆 CD 的转角 φ 就发生变化。设 $\omega=0$ 时，$\varphi=\varphi_0$，且盘簧中无力矩。盘簧产生的力矩 M 与转角 φ 的关系为 $M=k(\varphi-\varphi_0)$，k 为盘簧刚度。试求角速度 ω 与转角 φ 之间的关系（5 分）。

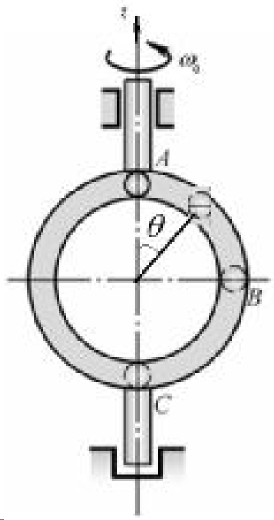


【解】角速度为 ω 时，C 球 D 球有相应的相同的法向加力 $ml\sin\varphi\omega^2$ (均水平方向背离转轴)，系统受力如图。 M 贝尔原理，对垂直于转轴的 y 轴取矩:

$$\sum M_y=0 \qquad M-2ml\sin\varphi\omega^2\cdot l\cos\varphi=0$$

得到: $$\omega=\sqrt{\frac{k(\varphi-\varphi_0)}{ml^2\sin 2\varphi}}$$

2、图示圆环以初始角速度 ω_0 绕铅直轴 AC 自由转动，此圆环半径为 R，对轴的转动惯量为 J。在圆环中的点 A 有一质量为 m 的小球，现由于微小的干扰小球离开点 A。圆环中的摩擦忽略不计，求小球到达圆环内任意位置（由 θ 角表示）时，圆环的角速度（5 分）。

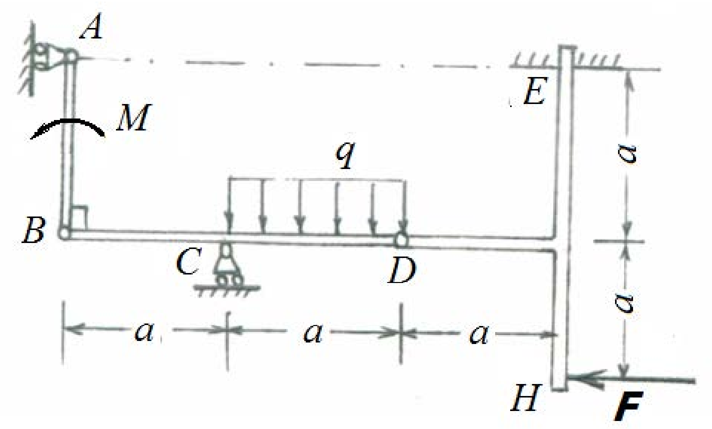


【解】 $L_{z1}=J_z\omega_0$ ， $L_{z2}=J_z\omega+m(r\sin\theta)^2\omega$

此过程对 z 轴动量矩守恒，Lz1=Lz2，故 $\omega=\dfrac{J_z\omega_0}{J_z+mr^2\sin^2\theta}$

二、计算题（20 分）

不计图示平面结构中各构件自重，尺寸 a，均布载荷 q，力偶矩 $M=qa^2$，水平集中力 $F=qa$ 均为已知。求 A、C、E 处的约束力。



解：1. 研究 AB 杆

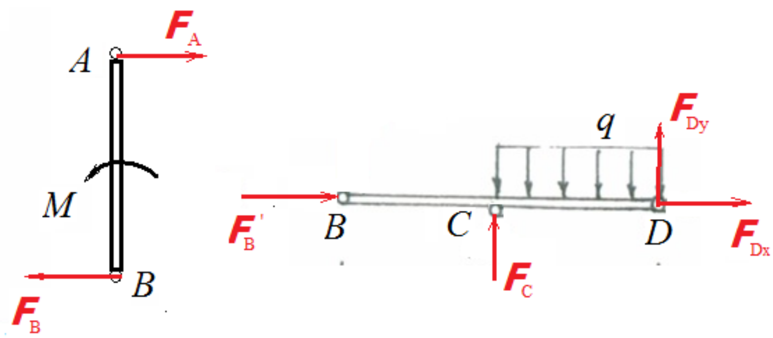
$$\sum M_B=0$$

$$F_A=F_B=\frac{M}{a}=qa$$

2. 研究 BD 杆（或 ABD 杆）

$$\sum M_D=0$$

$$F_C a-\frac{qa^2}{2}=0，\quad F_C=\frac{qa}{2}$$



3. 研究整体

$$\sum F_x=0$$

$$F_A+F_{Ex}-F=0，\quad F_{Ex}=0$$

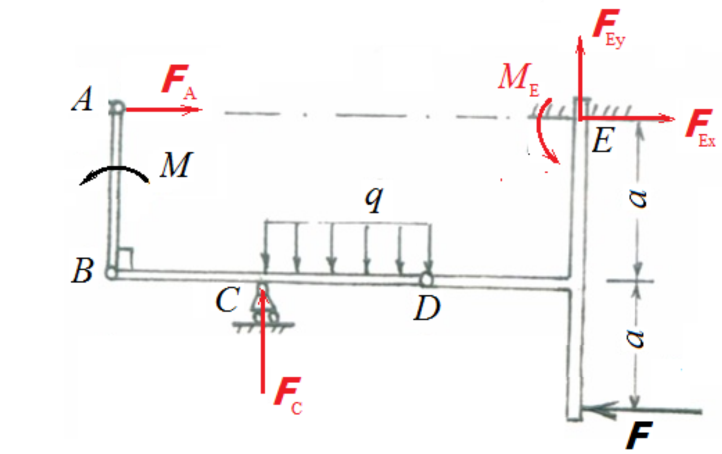
$$\sum F_y=0$$

$$F_C+F_{Ey}-qa=0，\quad F_{Ey}=\frac{qa}{2}$$

$$\sum M_E=0$$

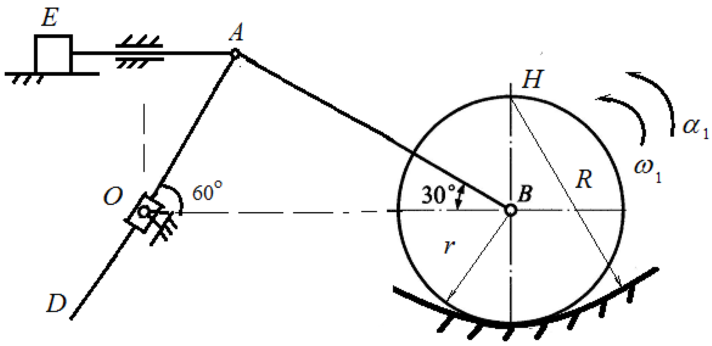
$$M_E+M-F_C\cdot 2a+\frac{3qa^2}{2}-F\cdot 2a=0$$

$$M_E=\frac{qa^2}{2}$$



三、计算题（20 分）

图示平面机构中，杆 AD 可沿套筒 O 滑动，杆 AE 和杆 AB 通过铰链 A 和杆 AD 相连。圆柱体 B 半径为 r，在半径为 $R=2r$ 的圆弧槽内作纯滚动。图示瞬时圆柱体位于圆弧槽的最低点，其角速度为 ω_1，角加速度为 α_1，$AB=\dfrac{3}{2}\sqrt{3}r$，求图示瞬时杆 AE 的速度和加速度，杆 AD 的角速度和角加速度。



解：杆 AB 做瞬时平移

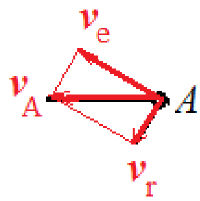
$$v_A=v_B=\omega_1 r=v_{AE}\text{，}\quad \omega_{AB}=0$$

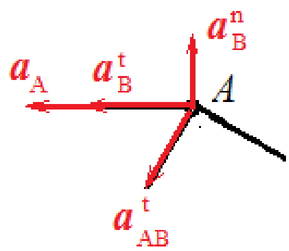
$$\vec{a}_A=\vec{a}_B^t+\vec{a}_B^n+\vec{a}_{AB}^t$$

$$a_A\cos 30^\circ=a_B^t\cos 30^\circ+a_B^n\sin 30^\circ$$

代入：$a_B^t=\alpha_1 r$，$a_B^n=\omega_1^2 r$

$$a_A=a_{AE}=\alpha_1 r+\frac{\sqrt{3}}{3}\omega_1^2 r$$

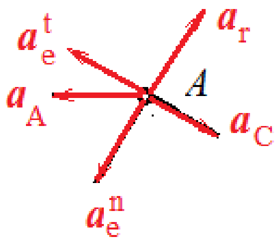




取铰链 A 为动点，套筒 O 为动系

$$\vec{v}_A=\vec{v}_e+\vec{v}_r$$

$$v_e=v_A\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_1 r\text{，}\quad v_r=v_A\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\omega_1 r$$



$$\omega_{AD}=\frac{2v_e}{3r}=\frac{\sqrt{3}}{3}\omega_1$$

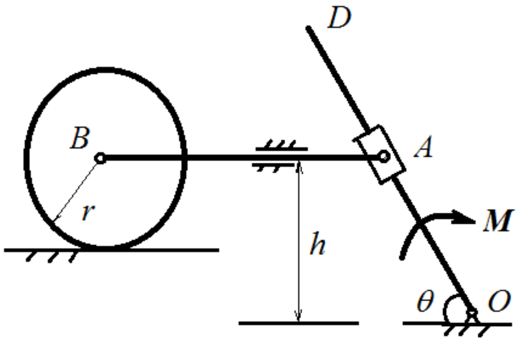
$$\vec{a}_A=\vec{a}_e^t+\vec{a}_e^n+\vec{a}_r+\vec{a}_C$$

$$a_A\cos 30^\circ=a_e^t-a_C\qquad a_e^t=a_C+a_A\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_1 r+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\omega_1^2 r$$

$$\alpha_{AD}=\frac{2}{3r}a_e^t=\frac{\sqrt{3}}{3}\alpha_1+\left(\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)\omega_1^2$$

四、计算题（20 分）

图示传动机构中，均质杆 OD 质量为 m，长为 $4r$，在力偶 M 作用下绕 O 轴作定轴转动，并通过套筒 A 和连杆 AB 带动圆柱体 B 沿水平面作纯滚动。均质圆柱体 B 质量也为 m，半径为 r。连杆 AB 和套筒的质量忽略不计，与滑道及 AD 杆之间的摩擦也忽略不计，滑道的高度为 $h=2r$。系统初始静止，此时 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$。试求当系统运动到 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时圆柱体 B 的角速度和角加速度，以及圆柱体与水平面之间的摩擦力。



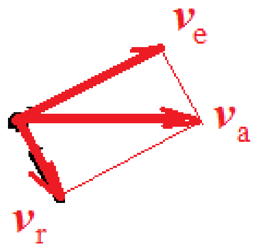
解： 取系统整体为研究对象，理想约束。

初始静止，$T_0=0$

当系统运动到 θ 角时，动能

$$T=\frac{1}{2}J_O\omega_{OD}^2+\frac{3}{4}mv_B^2$$

以滑块 A 为动点，OD 杆为动系



$$\vec{v}_B=\vec{v}_a=\vec{v}_e+\vec{v}_r\,,\quad v_B=\frac{v_e}{\sin\theta}=\frac{h\omega_{OD}}{\sin^2\theta}=\frac{2r\omega_{OD}}{\sin^2\theta}$$

$$T=\frac{1}{2}J_O\omega_{OD}^2+\frac{3}{4}mv_B^2=mv_B^2\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\sin^4\theta\right)$$

$$W=M\left(\theta-\theta_0\right)-2mgr\left(\sin\theta-\sin\theta_0\right)$$

$$T-T_0=W\,,\quad v_B^2=\frac{M\left(\theta-\theta_0\right)-2mgr\left(\sin\theta-\sin\theta_0\right)}{m\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\sin^4\theta\right)}$$

代入 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\theta_0=\dfrac{\pi}{3}$，$\quad v_B^2=\dfrac{\frac{2}{3}M\pi-4mgr\left(2-\sqrt{3}\right)}{3m}$，$\quad\omega_B=\dfrac{v_B}{r}=\dfrac{1}{r}\sqrt{\dfrac{\frac{2}{3}M\pi-4mgr\left(2-\sqrt{3}\right)}{3m}}$

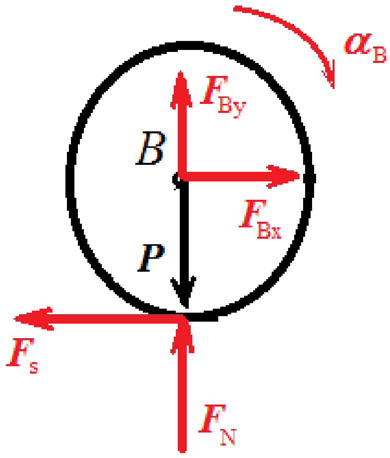
$$v_B^2=\frac{M\left(\theta-\theta_0\right)-2mgr\left(\sin\theta-\sin\theta_0\right)}{m\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\sin^4\theta\right)}$$

$$2v_B\frac{dv_B}{dt}=\frac{M-2mgr\cos\theta}{m\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\sin^4\theta\right)}\frac{d\theta}{dt}-\frac{M\left(\theta-\theta_0\right)-2mgr\left(\sin\theta-\sin\theta_0\right)}{m\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\sin^4\theta\right)^2}\cdot\frac{8}{3}\sin^3\theta\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

代入$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{d\theta}{dt}=\omega_{OD}=\dfrac{v_B}{2r}$，$\dfrac{dv_B}{dt}=a_B$

得

$a_B=\dfrac{3}{17}\dfrac{M}{mr}$，$\alpha_B=\dfrac{a_B}{r}=\dfrac{3}{17}\dfrac{M}{mr^2}$



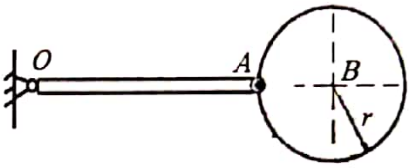
取圆柱体 B 为研究对象

$J_B\alpha_B=F_s\cdot r$

$F_s=\dfrac{3}{34}\dfrac{M}{r}$

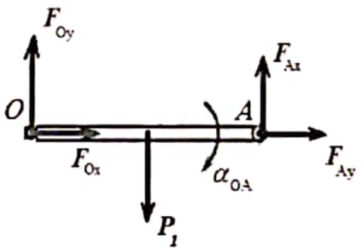
五、计算题（15 分）

图示均质杆 OA，质量为 m ，长度为 $2r$，一端用铰支座装在墙壁上，另一端用光滑铰链 A 与均质圆盘 B 相连。圆盘 B 半径为 r，质量也为 m。系统由图示水平位置静止释放，求释放瞬间杆 OA 和圆盘 B 的角加速度。



解： 研究 OA 杆

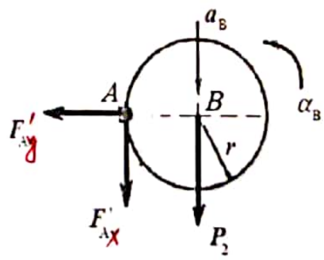
$$J_O\alpha_{OA} = P_1 r - F_{Ax}\cdot 2r$$



研究圆盘 B

$$ma_B = P_2 + F'_{Ax}$$

$$J_B\alpha_B = F'_{Ax}\cdot r$$



运动学补充方程

$$a_B = 2r\alpha_{OA} + r\alpha_B$$

$F_{Ax} = F'_{Ax}$

结果

$$\boxed{\alpha_{OA} = \frac{3g}{8r}}$$

$\alpha_{OA} = \dfrac{5g}{8r}$

$$\boxed{\alpha_B = \frac{g}{2r}}$$

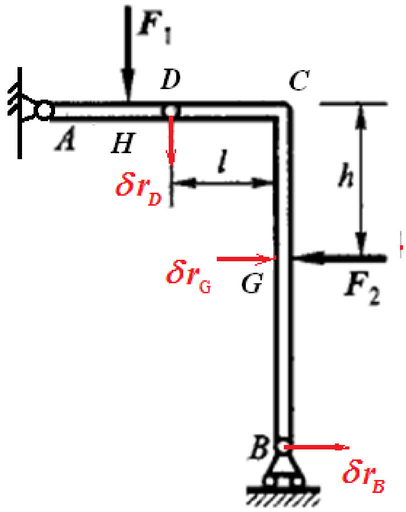
$\alpha_B = \dfrac{g}{6r}$

六、计算题（15 分）

图示机构在主动力 F_1、F_2 作用下处于平衡。已知 $AH = l$， $HD = l/3$， $h = 2l$， 不计杆重，试用虚位移原理求平衡时 F_1 和 F_2 之间应满足的关系（用其他方法做不给分，工科试验班同学不做此题）。

解：研究整体，理想约束。列虚功方程

$$F_1\delta r_H - F_2\delta r_G = 0$$



由运动学关系

$$\delta r_H = l\delta\theta$$

而 DCB 构件做平面运动，瞬心在 C 点，故

$$\omega_{DCB} = \frac{AD}{DC}\omega_{AD} = \frac{4}{3}\omega_{AD}$$

$$\frac{\delta r_G}{\delta\theta} = h\frac{\omega_{DCB}}{\omega_{AD}} = \frac{8}{3}l$$

代入虚功方程

$$\left(F_1 l - \frac{8F_2 l}{3}\right)\delta\theta = 0$$

由 $\delta\theta$ 的任意性

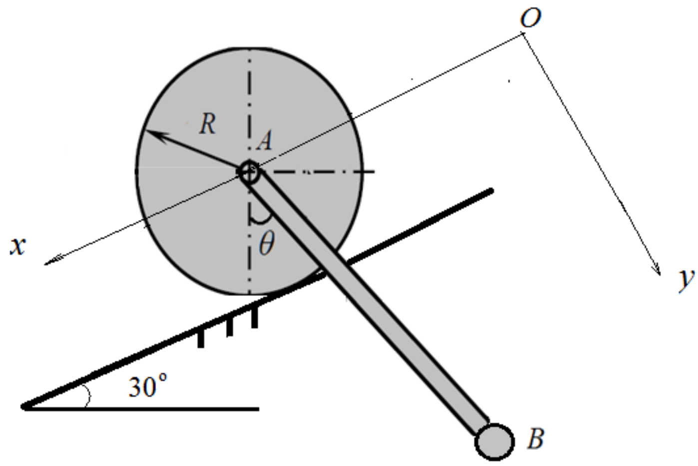
$$F_1 l - \frac{8F_2 l}{3} = 0\text{，}\qquad F = \frac{8}{3}F_2$$

七、计算题（15 分）

如图，均质圆柱体 A 半径为 R，质量为 m_1，沿倾角为 30° 的斜面作纯滚动。在其质心 A 上用铰链悬连了一单摆。单摆杆 AB 长为 b，质量忽略不计。摆锤 B 质量为 m_2。试采用 x_A 和 θ 为广义坐标，给出系统的运动微分方程（工科试验班答此题，其他专业同学不做此题）。

解：取系统整体为研究对象，理想约束，自由度=2

取 x_A 和 θ 为广义坐标，



$$x_B = x_A - b\sin(\theta-30^\circ),\quad y_B = b\cos(\theta-30^\circ)$$

$$\dot{x}_B = \dot{x}_A - b\dot{\theta}\cos(\theta-30^\circ),\quad \dot{y}_B = -b\dot{\theta}\sin(\theta-30^\circ)$$

$$v_B^2 = \dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2 = \dot{x}_A^2 + b^2\dot{\theta}^2 - 2b\dot{\theta}\dot{x}_A\cos(\theta-30^\circ)$$

$$T = \frac{3}{4}\dot{x}_A^2 + \frac{1}{2}m_2v_B^2 = \left(\frac{3}{4}m_1 + \frac{1}{2}m_2\right)\dot{x}_A^2 + \frac{1}{2}m_2b^2\dot{\theta}^2 - m_2b\dot{\theta}\dot{x}_A\cos\left(\theta-30^\circ\right)$$

取 O 点为重力势能零点

$$V = -\left(m_1+m_2\right)gx_A\sin30^\circ - m_2gb\cos\theta$$

$$L = T - V = \frac{3}{4}\dot{s}_A^2 + \frac{1}{2}m_2v_B^2 = \left(\frac{3}{4}m_1 + \frac{1}{2}m_2\right)\dot{x}_A^2 + \frac{1}{2}m_2b^2\dot{\theta}^2 - m_2b\dot{\theta}\dot{x}_A\cos\left(\theta-30^\circ\right) + \left(m_1+m_2\right)gx_A\sin30^\circ + m_2gb\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_A}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_A} = 0$$

$$\left(\frac{3}{2}m_1 + m_2\right)\ddot{x}_A - m_2b\ddot{\theta}\cos\left(\theta-30^\circ\right) + m_2b\dot{\theta}^2\sin\left(\theta-30^\circ\right) - \left(m_1+m_2\right)g\sin30^\circ = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$m_2b\ddot{\theta} - m_2\ddot{x}_A\cos\left(\theta-30^\circ\right) + m_2\dot{\theta}\dot{x}_A\sin\left(\theta-30^\circ\right) + m_2g\sin\theta = 0$$

理论力学 期末 考试试题(闭卷)

班号	
学号	
姓名	

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
分数											

注意行为规范

遵守考场纪律

主管领导审核签字

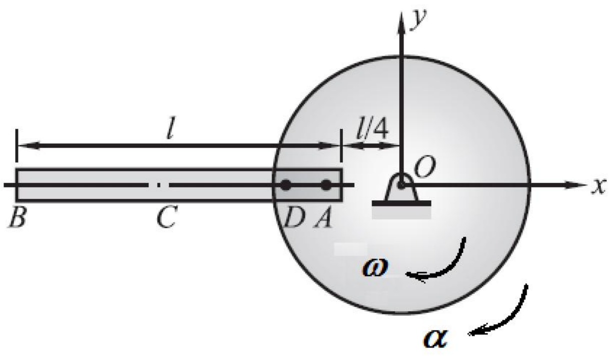
一、简答题（10 分）

图示均质杆 AB 长为 l，质量为 m，固连在均质圆盘 O 上，形成一个刚体。圆盘 O 质量为 $2m$，半径为 $l/2$，绕 O 轴作定轴转动。试求：

（1） 刚体绕 O 轴的转动惯量（5 分）。

（2） 当杆 AB 处于图示水平位置瞬时，圆盘绕 O 轴转动的角速度为 ω，角加速度为 α，给出此时刚体惯性力系向 O 点简化的结果，并在图上标明（5 分）。

解：1. 转动惯量



$$J_O = J_1 + J_2 = m\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}+\frac{l}{4}\right)^2$$

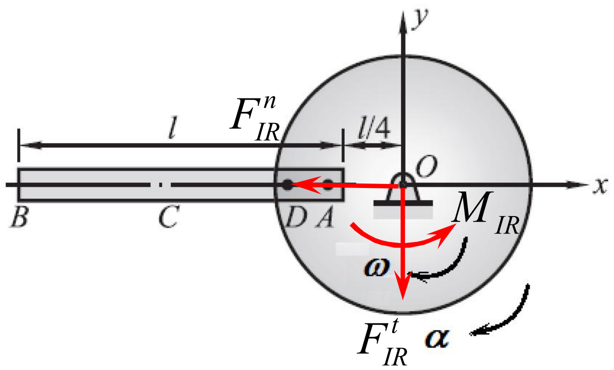
$$= \frac{43}{48}ml^2$$

2. 惯性力系简化

$$F_{IR}^t = \frac{3}{4}ml\alpha$$

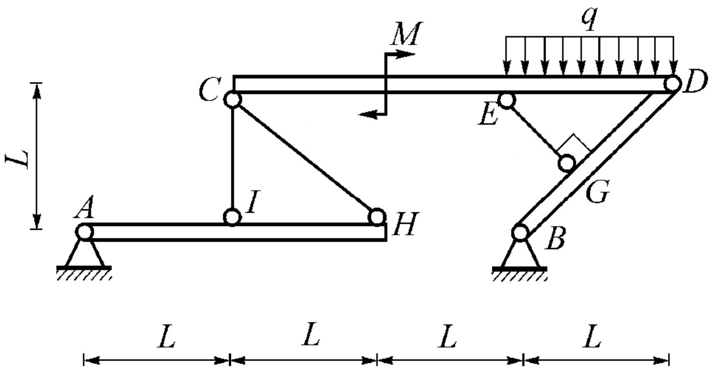
$$F_{IR}^n = \frac{3}{4}ml\omega^2$$

$$M_{IR} = \frac{43}{48}ml^2\alpha$$



二、计算题（20 分）

图示平面组合结构由杆 AH，CH，CI，CD，BD，EG 组成。已知：$q = 300\ \text{kN/m}$，$M = 120\ \text{kN·m}$，$L = 2\ \text{m}$，各杆件自重不计，A、H、B 在同一水平线上，试求支座 A 处的约束力及杆 CH 的内力。

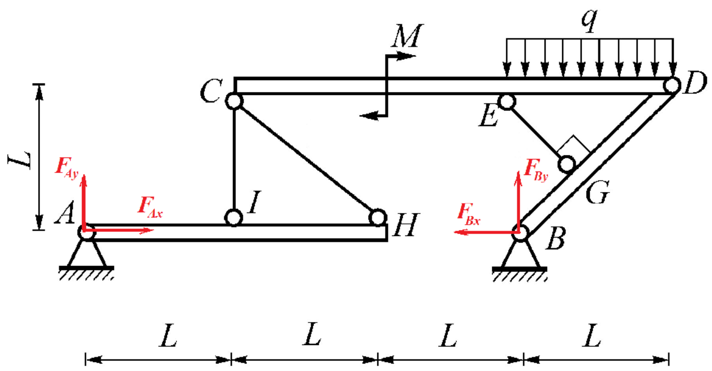


解：1. 取整体为研究对象

$$\sum M_B = 0,$$

$$-M - \frac{qL^2}{2} - F_{Ay} \cdot 3L = 0$$

$$F_{Ay} = -\frac{M}{3L} - \frac{qL}{6} = -120\text{kN}$$



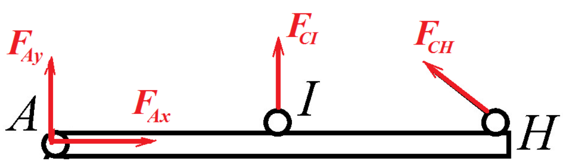
2. 取 AH 杆为研究对象

$$\sum M_I = 0$$

$$F_{CH} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} L - F_{Ay} \cdot L = 0$$

$$\sum F_x = 0$$

$$F_{Ax} - F_{CH} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$



$$F_{CH} = \sqrt{2} F_{Ay} = -\frac{\sqrt{2}}{3}\frac{M}{L} - \frac{\sqrt{2}}{6} qL = -120\sqrt{2}\text{kN}$$

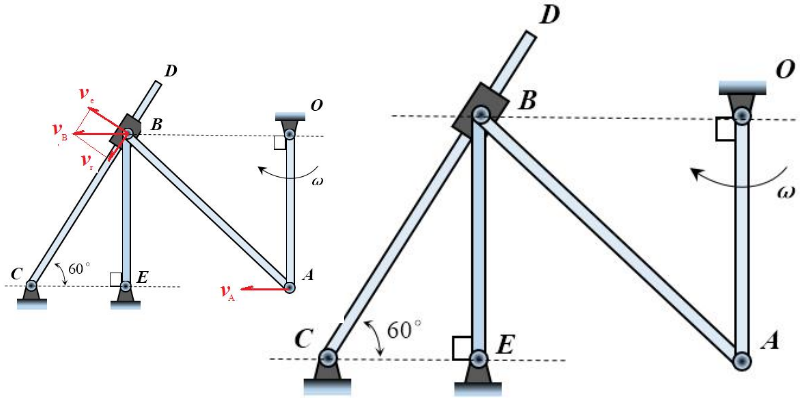
$$F_{Ax} = F_{CH} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{M}{3L} - \frac{qL}{6} = -120\text{kN}$$

也可由 AH 杆满足三力平衡汇交定理，得到 FA 的方向，直接得到

$F_A = -120\sqrt{2}$ kN(左斜下45度方向)

三、计算题（20 分）

图示平面机构，杆 OA 以匀角速度 ω 绕 O 轴作定轴转动，AB 杆 A 端与 OA 杆铰接，B 端通过套筒 B 带动 CD 杆作定轴转动， BE 杆同时绕 E 轴做定轴转动。已知 $AB=\sqrt{2}h$，$OA=BE=h$，在图示瞬时 OA 杆和 BE 杆均处于铅直位置，θ=60°，求该瞬时 CD 杆的角速度（15 分）和角加速度（5 分）。



解：1. 求 CD 杆角速度

AB 杆作瞬时平移

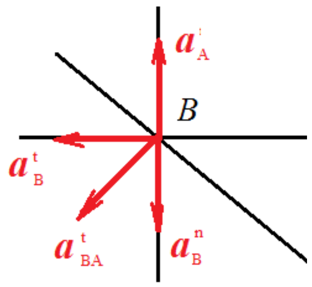
$v_A=v_B=h\omega$， $\omega_{AB}=0$，$\omega_{BE}=\omega$

取套筒 B 为动点，CD 杆为动系

$$\vec{v}_B=\vec{v}_e+\vec{v}_r$$

$$v_e=v_B\cos 30^o=\frac{\sqrt{3}}{2}h\omega\text{，}\quad v_r=v_B\sin 30^o=\frac{1}{2}h\omega\text{，}\quad \omega_{CD}=\frac{v_e}{BC}=\frac{3}{4}\omega,$$

2. 求 CD 杆角加速度



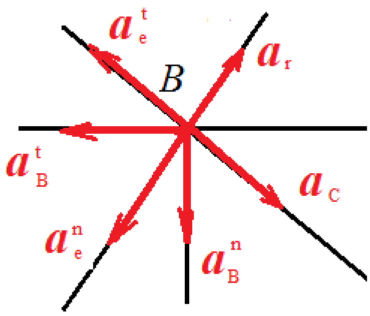
$$\vec{a}_B^t+\vec{a}_B^n=\vec{a}_A+\vec{a}_{BA}^t$$

$$a_B^t\cos 45^o-a_B^n\sin 45^o=a_A\cos 45^o$$

$$a_B^t=a_A+a_B^n=2h\omega^2$$

$$\vec{a}_B^t+\vec{a}_B^n=\vec{a}_e^t+\vec{a}_e^n+\vec{a}_r+\vec{a}_C$$

$$a_B^t\cos 30^o-a_B^n\sin 30^o=a_e^t-a_C$$



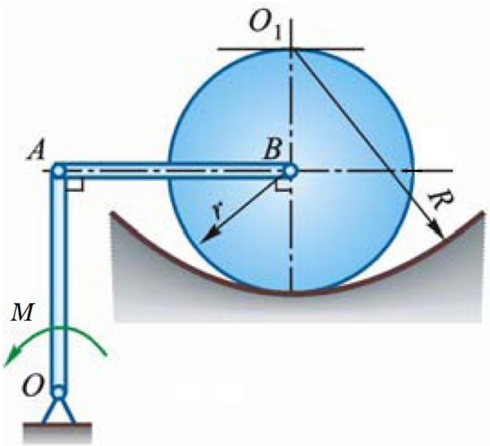
$$a_e^t=a_B^t\cos 30^o-a_B^n\sin 30^o+a_C=2h\omega^2\frac{\sqrt{3}}{2}-h\omega^2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{3}{4}\omega\frac{1}{2}h\omega$$

$$a_e^t=(\sqrt{3}+\frac{1}{4})h\omega^2$$

$$\alpha_{CD}=\frac{a_e^t}{BC}=\frac{(\sqrt{3}+\frac{1}{4})h\omega^2}{\frac{2}{\sqrt{3}}h}=(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{8})\omega^2$$

四、计算题（15 分）

曲柄 OA 质量为 m，在力偶 M 作用下绕轴 O 转动，并借助连杆 AB 驱动半径为 r 的轮子在半径为 R 的圆弧槽中作无滑动的滚动。设 $OA=AB=R=2r$，轮 B 的质量也为 m，AB 杆的质量忽略不计，在图示位置系统从静止开始运动，求该瞬时轮 B 的角加速度。



解： 1.研究 OA 杆

$$J_O\alpha_{OA}=M-F_{AB}\cdot 2r$$

2. 研究轮 B

$$ma_B^t=F_{AB}-F_s$$

$$J_B\alpha_B=F_s\cdot r$$

3. 运动学补充方程

$$a_B^t=r\alpha_B$$

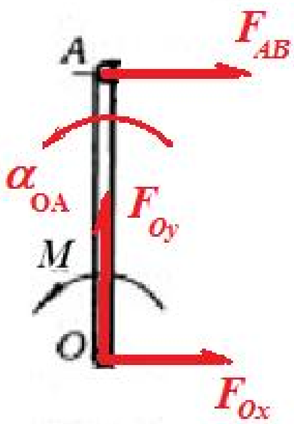
$$\vec{a}_B=\vec{a}_B^t=\vec{a}_A^n+\vec{a}_{BA}^t$$

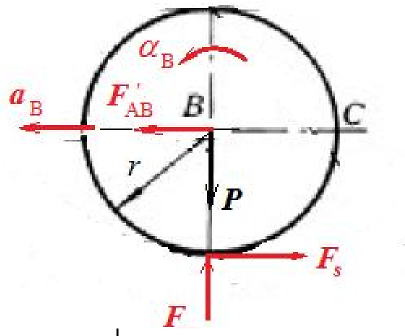
沿水平方向投影

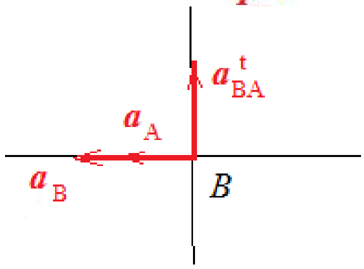
$$a_B^t=a_A=2r\alpha_{OA}$$

结果:

$$\alpha_B=\frac{3}{11}\frac{M}{mr^2}$$





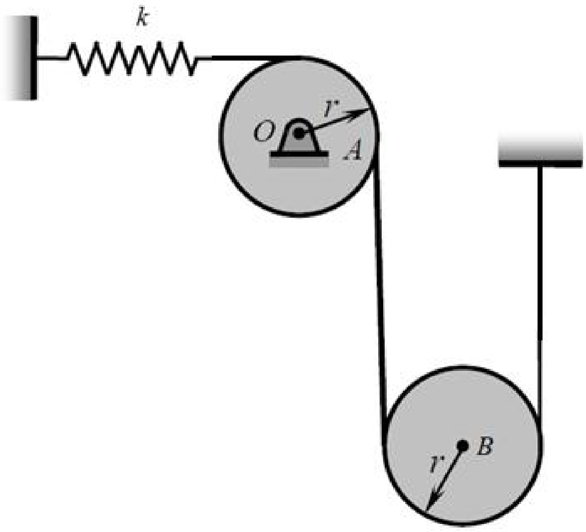


五、计算题 (20 分)

均质圆柱体 A 和 B 的质量均为 m，半径均为 r，一绳缠在绕固定轴 O 转动的圆柱体 A 上，绳的一端系在刚度系数为 k 的弹簧上，另一端绕过圆柱体 B，系在墙壁上。如图所示。设各圆柱体与绳子之间无滑动，轴承 O 处摩擦不计，系统初始静止，此时弹簧为原长。设弹簧刚度系数足够小，求：

（1）圆柱体 B 质心下落距离 h 时的加速度（10 分），

（2）此时轴承 O 处的约束力（10 分）。



解：1. 研究整体，理想约束

$$T_1 = 0\,,\quad T_2 = \frac{1}{2}J_O\omega_O^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}J_B\omega$$

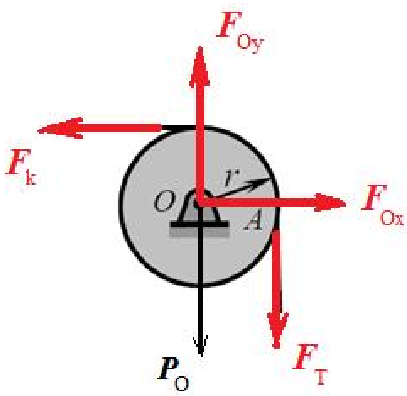
$$v_B = r\omega_B\,,\quad \omega_O = 2\omega_B$$

$$T_2 = \frac{7}{4}mv_B^2$$

$$W_{12} = mgh - 2kh^2$$

$$T_2 - T_1 = W_{12}\,,\quad v_B^2 = \frac{4}{7m}\left(mgh - 2kh^2\right),\ a_B = \frac{2}{7}\left(g - \frac{4kh}{m}\right)$$

2. 研究圆柱体 O



$$J_O\alpha_O = (F_T - F_k)\cdot r$$

$$F_{Ox} - F_k = 0$$

$$F_{Oy} - F_T = 0$$

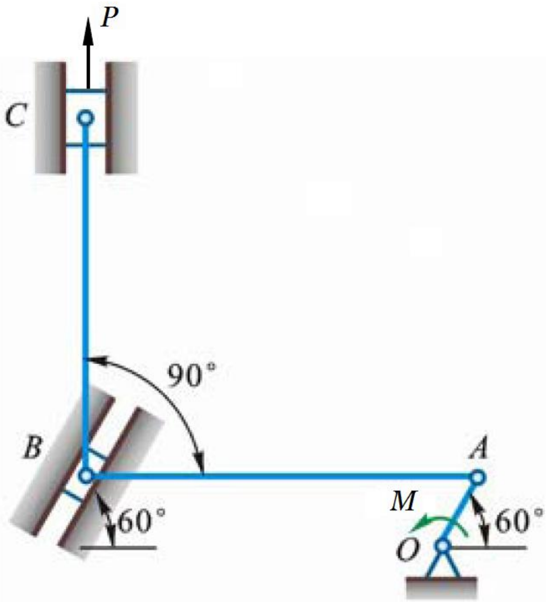
$$\alpha_O = \frac{2a_B}{r}\,,\quad F_k = 2kh$$

$$F_{Ox} = F_k = 2kh$$

$$F_{Oy} = F_T = \frac{2}{7}\left(mg + 3kh\right)$$

六、计算题（15 分，修《理论力学 B》的同学答此题）

在图示机构中，曲柄 OA 长为 r，其上作用有外加力偶 M。求系统在图示位置平衡时，力 P 与 M 之间的关系。



解：研究整体，理想约束

列虚功方程

$$M\delta\theta - P\delta r_C = 0$$

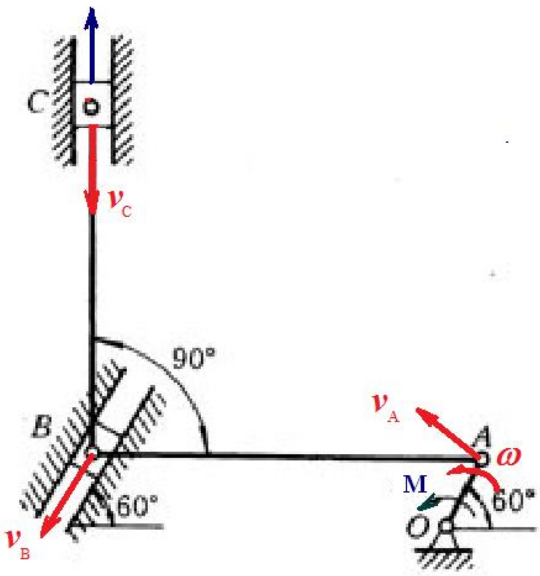
$$v_A \cos 30^o = v_B \cos 60^o$$

$$v_B \cos 30^o = v_C$$

$$\frac{\delta\theta}{\delta r_C} = \frac{\omega}{v_C} = \frac{v_A}{r v_C} = \frac{v_A}{r v_B}\cdot\frac{v_B}{v_C} = \frac{2}{3r}$$

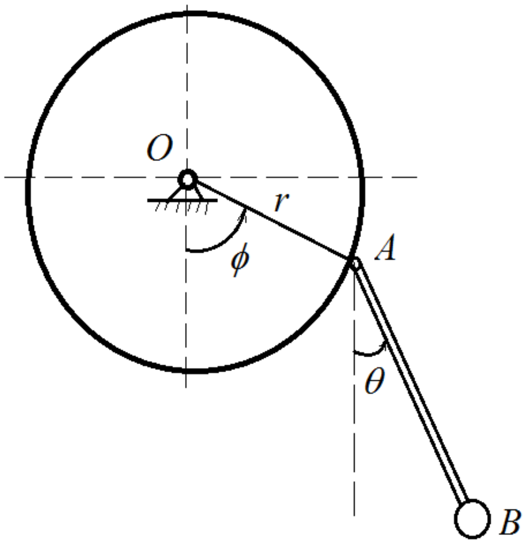
$$(M - \frac{3}{2} rP)\delta\theta = 0$$

$$M = \frac{3}{2} rP$$



七、计算题（15 分，修《理论力学 A》的同学答此题）

均质圆盘半径为 r，质量为 m，可绕 O 轴转动。在圆盘边缘 A 点处用铰链连接了一个单摆，如图所示。已知杆 AB 长为 $l=r$，质量忽略不计，摆锤 B 质量为 m。令 φ 角为 OA 连线与铅垂线的夹角，θ 角为杆 AB 与铅垂线的夹角。取 φ、θ 为广义坐标，试建立系统的拉格朗日方程。



解： 研究整个系统，理想约束，N=2，

取 φ、θ 为广义坐标

$$T=\frac{1}{2}J_O\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m(\dot{x}_B^2+\dot{y}_B^2)$$

$$x_B=r(\sin\varphi+\sin\theta),\quad y_B=r(\cos\varphi+\cos\theta)$$

$$\dot{x}_B=r(\dot{\varphi}\cos\varphi+\dot{\theta}\cos\theta)$$

$$\dot{y}_B=-r(\dot{\varphi}\sin\varphi+\dot{\theta}\sin\theta)$$

$$T=mr^2\left[\frac{3}{4}\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos(\varphi-\theta)\right]$$

取 y=0 为重力势能零点， $V=-mgy_B=-mgr(\cos\varphi+\cos\theta)$

$$L=T-V=mr^2\left[\frac{3}{4}\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos(\varphi-\theta)\right]+mgr(\cos\varphi+\cos\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$$

$$\frac{3}{2}\ddot{\varphi}+\ddot{\theta}\cos(\varphi-\theta)+\dot{\theta}^2\sin(\varphi-\theta)+\frac{g}{r}\sin\varphi=0$$

$$\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\theta)+\ddot{\theta}-\dot{\varphi}^2\sin(\varphi-\theta)+\frac{g}{r}\sin\theta=0$$

哈工大 2017 年秋季学期

理论力学期末考试试题(闭卷)

班号	
学号	
姓名	

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
分数											

注意行为规范

遵守考场纪律

主管领导审核签字

一、是非判断题（每题 1 分，共 10 分）

1、某平面力系的力多边形自行封闭，则该力系必为平衡力系。（ X ）

2、一空间力系，若各力作用线均与某一固定直线平行，则其独立的平衡最多为 5 个。（ X ）

3、一空间力系，若各力作用线均与某一固定直线相交，则其独立的平衡最多为 5 个。（ ✓ ）

4、若一刚体上各点的轨迹都是圆，则该刚体必定为定轴转动。（ X ）

5、刚体平面运动时，其平面图形上任意两点的速度在任一直线上的投影必定相等。（ X ）

6、刚体平面运动为瞬时平移时，其平面图形上任意两点的加速度在这两点连线上的投影必定相等。（ ✓ ）

7、质点受常力 $\bar{F}$ 作用，则 $\bar{I}=\bar{F}t$ 表示在瞬时 t 该力 $\bar{F}$ 的冲量。（ X ）

8、若力使刚体做加速运动，则力必对此刚体做功。（ X ）

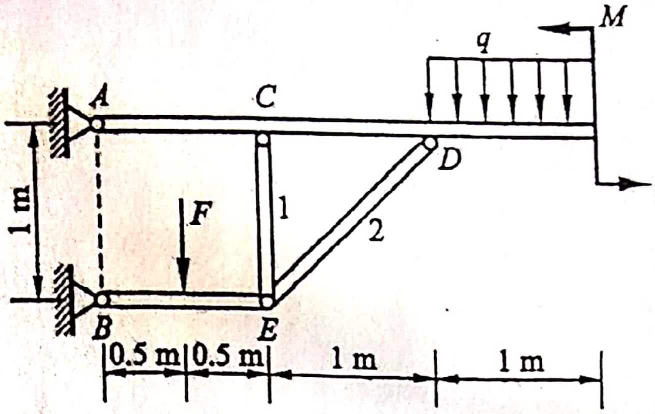
9、平面运动刚体上，惯性力系的合力必定作用在刚体的质心上。（ X ）

10、刚体定轴转动时，如果质心正好在其转轴上，则附加动约束力必定为零。（ X ）

二、计算题（20 分）

图示平面结构由四根无重杆组成，铅直力 $F=40\text{kN}$，均布力 $q=10\text{kN/m}$，力偶矩 $M=40\text{kN.m}$，尺寸如图所示。

求：A,B 处的约束力，杆1,2受力。

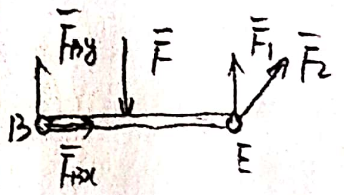


$\Sigma M_A=0$　$F_{Bx}\times1-F\times0.5-8\times1\times2.5+M=0$

$F_{Bx}-20-25+40=0$

$F_{Bx}=5\text{kN}$

$\Sigma F_x=0$　$F_{Ax}+F_{Bx}=0$　　$F_{Ax}=-5\text{kN}$



$\Sigma M_E=0$　$F_{By}=\frac{F}{2}=20\text{kN}$

$\Sigma F_x=0$　$F_{Bx}+F_2\cos45^\circ=0$

$F_2=-5\sqrt{2}\text{kN}$（压）

$\Sigma F_y=0$　$F_{By}-F+F_1+F_2\cos45^\circ=0$

$20-40+F_1-5=0$　　$F_1=25\text{kN}$（拉）

整体　$\Sigma F_y=0$　$F_{Ay}+F_{By}-F-8\times1=0$

$F_{Ay}+20-40-10=0$

$F_{Ay}=30\text{kN}$

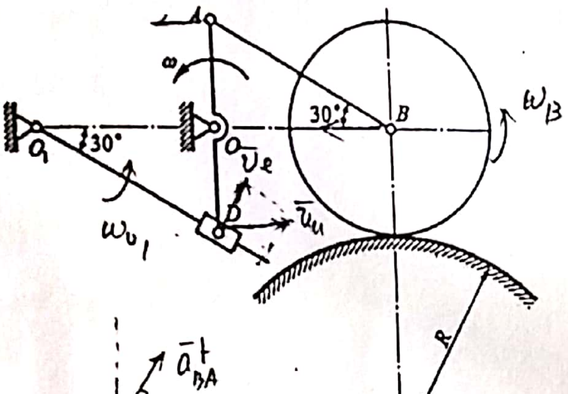
$\frac{9}{7}$　$-\frac{3}{7}$

三、计算题（20 分）

图示平面机构中，杆 OAD 以匀角速度 ω 绕轴 O 转动，轮 B 由连杆 AB 带动在固定轮上做纯滚动，同时通过套筒 D 带动杆 O_1D 转动。尺寸 $OA=AD=r$，轮 B 半径为 r，固定轮半径 $R=2r$。

求：在图示瞬时，杆 AB 的角速度，轮 B 的角速度，杆 O_1D 的角速度；

杆 AB 的角加速度，轮 B 的角加速度，杆 O_1D 的角加速度。

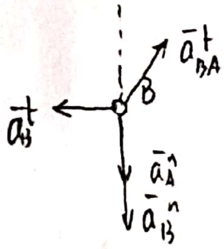


$\omega_{AB}=0$　　$\omega_B=\frac{v_B}{r}=\omega$

$v_e=r\omega\cos30°=\frac12 r\omega$

$\omega_{O_1}=\frac{v_e}{2r}=\frac14\omega$

$\bar a_B^n+\bar a_B^t=\bar a_A^n+\bar a_{BA}^t$



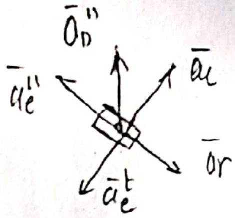
$a_A^n=r\omega^2$　　$a_B^n=\frac{v_B^2}{3r}=\frac{r^2\omega^2}{3r}=\frac13 r\omega^2$

y轴　$a_B^n=a_A^n-a_{BA}^t\cos30°$

$\frac{\sqrt3}{2}a_{BA}^t=a_A^n-a_B^n=\frac23 r\omega^2$　　$\frac{\sqrt3}{2}\cdot 2r\alpha_{AB}=\frac23 r\omega^2$　　$\alpha_{AB}=\frac{2}{3\sqrt3}\omega^2=\frac{2\sqrt3}{9}\omega^2$ (↺)

$a_B^t=-a_{BA}^t\sin30°=-\frac12\cdot\frac{4}{3\sqrt3}r\omega^2=-\frac{2}{3\sqrt3}r\omega^2$

$\alpha_B=\frac{a_B^t}{r}=-\frac{2}{3\sqrt3}\omega^2=-\frac{2\sqrt3}{9}\omega^2$ (↓)



$\bar a_a=\bar a_D^n=\bar a_e^n+\bar a_e^t+\bar a_r+\bar a_C$

$a_D^n=r\omega^2$　　$a_C=2\omega_{O_1}v_r=2\times\frac14\omega\times r\omega\cos30°$

$=\frac{\sqrt3}{4}r\omega^2$

$r\omega^2\cos30°=-a_e^t+a_C$　　$a_e^t=a_C-\frac{\sqrt3}{2}r\omega^2=-\frac{\sqrt3}{4}r\omega^2$

$\alpha_{O_1}=\frac{a_e^t}{2r}=-\frac{\sqrt3}{8}\omega^2$ (↺)

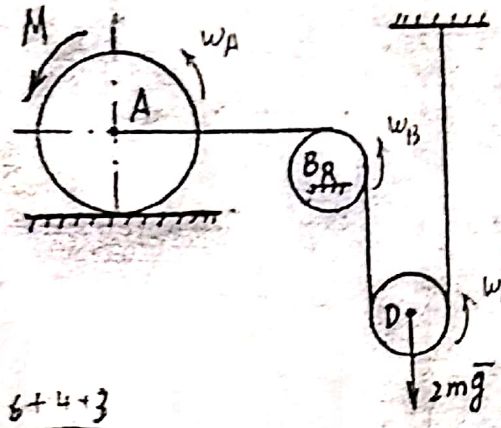
四、计算题（25分）

图示平面系统中，均质轮A质量为m，半径为R，在矩为$M=\frac{\cancel{1}}{2}mgR$ 3 的常力偶作用下沿水平面做纯滚动。两相同均质轮B,D，质量均为$2m$，半径均为$r=\frac{1}{2}R$，不计绳的质量，绳与轮间不打滑，系统由静止开始运动。

水平

求：轮A中心A运动任意一段距离时的速度、加速度，定滑轮两边绳的拉力，轮A受到的摩擦力。

x_A 8 7 5+5



$T_1=0$

$T_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}mR^2\omega_A^2+\cancel{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}2m\cdot r^2\cdot\omega_B^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}2mr^2\cdot\omega_D^2$ 2

$v_A=R\omega_A$ $r\omega_B=v_A$ $r\omega_D=\frac{1}{2}v_A$

$T_2=\frac{3}{4}mv_A^2+\frac{1}{2}mv_A^2+\frac{3}{2}m(\frac{1}{2}v_A)^2$ 2

$=(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8})mv_A^2=\frac{13}{8}mv_A^2$

$\frac{6+4+3}{8}$

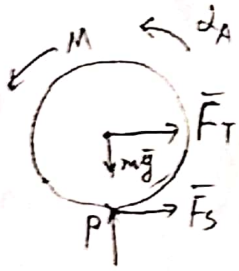
$W=M\varphi-2mg\cdot h$ 2 $R\varphi=2h$ $\varphi=\frac{2h}{R}$

$=3mgR\cdot\frac{2h}{R}-2mgh=3mg\cdot 2h-2mgh=4mgh=2mgx_A$

$T_2-T_1=W$ $\frac{13}{8}mv_A^2-0=2mgx_A$ 2

$v_A=\sqrt{\frac{16}{13}gx_A}$

$\frac{13}{4}v_A a_A=2gv_A$ $a_A=\frac{8}{13}g$



$J_P\alpha_A=\Sigma M_P$

$\frac{3}{2}mR^2\alpha_A=M-F_TR$

$\frac{3}{2}ma_A=\frac{M}{R}-F_T=3mg-F_T$

$F_T=3mg-\frac{3}{2}m\cdot\frac{8}{13}g=(3-\frac{12}{13})mg=\frac{27}{13}mg$

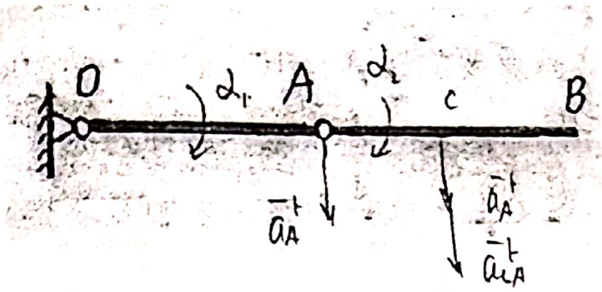
$J_C\alpha_A=\Sigma M_C$

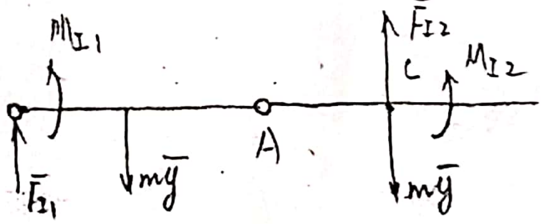
$\frac{1}{2}mR^2\alpha_A=M+F_s\cdot R$ $F_s=\frac{1}{2}ma_A-3mg=(\frac{4}{13}-3)mg$

$=-\frac{35}{13}mg$ (←)

五、计算题（15 分）

图示两相同均质杆，质量均为m，长度均为l，在图示水平位置静止释放，用动静法求此瞬时两杆的角加速度。（用其他方法做不给分）





$a_A^t = l\alpha_1$　　$a_C = l\alpha_1 + \frac{l}{2}\alpha_2$

$M_{I1} = \frac{1}{3}ml^2\alpha_1$.　$M_{I2} = \frac{1}{12}ml^2\alpha_2$

$F_{I2} = ma_C = ml(\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2)$

$\sum M_A = 0$　　$M_{I2} + F_{I2}\cdot\frac{l}{2} - mg\cdot\frac{l}{2} = 0$

$\frac{1}{12}ml^2\alpha_2 + \frac{l}{2}ml(\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2) - \frac{l}{2}mg = 0$

$\frac{1}{12}l\alpha_2 + \frac{l}{2}(\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2) - \frac{1}{2}g = 0$

$l\alpha_2 + 6l(\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2) - 6g = 0$

$6l\alpha_1 + 4l\alpha_2 = 6g$　　(1)

$\sum M_O = 0$　　$M_{I1} - mg\cdot\frac{l}{2} - mg\cdot\frac{3}{2}l + F_{I2}\cdot\frac{3}{2}l + M_{I2} = 0$

$\frac{1}{3}ml^2\alpha_1 - 2mgl + \frac{3}{2}ml^2(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2}) + \frac{1}{12}ml^2\alpha_2 = 0$

$l\alpha_1 - 6g + \frac{9}{2}l(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2}) + \frac{1}{4}l\alpha_2 = 0$

$l\alpha_1 + \frac{9}{2}l\alpha_1 + \frac{9}{4}l\alpha_2 + \frac{1}{4}l\alpha_2 = 6g$

$\frac{11}{2}l\alpha_1 + \frac{5}{2}l\alpha_2 = 6g$　　(2)

由(1)得　$l\alpha_1 = g - \frac{2}{3}l\alpha_2$

代入(2)有　$\frac{11}{2}g - \frac{11}{2}\cdot\frac{2}{3}l\alpha_2 + \frac{5}{2}l\alpha_2 = 6g$　　$\frac{15}{6} - \frac{22}{6} = -\frac{7}{6}$

$-\frac{7}{6}l\alpha_2 = (6 - \frac{11}{2})g = \frac{1}{2}g$

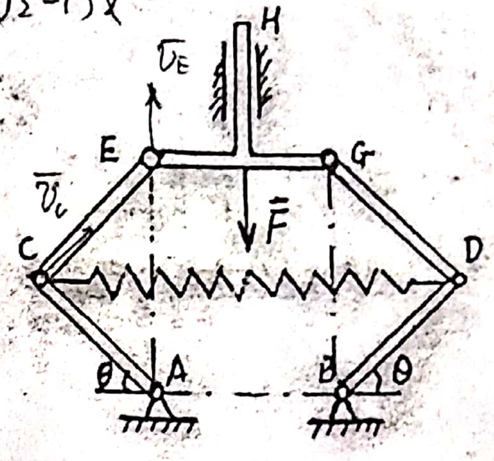
$\alpha_2 = -\frac{3}{7}\frac{g}{l}$ (↺)　　$l\alpha_1 = g - \frac{2}{3}l(-\frac{3}{7}\frac{g}{l}) = g + \frac{2}{7}g = \frac{9}{7}g$

$\alpha_1 = \frac{9}{7}\frac{g}{l}$ (↻)

六、计算题（10分）

不计图示平面机构各构件自重，T 型杆限制在铅直光滑导槽内，在 T 型杆上作用一铅直向下的力 $\overline{F}$，尺寸 $AB = EG = AC = CE = BD = DG = l$，水平弹簧刚度系数为 k，原长为 $2l$。系统在 $\theta = 45^\circ$ 位置平衡，用虚位移原理求平衡时的力 F。（用其他方法做不给分）

$\delta = CD - l_0 = l + 2l\cos45^\circ - 2l = \sqrt{2}l - l = (\sqrt{2}-1)l$



$2 \cdot F_c \cdot v_c \cos45^\circ - F v_E = 0$

$\sqrt{2} F_c v_c = F v_E$

$v_E \cos45^\circ = v_c$

$\sqrt{2} \cdot k(\sqrt{2}-1)l \cdot v_E \cos45^\circ = F v_E$

$F = k(\sqrt{2}-1)l$

哈工大 2017 年秋季学期

理论力学期末考试试题(闭卷)B

班号	
学号	
姓名	

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
分数											

注意行为规范

遵守考场纪律

主管领导审核签字

一、是非判断题（每题 1 分，共 10 分）

1、某平面力系的力多边形自行封闭，则该力系必为平衡力系。 ( )

2、一空间力系，若各力作用线均与某一固定直线平行，则其独立的平衡最多为 5 个。 ( )

3、一空间力系，若各力作用线均与某一固定直线相交，则其独立的平衡最多为 5 个。 ( )

4、若一刚体上各点的轨迹都是圆，则该刚体必定为定轴转动。 ( )

5、刚体平面运动时，其平面图形上任意两点的速度在任一直线上的投影必定相等。 ( )

6、刚体平面运动为瞬时平移时，其平面图形上任意两点的加速度在这两点连线上的投影必定相等。 ( )

7、质点受常力 F 作用，则 $I = Ft$ 表示在瞬时 t 该力 F 的冲量。 ( )

8、若力使刚体做加速运动，则力必对此刚体做功。 ( )

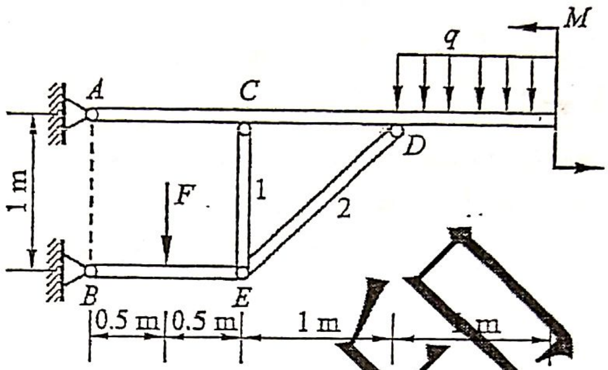
9、平面运动刚体上，惯性力系的合力必定作用在刚体的质心上。 ( )

10、刚体定轴转动时，如果质心正好在其转轴上，则附加动约束力必定为零。 ( )

二、计算题（20分）

图示平面结构由四根无重杆组成，铅直力 $F = 40\text{kN}$，均布力 $q = 10\text{kN/m}$，力偶矩 $M = 40\text{kN.m}$，尺寸如图所示。

求：A,B 处的约束力，杆1,2受力。

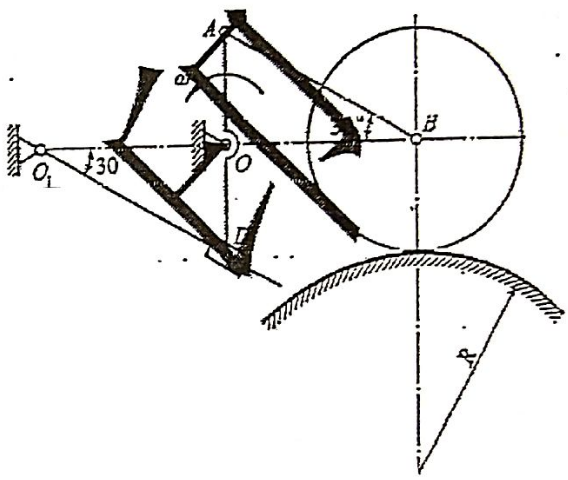


三、计算题（20 分）

图示平面机构中，杆 OAD 以匀角速度 ω 绕轴 O 转动，轮 B 由连杆 AB 带动在固定轮上做纯滚动，同时通过套筒 D 带动杆 O_1D 转动。尺寸 $OA=AD=r$，轮 B 半径为 r，固定轮半径 $R=2r$。

求：在图示瞬时，杆 AB 的角速度，轮 B 的角速度，杆 O_1D 的角速度；

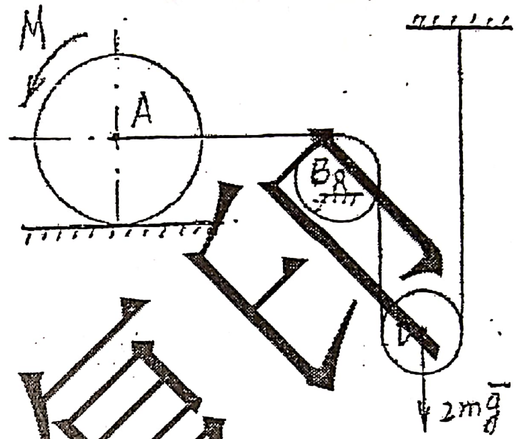
杆 AB 的角加速度，轮 B 的角加速度，杆 O_1D 的角加速度。



四、计算题（25 分）

图示平面系统中，均质轮 A 质量为 m，半径为 R，在矩为 $M=3mgR$ 的常力偶作用下沿水平面做纯滚动。两相同均质轮 B,D，质量均为 $2m$，半径均为 $r=\frac{1}{2}R$，不计绳的质量，绳与轮间不打滑，系统由静止开始运动。

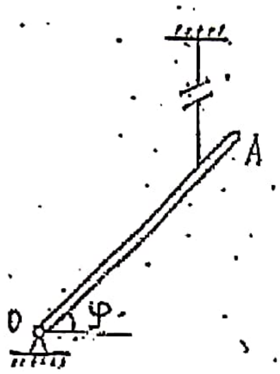
求：轮 A 中心 A 运动任意一段距离 x_A 时的速度、加速度，水平绳的拉力，轮 A 受到的摩擦力。



院系______ 学号______ 姓名______ 授课教师______

五、计算题（15 分）

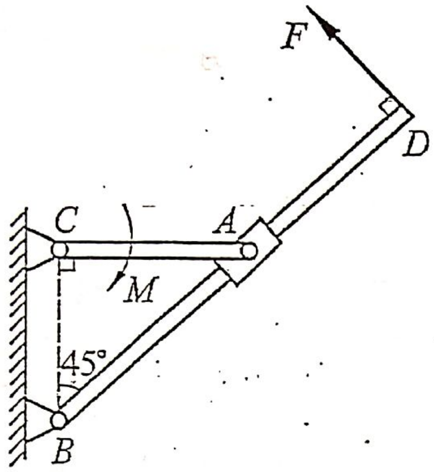
图示均质杆质量为m，长度为l，以细绳悬挂如图，角$\varphi=45^\circ$。求突然剪断细绳瞬时，杆的角加速度、轴O处的约束力。（要求用动静法求解，用其他方法做不给分）



六、计算题（15 分）

不计图示机构各构件自重与各处摩擦，$CA=l$，$BD=2\sqrt{2}l$，机构在图示位置（CA 杆水平，角度如图）平衡。用虚位移原理求系统平衡时力偶矩 M 与力 F 间的关系。（用其他方法做不给分）

资源共享 QQ ID
HGDZYFXZ



主管领导审核签字

哈尔滨工业大学 2016 学年秋季学期

理论力学（I，II，III）补考试题

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
阅卷人											

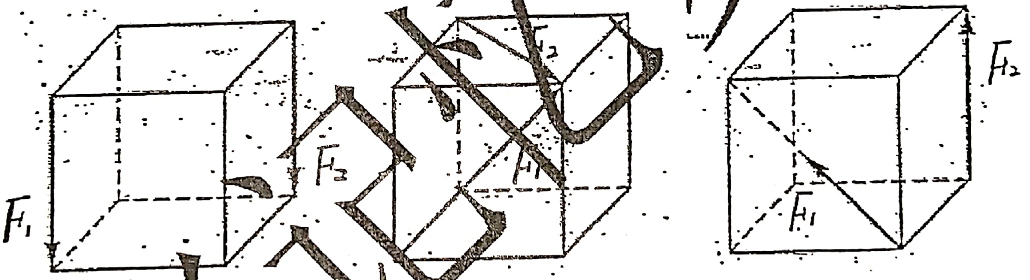
片纸鉴心 诚信不败

授课教师______ 姓名______ 学号______ 院系______

密 封 线

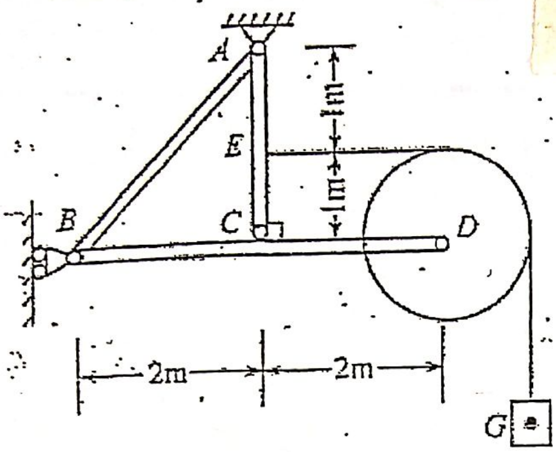
一、 简答题：（10 分）

图示空间力系由两个力 F_1 和 F_2 组成，这两个力大小相等，即 $F_1=F_2=F$。下述各图中力系简化的最终结果是什么？



二、计算题（20 分）

承重装置，物 G 重 $P=10\text{kN}$，不计各构件自重，尺寸如图所示。求 A，B 处约束力与杆 AB 受力。

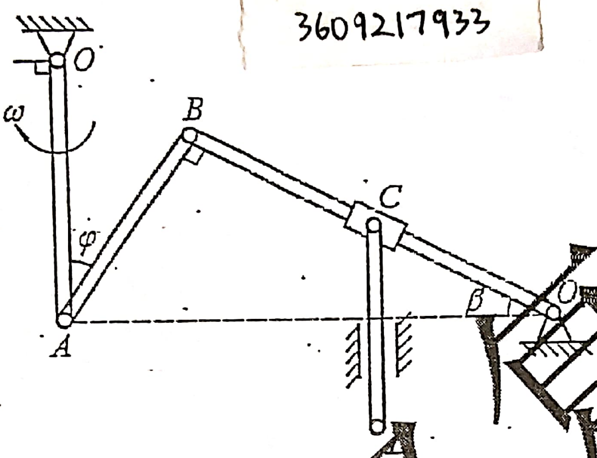


授课教师________ 姓名________ 学号________ 院系________

密 封 线

三、计算题（20 分）

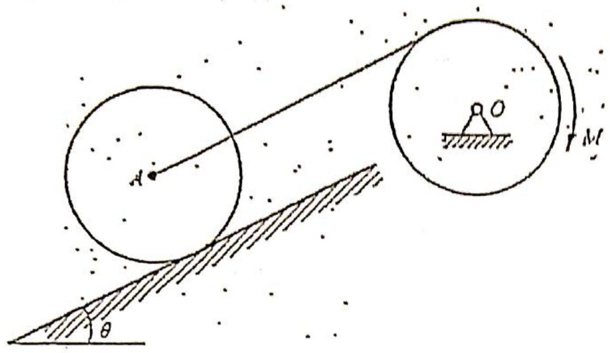
图示平面机构，$OA=\dfrac{4}{3}R$，图示瞬时，$BC=O_1C=R$，$\varphi=\beta=30^\circ$，OA 杆以匀角速度 ω 绕轴 O 转动。求此瞬时（1）O_1B 杆的角速度；（2）D 点的速度；（3）O_1B 杆的角加速度。



四、计算题（20 分）

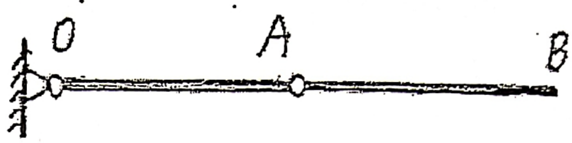
两轮均可视为均质圆盘，质量均为m，半径均为R，系统在常力偶矩M 作用下由静止开始运动。轮A做纯滚动，斜面倾角$\theta=30^{\circ}$。求轮心A上升任意距离s时，轮心A的速度和加速度，两轮间绳索的拉力，轴承O处的约束力。

网盘计划
Q群953062322



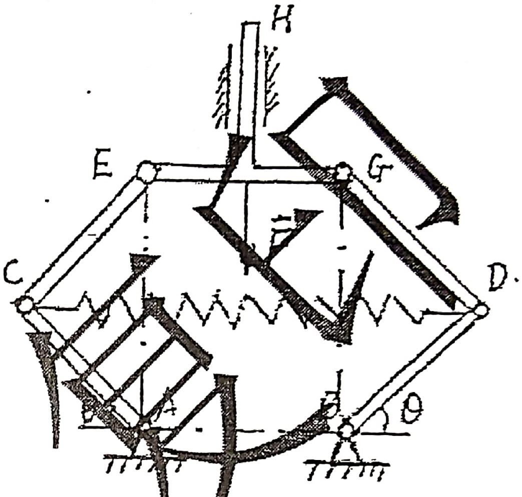
五、计算题（15 分）

图示两相同均质杆，质量均为 m，长度均为 l，在图示水平位置静止释放，用动静法求此瞬时两杆的角加速度。（用其他方法做不给分）



六、计算题（10 分）

不计图示平面机构各构件自重，T 型杆限制在铅直光滑导槽内，在 T 型杆上作用一铅直向下的力 $\overline{F}$，尺寸 $AB=EG=AC=CE=BD=DG=l$，水平弹簧刚度系数为 k，原长为 $2l$。系统在 $\theta=45^{\circ}$ 位置平衡，用虚位移原理求平衡时的力 F。（用其他方法做不给分）



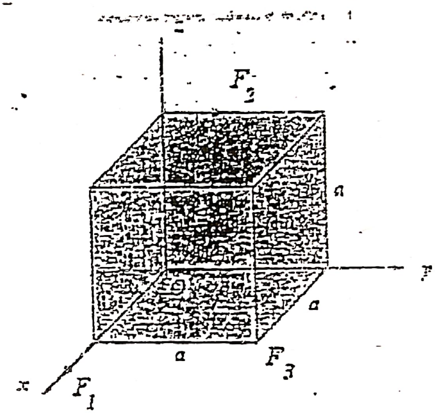
哈工大2015年 秋 季学期

理论力学Ⅰ、Ⅱ期末考试试题

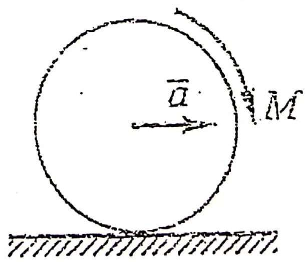
题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
分数											

一、 正确解答下列各题（15分）

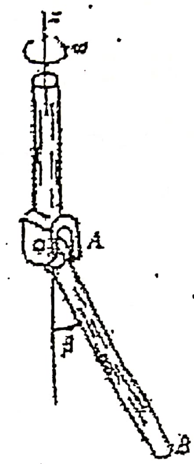
1. 如图所示，在边长为 a 的正方体的三个棱边上分别作用有力 F_1，F_2，F_3，且 $F_1=F_2=F_3=F$，试求该力系向 O 点简化的结果，该力系能否简化成一个合力？为什么？（5分）



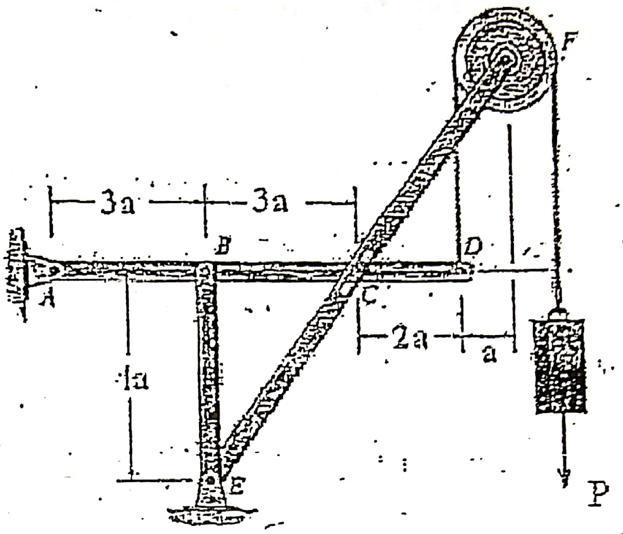
2. 质量为 m、半径为 R 的均质圆轮，在力偶 M 的作用下沿水平直线粗糙地面作纯滚动。试求轮心的加速度 a 以及圆轮所受的静滑动摩擦力的大小与方向（5分）



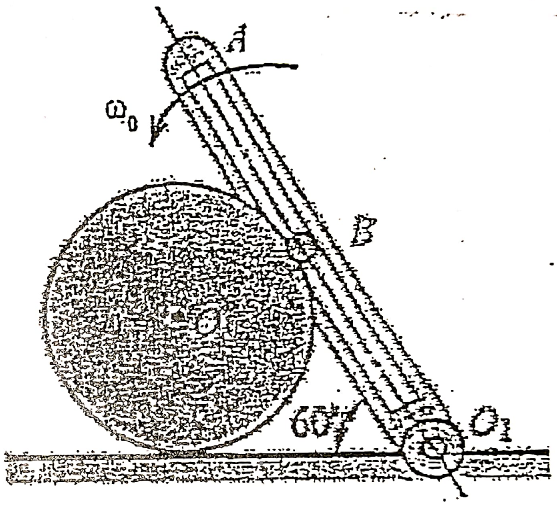
3. 图示均质杆 AB 长为 l，质量为 m，以等角速度 ω 绕铅直 z 轴转动。求杆与铅直线的交角 β（5 分）。



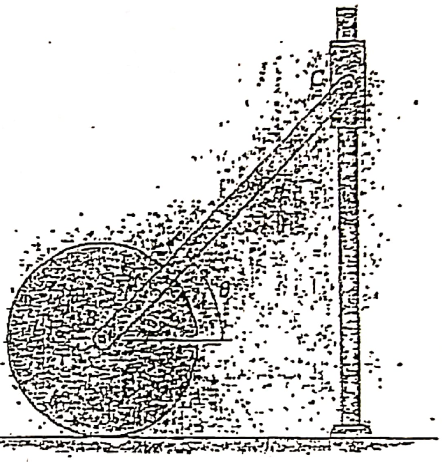
二、 图示结构，已知悬挂重物重量为 P，A、B、E、F 为铰链连接，销钉 C 可以在 EF 杆滑槽内滑动。各构件尺寸如图所示，自重忽略不计。试求铰链 A、B 处的约束力（15 分）



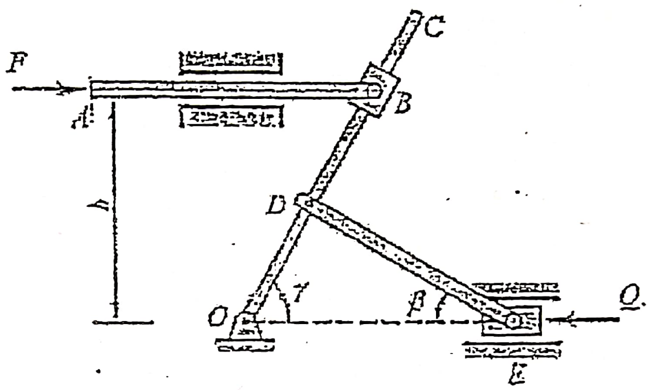
三、　如图所示，摇杆 O_1A 以匀角速度 ω_0 绕 O_1 轴定轴转动。轮 O 在水平面上滚动而不滑动，轮缘上固连销钉 B，此销钉可在摇杆 O_1A 的槽内滑动。已知：轮的半径为 R，在图示位置时，AO_1 是轮的切线，摇杆与水平面间的交角为 60°。求轮中心 O 点在该瞬时的速度和加速度（20 分）。



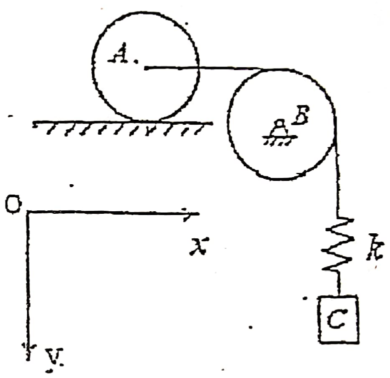
四、图示系统由圆盘 A、细长杆 BC 和套筒 C 组成。圆盘 A 质量为 $2m$、半径为 r，沿水平面做纯滚动；BC 杆质量为 $2m$、长为 $4r$；套筒 C 质量为 m，尺寸忽略不计。系统由初始静止位置（θ=45°）开始释放，忽略套筒与立柱之间的摩擦，求当到达位置 $\theta=0°$ 时，套筒 C 的速度和加速度，以及该瞬时圆盘 A 与地面间的摩擦力（20 分）。



五、图示平面机构中，在 AB 杆和滑块 E 上分别作用有水平力 F 和 Q。套筒 B 与杆 AB 的端点铰接，并套在绕 O 轴转动的杆 OC 上，可沿该杆滑动。已知 AB 和 OE 两平行线间的垂直距离为 b，在图示位置 $\gamma = 60°$，$\beta = 30°$，$OD=BD$。若系统在此位置处于平衡，试利用虚位移原理求力 F 和 Q 之间应满足的关系（15 分）。(其他方法不给分)



六、图示系统在铅垂面内运动。其中均质圆柱体 A、B 质量均为 m_1，半径均为 r ，圆柱体 A 在水平面上作纯滚动。在圆柱体 B 上跨过一不可伸长的绳，绳的一端系在圆柱体 A 的质心上，另一端与弹簧相连并悬挂一质量为 m_2 的重物 C，绳与圆柱体 B 之间无滑动，弹簧的刚度系数为 k。当 $x_A = y_C = 0$ 时，弹簧恰好为原长。试选取 x_A，y_C 为广义坐标，用拉格朗日方程建立系统的运动微分方程（15 分）。



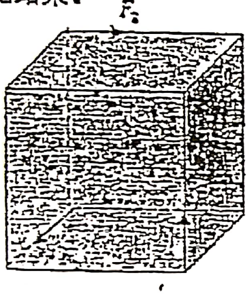
哈尔滨工业大学 2014 学年秋季学期

理 论 力 学（I，II）试 题

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	总分
得分													
阅卷人													

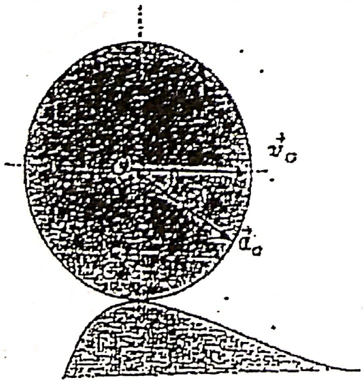
一、计算题（8 分）

图示边长为 a 的正方体上沿三个不相交又不平行的棱上作用有三个大小相等的力$\vec{F}_1$，$\vec{F}_2$，$\vec{F}_3$，求力系最终的简化结果。



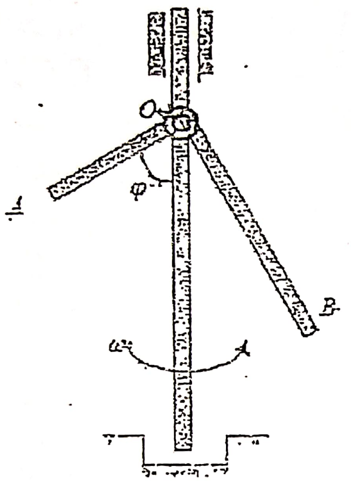
二、计算题（8 分）

如图所示，半径为 R 的车轮沿曲面滚动。已知轮心 O 在某瞬时的速度$\vec{v}_O$和加速度$\vec{a}_O$，以及二者的夹角β。试求车轮的角加速度，速度瞬心 C 点的加速度。



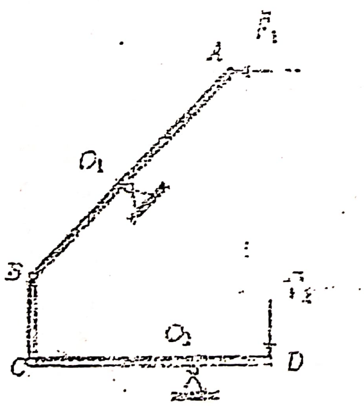
三、计算题（7分）

材料相同的两均质直杆 OA 和 OB，长各为 $OA=a$，$OB=b$，互成直角固结在一起，其顶点 O 与铅直轴以铰链相连，此轴以等角速度 ω 转动。求杆 OA 与铅垂线的偏角 φ 与 ω 的关系。



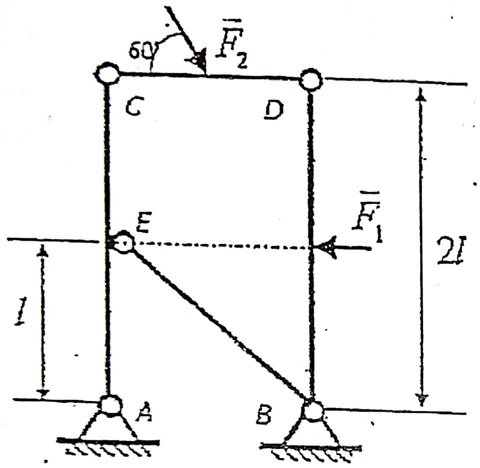
四、计算题（7分）

图示系统中，$O_1A=O_1B=O_2C=l$，$BC=O_2D=l/2$，杆 CD 处于水平，杆 BC 铅垂，杆 AB 与水平夹角为 $45°$，试求系统平衡时 F_1 和 F_2 的关系。



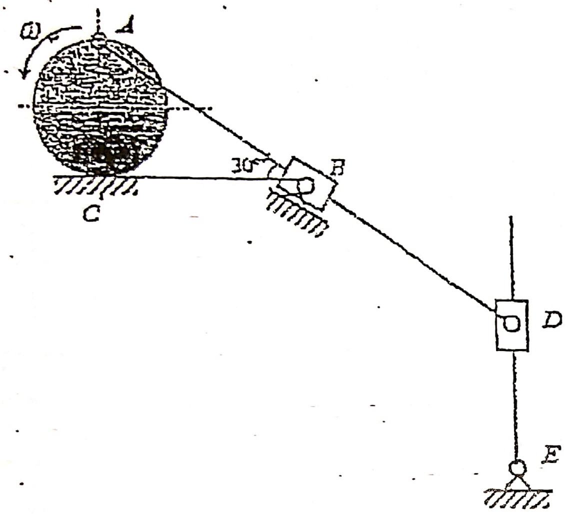
五、计算题（15 分）

图示平面机构，各杆自重不计，A，B，C，D，E 皆为铰链。在杆 BD 中点作用力 $\bar{F}_1$；杆 CD 中点作用力 $\bar{F}_2$。已知：$CD=l$。试求出杆 BE 所受的力。



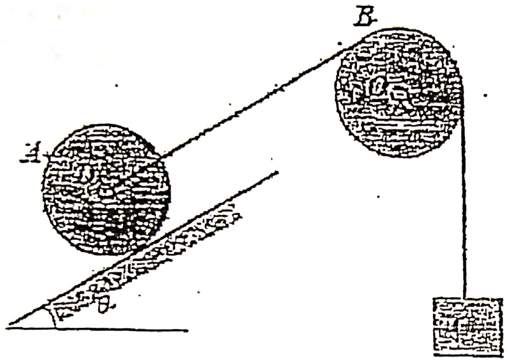
六、计算题（20 分）

如图所示平面机构，圆盘半径为 R，以匀角速度 ω 做纯滚动，在 A 点通过铰链连接杆 ABD，杆 ABD 穿过套筒 B，于 D 点通过铰链连接套筒 D，套筒 D 穿过杆 DE，在图示位置，CA，DE 铅垂，BC 水平，$AB=BD$，$DE=2R$，杆 ABD 与水平成角 30°。求此瞬时杆 DE 的角速度和角加速度。



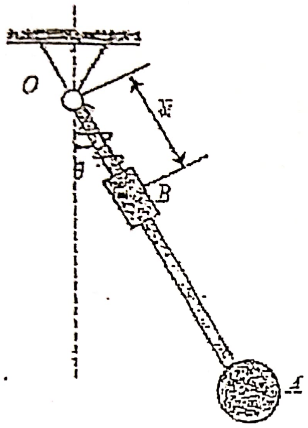
七、计算题（20 分）

跨过定滑轮 B 的绳索，两端分别系在滚子 A 的中心 D 和物块 C 上。滚子 A 和定滑轮都可看成半径是 r、质量为 m 的均质圆盘，物块 C 的质量为 $m/2$。滚子 A 在倾角为 θ 的斜面上做纯滚动。试求：（1）滚子 A 质心的加速度；（2）绳索 AB 段的拉力；（3）轴承 O 处的约束力。



八、计算题（15分）

长为 l 的细杆 OA，上端铰支在 O 点，下端固结一质量为 m_1 的小球，另一质量为 m_2，系以弹簧的滑块 B，在重力和弹性力作用下，可沿细杆自由滑动，如图所示。已知弹簧的刚度系数为 k，自然长度为 l_0。不计弹簧、细杆的质量以及摩擦，试利用拉格朗日方程求细杆在铅垂面内摆动时系统的运动微分方程。



四六级Q群
741109221

哈尔滨工业大学 2013-2014 学年秋季学期

理论力学（I，II）期末试题（A 卷）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八			总分
得分											

判断是非题（每小题 1 分，共 10 分）

1、力矩和力偶矩都是对物体转动效果的度量，所以力矩和力偶矩完全相同。（ X ）

2、力的平移定理指的是：力可以任意平行移动，不需任何条件。（ X ）

3、平面汇交力系的平衡方程，只能是两个投影方程。（ √ ）

4、对整体受力分析后，若整体未知量的个数大于独立平衡方程的个数，此系统即为超静定系统。（ √ ）

5、一空间力系中各力作用线分别汇交于两个固定点，则该力系独立平衡方程的个数最多为 6 个。（ √ ）

6、动系角速度向量和相对速度平行时，科氏加速度等于零。（ √ ）

7、车轮沿水平路面纯滚动时，不管轮心运动情况如何，车轮和路面接触点的加速度方向均指向轮心。（ √ ）

8、任意质点系动量与动量矩的改变均与外力有关，而与内力无关。（ X ）

9、对任意质点系，其惯性力系简化的主矢大小与方向，与简化中心位置无关。（ √ ）

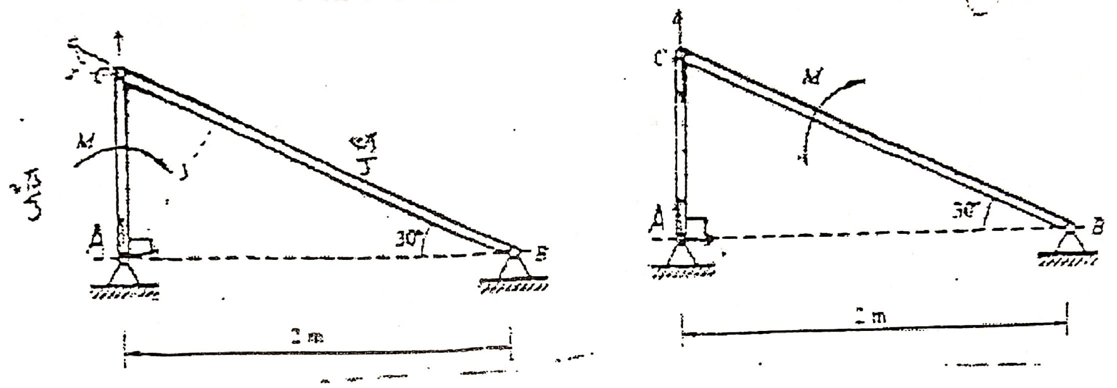
10、虚位移是假想的无限小位移，其与时间以及运动的初始条件无关。（ √ ）

封

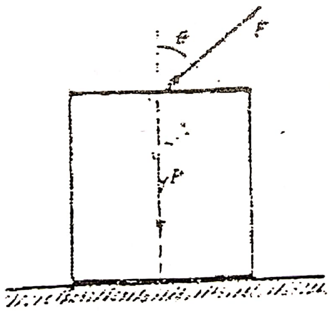
线

二、填空题（每空 2 分，共 22 分）

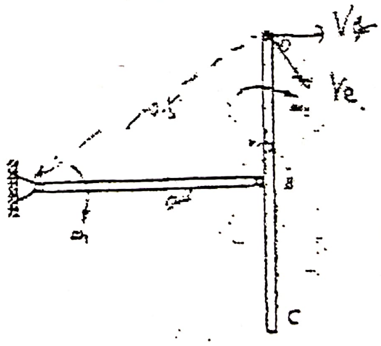
1、不计图示平面系统各构件自重，尺寸与角度如图所示，力偶矩 $M=10\mathrm{kN\cdot m}$。当力偶 M 作用于 AC 杆上时，A 处约束力的大小为（ 10kN ）；当力偶 M 作用于 BC 杆上时，A 处约束力的大小为（ 5kN ）。



2、如图所示物块重为 P，放在粗糙水平面上，物块与水平面间的摩擦角为 $\varphi_f=20^\circ$，力 F 的大小等于 P。若角 $\theta=50^\circ$ 时，物块是否保持静止（ 否 ）；若角 $\theta=30^\circ$ 时，物块是否保持静止（ 是 ）。



题 2 图



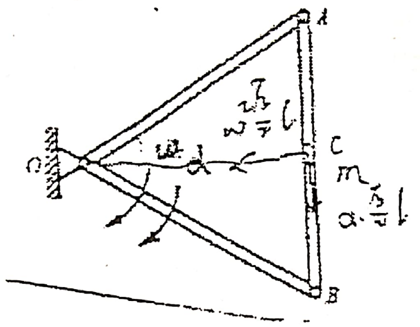
题 3 图

3、如图所示平面机构，杆 AB 以角速度 $\omega_1=3\mathrm{rad/s}$ 绕轴 A 转动，杆长为 40cm。杆 CD 长为 60cm，B 为杆 CD 的中点，杆 CD 以相对 AB 杆的角速度 $\omega_2=1\mathrm{rad/s}$ 绕轴 B 转动，图示瞬时 $AB\perp CD$。把动系建于杆 AB 上，动点选为杆 CD 上 D 点，则此时动点 D 的牵连速度大小为（ 1.5m/s ）；此时动点 D 的相对速度大小为（ 0.3m/s ）。

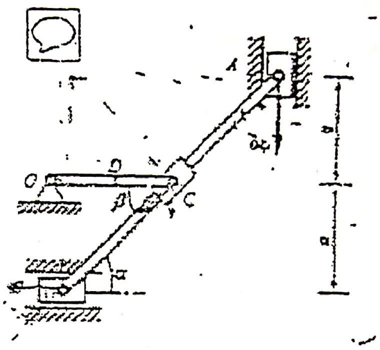
姓名________ 学号________ 院系________

密 封 线

4、图示为一等边三角形构架，边长均为l，不计OA、OB杆的质量，均质杆AB的质量为m，此构架以角速度ω和角加速度α绕轴O转动。把此杆的惯性力系向轴O处简化，则切向惯性力主矢大小为（ $\frac{\sqrt{3}}{2}l\alpha$ ）；法向惯性力主矢大小为（ $\frac{\sqrt{3}}{2}\omega^2 l$ ）；惯性力系主矩大小为（ $\frac{5}{6}ml^2\alpha$ ）。



题 4 图



题 5 图

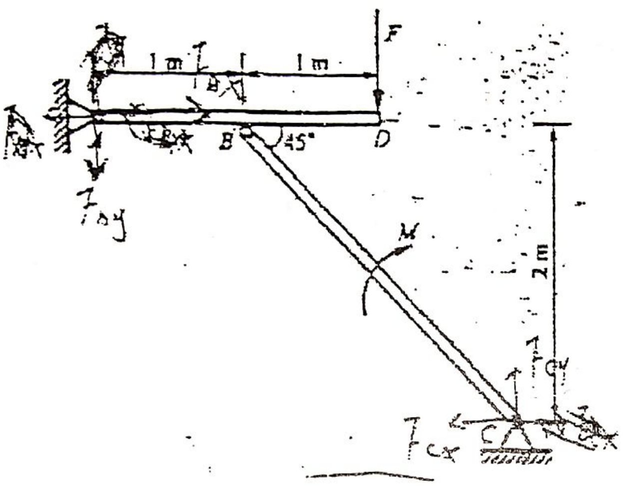
5、图示平面机构，角度$\alpha=\beta=45^\circ$，尺寸a如图所示。若点A的虚位移为δr_A，则点B的虚位移δr_B大小为（ $\delta\vec{r}_A$ ）；OC杆上中点D的虚位移δr_D大小为（ 0 ）。

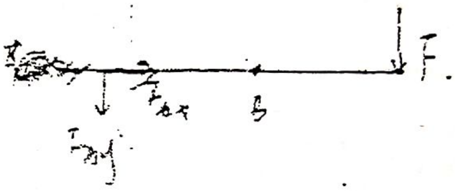
党建交流群
18986 8951

18

三、计算题（18 分）

不计图示平面结构各构件自重，尺寸如图所示，铅直力 $F=40\text{kN}$，力偶矩 $M=20\text{kN}\cdot\text{m}$，求支座 A、C 处的约束力。





解 整体分析 $\Sigma F_x = F_{Ax} - F_{cx} = 0$

$\Sigma F_y = F_{cy} - F_{Ay} - F = 0.$

$\Sigma M_C = -F_{Ax}\cdot 2 + F_{Ay}\cdot 3 + F\cdot 1 - M = 0$

讨论杆段 AD.

$\Sigma M_B = F_{Ay}\cdot 1 - F\cdot 1 = 0$

$\therefore F_{Ay} = F = 40\text{kN}$ $\quad\therefore F_{cy} = 2F = 80\text{kN}$

$F_{Ax} = 70\text{kN}$ $\quad\therefore F_{cx} = 70\text{kN}$

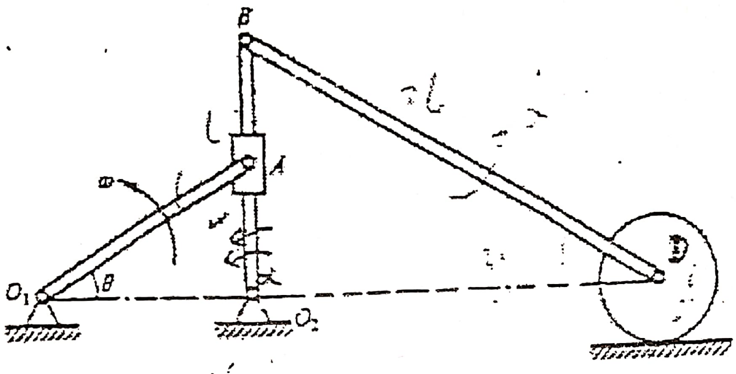
解得 $F_{Ax} = 70\text{kN}$ $\quad F_{Ay} = 40\text{kN}$ 方向如图

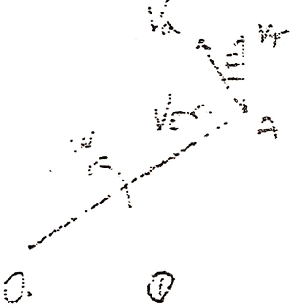
$F_{cx} = 70\text{kN}$ $\quad F_{cy} = 80\text{kN}$ 方向如图.

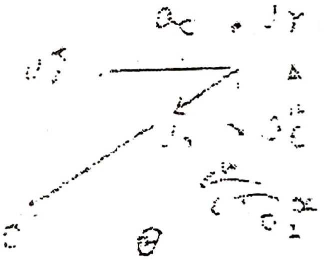
四、计算题（20分）

轮D作纯滚动

图示平面机构，O_1A杆以匀角速度ω绕轴O_1转动，尺寸为$O_1A = O_2B = l$，$BD = 2l$，轮D的半径$r = \frac{l}{4}$。当$\theta = 30^\circ$时，求BD杆的角速度和角加速度；轮D的角速度和角加速度。







解 如图① $\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r$ ∴ $V_e = V_a \sin\theta = \frac{1}{2}\omega l$

$V_r = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega l$ 又∵ $V_e = \omega_{O_2B}\cdot O_2A$

∴ $\omega_{O_2B} = \frac{V_e}{O_2A} = \omega$

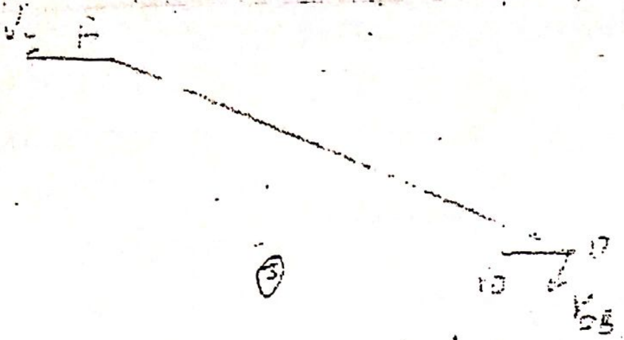
如图② $a_a = a_e^n + a_e^\tau + a_c + a_r$

大小	$\omega^2 l$	$\omega^2\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}\alpha$	$2\omega V_r$	?
方向	✓	✓	✓	✓	✓

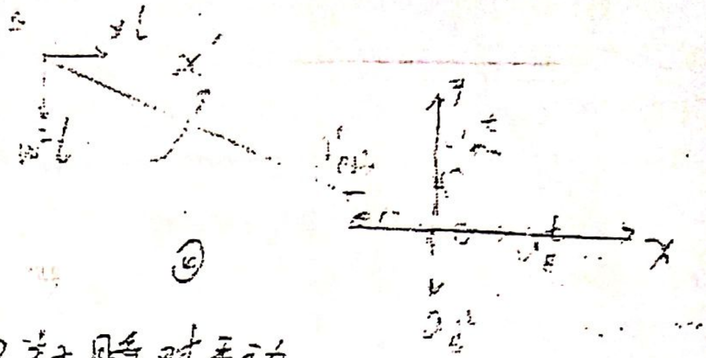
∴ $a_a\cos30^\circ = \frac{l}{2}\alpha + 2\omega\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\omega l$

∴ $\alpha = -\sqrt{3}\omega^2$ 即与所标方向相反

姓名 密 封 线 院系



ⓑ



ⓒ

如图ⓑ B.D两点速度均水平，即BD杆瞬时平动

$V_D = V_B + V_{DB} = V_B$　　∴ $V_{DB}=0$　　∴ $\omega_{BD}=0$

∴ $V_D = V_B = \omega l$　　又∵ 轮D作纯滚动

∴ $\omega_D \cdot r = V_D = \omega l$　　∴ $\omega_D = 4\omega$

如图ⓒ

	$a_D =$	$a_B^n +$	$a_B^t +$	$a_{DB}^n +$	a_{DB}^t
大小	?	$\omega^2 l$	$\sqrt{3}\omega^2 l$	0	$2\alpha' l$
方向	✓	✓	✓	✓	✓

向y轴投影 $a_{DB}^t \cos\theta = a_B^n$　　∴ $\alpha' = \frac{\sqrt{3}}{3}\omega^2$

∴ $a_D = a_B^t + a_{DB}^t \sin\theta = \frac{4}{3}\sqrt{3}\,\omega^2 l$

又∵ $a_D = \alpha_D \cdot r$　　∴ $\alpha_D = \frac{16\sqrt{3}}{3}\omega^2$

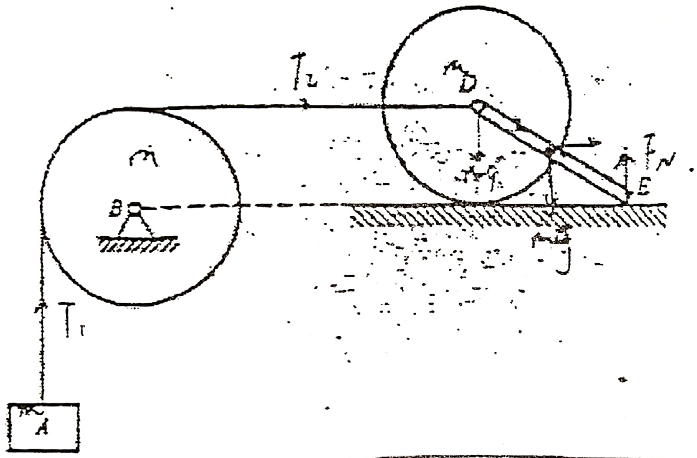
∴ BD杆 $\omega_{BD}=0$　　$\alpha_{BD} = \alpha' = \frac{\sqrt{3}}{3}\omega^2$

轮D　$\omega_D = 4\omega$，　$\alpha_D = \frac{16\sqrt{3}}{3}\omega^2$

五、计算题（20 分）

20

图示平面系统，质量为 m 的重物 A 由不可伸长的绳索经定滑轮 B 带动轮 D 做纯滚动，两轮均可视为均质圆盘，质量均为 m，半径均为 R，均质细长杆 DE 长为 $2R$，质量也为 m，D 端与轮心铰接，E 端与地面间无摩擦，系统初始静止。求重物 A 下降任意高度 h 时，重物的速度和加速度，两轮间绳索的拉力，地面对杆端 E 的约束力。



解：设重物 A 下降 h 后，A 的速度为 v

DE杆平动

$\omega_D = \omega_B = \frac{v}{R}$ $\qquad v_D = v_{DE} = v_A = v$

$T_0 = 0$ $\qquad T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega_D^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega_B^2 + \frac{1}{2}mv^2$

$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}mv^2 + \frac{3}{4}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2$

$= 2mv^2$

$W = mgh$

$\because T - T_0 = W$ $\qquad \therefore 2mv^2 = mgh$

$v = \sqrt{\frac{gh}{2}}$ $\qquad \frac{\partial(T-T_0)}{\partial t} = 4mv\cdot\frac{\partial v}{\partial t} = 4mv\cdot a = \frac{\partial W}{\partial t} = mg\frac{\partial h}{\partial t} = mgv$

$\therefore a = \frac{g}{4}$

$mg - T_1 = ma$

$T_1 = m(g-a) = \frac{3}{4}mg$

$(T_1 - T_2)R = J\alpha \qquad \alpha = \frac{a}{R} = \frac{g}{4R}$

$T_2 = T_1 - \frac{1}{2}mR^2 \cdot \frac{a}{R^2} = T_1 - \frac{1}{2}ma = T_1 - \frac{1}{8}mg = \frac{5}{8}mg$

$\therefore \cancel{V = \sqrt{\frac{g}{2}}} \qquad V = \sqrt{\frac{gh}{2}}$

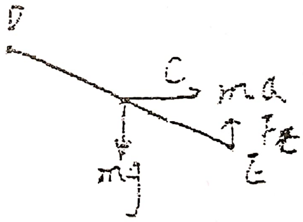
$a = \frac{1}{4}g$

$T_1 = \frac{3}{4}mg$

$T_2 = \frac{5}{8}mg$

检证

当 $a = \frac{g}{4}$ 时



由达朗贝尔原理知.

$\sum M_D = ma \cdot \frac{R}{2} + F_E \cdot \sqrt{3}R - mg \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}R = 0$

$\therefore F_E = \frac{(\sqrt{3} - \frac{1}{4})mg}{2\sqrt{3}} > 0$

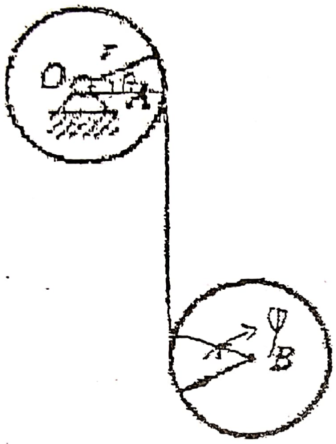
∴ 杆 DE 没有脱离地面

即杆 DE 重力没有作功.

得结论 $a = \frac{g}{4}$ 正确.

六、计算题（10分）

图示系统中，两均质圆柱的质量均为 m，半径均为 r，由不计质量不可伸长的细绳连接如图，系统初始静止，绳的直线段铅直。要求用拉格朗日方法求两轮的角加速度。（用其他方法做不给分）



解 此系统有两个自由度，设 θ、φ 为广义坐标

初始动能 $T_0=0$

$$T=\frac{1}{2}J(\dot\theta)^2+\frac{1}{2}m(\dot\theta r+\dot\varphi r)^2+\frac{1}{2}J(\dot\varphi)^2$$

$$=\frac{1}{4}mr^2\dot\theta^2+\frac{1}{2}mr^2(\dot\theta+\dot\varphi)^2+\frac{1}{4}mr^2\dot\varphi^2$$

令初始势能 $V_0=0$

$\therefore V=-mg(\theta r+\varphi r)$

$\therefore L=T-V=\frac{1}{4}mr^2(\dot\theta^2+\dot\varphi^2)+\frac{1}{2}mr^2(\dot\theta+\dot\varphi)^2+mgr(\theta+\varphi)$

$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$ ①

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}\right)-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0$ ②

姓名＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿ 院系＿＿＿＿ 密 封 线

①化简得 $\frac{3}{2}\ddot{\theta}+\ddot{\varphi}=\frac{g}{r}$

②化简得 $\frac{3}{2}\ddot{\varphi}+\ddot{\theta}=\frac{g}{r}$

$\therefore\ \ddot{\theta}=\ddot{\varphi}=\frac{2g}{5r}$

$\therefore\ \alpha_0=\alpha_B=\frac{2g}{5r}$

哈工大2012年秋季学期

理论力学期末考试试题(闭卷)

(64学时)

班号	
学号	
姓名	

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
分数											

注意行为规范

遵守考场纪律

一、是非判断题（10分）

1、任意力系向某点简化，因主矢等于每一分力的矢量和，所以主矢一定是该力系的合力。 （ ✗ ）

2、两接触面粗糙且存在正压力，则摩擦力必定不等于零。 （ ✗ ）

3、列汇交力系的平衡方程时，所选坐标轴必须互相垂直。 （ ✗ ）

4、刚体定轴转动不是刚体的平面运动。 （ ✗ ）

5、刚体平移时，其各点的轨迹是空间曲线，此刚体的运动是刚体的平面运动。 （ ✗ ）

6、速度瞬心的速度为零，其加速度可能为零，也可能不为零。 （ ✗ ）

7、因可以对任意点O计算动量矩$\bar{L}_O$，所以也可以对任意点O使用动量矩定理$\frac{d\bar{L}_O}{dt}=\sum\bar{M}_O(\bar{F}_i)$。 （ ✗ ）

8、虚位移原理说的是，对处于平衡状态的任意质点系，其平衡条件是$\sum\bar{F}_i\cdot\delta\bar{r}_i=0$，即所有主动力在所给虚位移中所做虚功之和等于零。 （ ✗ ）

9、包含刚体，对任意质点系，其惯性力系简化的主矢均为$\bar{F}_{IR}=-m\bar{a}_C$，其作用点与简化中心的位置有关。 （ ✓ ）

10、任意刚体上的任意一点都存在有惯性主轴。 （ ✓ ）

主管领导审核签字

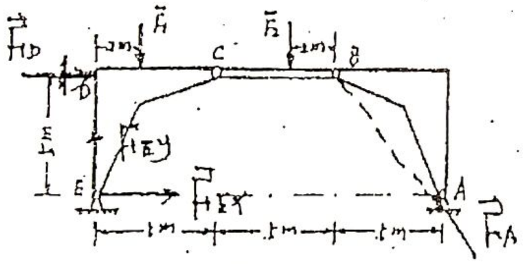
网盘计划

Q群953062322

二、计算题（20 分）

不计图示各构件自重，铅直集中力 $F_1=300\sqrt{2}\text{kN}$，$F_2=500\sqrt{2}\text{kN}$，尺寸如图。

求：支座 A、D、E 处约束力。



(4)

分析 ABC　$\sum M_C(\vec{F})=0.$　$F_A\cdot\cos45^\circ\cdot 10 - F_A\sin45^\circ\cdot 5 - F_2\cdot 3 = 0.$　(3)

$\Rightarrow F_A = 600\text{kN}.$　(1)

分析整体：

$\sum F_x=0.$　$F_{Ex} - F_A\cdot\sin45^\circ + F_D = 0.$　(3)

$\sum F_y=0.$　$F_{Ey} + F_A\cos45^\circ - F_1 - F_2 = 0.$　(3)

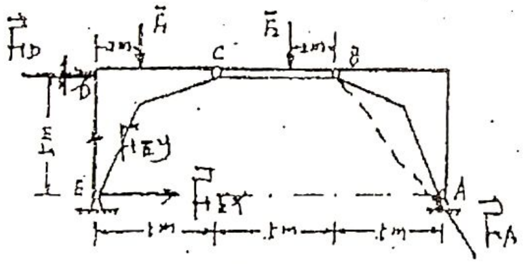
$\sum M_E(\vec{F})=0.$　$F_A\cdot\cos45^\circ\cdot 15 - F_2\cdot 8 - F_1\cdot 2 - F_D\cdot 5 = 0$　(3)

$\Rightarrow F_D = -20\sqrt{2}\,\text{kN}.$　$F_{Ex}=320\sqrt{2}\,\text{kN}.$　$F_{Ey}=500\sqrt{2}\,\text{kN}$　(3)

二、计算题（20分）

不计图示各构件自重，铅直集中力 $F_1=300\sqrt{2}$kN，$F_2=500\sqrt{2}$kN，尺寸如图。

求：支座 A、D、E 处约束力。



(4)

分析 ABC $\quad \sum M_C(\vec F)=0. \quad F_A\cdot\cos45°\cdot 10 - F_A\sin45°\cdot 5 - F_2\cdot 3 = 0.$ (3)

$\Rightarrow F_A = 600\,kN.$ (1)

分析整体：

$\sum F_x=0. \quad F_{Ex} - F_A\cdot\sin45° + F_D = 0.$ (3)

$\sum F_y=0. \quad F_{Ey} + F_A\cos45° - F_1 - F_2 = 0.$ (3)

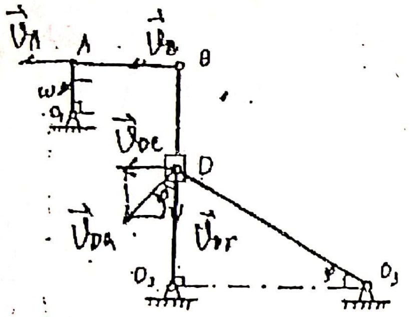
$\sum M_E(\vec F)=0. \quad F_A\cdot\cos45°\cdot 15 - F_2\cdot 8 - F_1\cdot 2 - F_D\cdot 5 = 0$ (3)

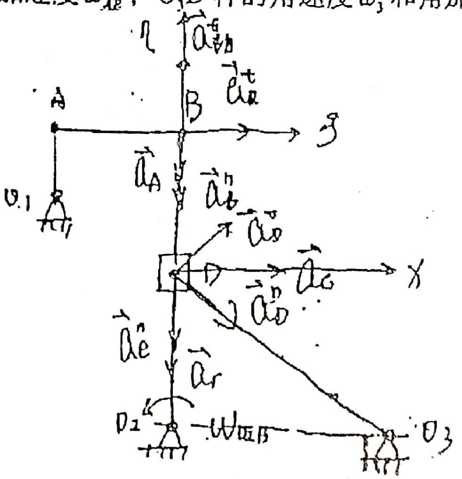
$\Rightarrow F_D = -20\sqrt{2}\,kN. \quad F_{Ex}=320\sqrt{2}\,kN. \quad F_{Ey}=500\sqrt{2}\,kN$ (3)

三、计算题（20分）

图示机构中，曲柄O_1A杆以匀角速度ω绕轴O_1转动，杆长为R。套筒D可在O_2B杆上滑动，AB杆长为$2R$，在图示位置，$BD=O_2D=2R$，角$\varphi=30^\circ$。

求：图示位置时，AB杆的角速度ω_{AB}和角加速度α_{AB}；O_3D杆的角速度ω_3和角加速度α_3。





速度分析．AB杆瞬时平移．$\omega_{AB}=0$．$v_B=v_A=\omega R$ (5)

$\Rightarrow \omega_{O_2B}=\dfrac{v_B}{O_2B}=\dfrac{\omega}{4} \Rightarrow v_{De}=\omega_{O_2B}\cdot 2R=\dfrac{\omega}{2}R$．

$v_{Dr}=v_{De}/\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\omega R$

以D为动点．动系．O_2B　$\vec{v}_{Da}=\vec{v}_{De}+\vec{v}_{Dr} \Rightarrow v_{Da}=v_{De}/\sin\varphi$ (5)

$\Rightarrow \omega_{O_3D}=\dfrac{v_{Da}}{O_3D}=\dfrac{v_{De}}{\sin\varphi\, O_3D}=\dfrac{\omega}{4}$

加速度分析．以A为基点．$\vec{a}_B^t+\vec{a}_B^n=\vec{a}_A+\vec{a}_{BA}^t$

$4R\cdot\alpha_{O_2B}$　$\omega_{O_2B}^2\cdot 4R$　ω^2R　$\alpha_{AB}\cdot AB$

向η轴投影：$a_B^t=0 \Rightarrow \alpha_{O_2B}=0$

向ξ轴投影：$-a_B^n=-a_A+a_{BA}^t \Rightarrow a_{BA}^t=a_A-a_B^n=\dfrac{3}{4}\omega^2R$

$\Rightarrow \alpha_{AB}=\dfrac{a_{BA}^t}{AB}=\dfrac{3}{8}\omega^2$

以D为动点．动系：O_2B．

$\vec{a}_D^n+\vec{a}_D^t=\vec{a}_e^n+\vec{a}_r+\vec{a}_C$

$\omega_{O_3D}^2\cdot 4R$　$\alpha_{O_3D}\cdot 4R$　$\omega_{O_2B}^2\cdot 2R$　$2\omega_{O_2B}\cdot v_r$

向x轴投影：$a_D^n\cdot\cos\varphi+a_D^t\cdot\sin\varphi=$

$\Rightarrow a_D^t=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\omega^2R$．$\Rightarrow \alpha_{O_3D}=\dfrac{a_D^t}{4R}=\dfrac{\sqrt{3}}{16}\omega^2$

班号：　　　　姓名：

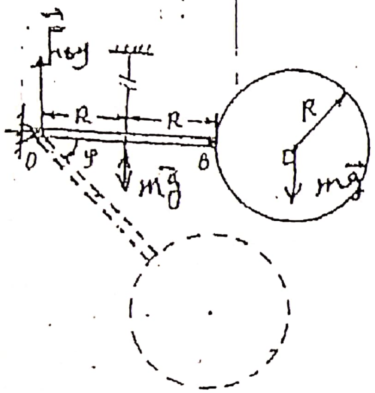
计算题（25分）

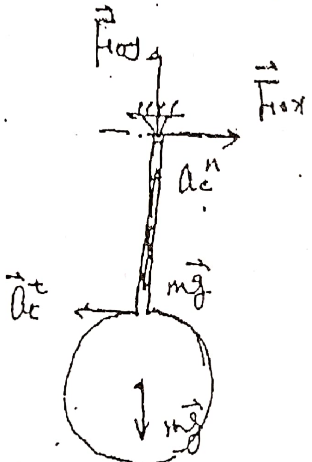
均质杆 OB 长为 $2R$，质量为 m，均质圆盘半径为 R，质量也为 m，与杆固接在点 A 用一绳悬挂。

1、突然剪断绳子时，此刚体的角速度 ω_1 和角加速度 α_1，轴 O 处的约束力；

2、运动至图示任意 φ 角时，此刚体的角速度 ω_2 和角加速度 α_2；

3、当此刚体运动至铅直位置时，刚体的角速度 ω_3 和角加速度 α_3，轴 O 处的约





$\omega_1 = 0.$ $\quad J_O = \frac{1}{3}m(2R)^2 + \frac{1}{2}mR^2 + m\cdot(3R)^2 = \frac{65}{6}mR^2$ (2)

由 $J_O\alpha = mgR + 3mgR \Rightarrow \alpha = \frac{24}{65}\frac{g}{R}$ (2)

$-2ma_c^n = F_{Ox} \Rightarrow F_{Ox} = 0.$ (2)

$-2ma_c^t = F_{Oy} - 2mg \Rightarrow F_{Oy} = 2mg - 2m\cdot\frac{24}{65}\frac{g}{R}\cdot 2R = \frac{34}{65}mg.$ (2)

$T_1 = 0.$ $\quad T_2 = \frac{1}{2}J_O\omega^2.$ $\quad W = mg\cdot R\sin\varphi + 3mgR\sin\varphi.$

由 $T_2 - T_1 = W \Rightarrow \frac{1}{2}\times\frac{65}{6}mR^2\omega^2 = 4mgR\sin\varphi.$ ①

$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{48g}{65R}\sin\varphi}$ (10)

3. $T_1 = 0.$ $\quad T_2 = \frac{1}{2}J_O\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{65}{6}mR^2\cdot\omega^2$

由 $T_2 - T_1 = W \Rightarrow \frac{65}{12}mR^2\omega^2 = 4mg$

$\alpha = 0.$ (1) $\Rightarrow a_c^t = 0.$ $\quad a_c^n = \omega^2$

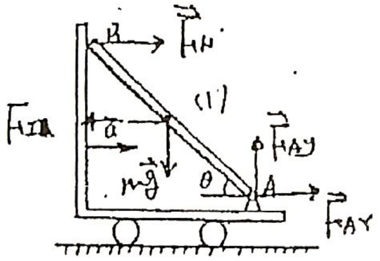
$2ma_c^n = F_{Oy} - 2mg \Rightarrow F_{Oy} = 2m\times\frac{g}{6}$ (4)

$F_{Ox} = 0$

试题： 班号： 姓名：

五、计算题（10分）

图示小车沿水平直线行驶，均质细杆 A 端铰接在小车上，B 端靠在小车的光滑铅直壁上，杆的质量为20kg，长度为1m，角 $\theta=45^\circ$。若测得杆 B 端受到的约束力为100N，用动静法求小车的加速度和 A 处的约束力。（用其他方法做不给分）



分析 AB杆. $F_I = ma$. (2)

$\sum M_A(\vec{F}) = 0$.

$mg\cdot\frac{l}{2}\cos\theta + F_I\cdot\frac{l}{2}\sin\theta - F_N\cdot l\sin\theta = 0$. (2)

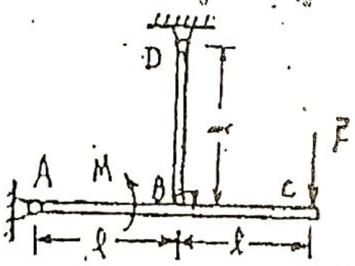
$\Rightarrow a = 0.2\ m/s^2$. (1)

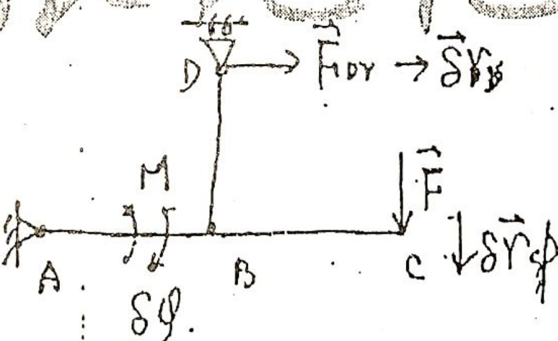
$\sum F_x = 0$. $F_{Ax} - F_I + F_N = 0 \Rightarrow F_{Ax} = -96N$. (2)

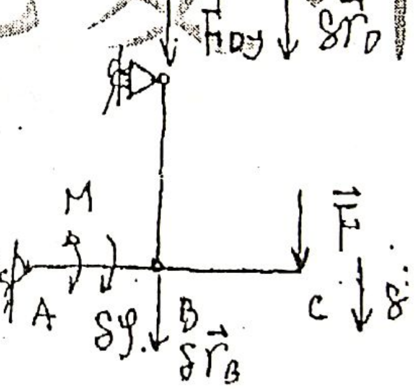
$\sum F_y = 0$. $F_{Ay} - mg = 0 \Rightarrow F_{Ay} = 196N$. (2)

六、计算题（15分）

不计图示结构中各构件自重，长度 $l=1\text{m}$，力偶矩 $M=100\text{N}\cdot\text{m}$，铅直力 $F=100\text{N}$。用虚位移原理求D处的约束力。（用其他方法做不给分）







解除水平约束. $\delta r_C = \delta\varphi = 0$.

虚功方程: $F_{Dx}\cdot\delta r_D = 0$. $\Rightarrow F_{Dx} = 0$. (5)

解除铅垂约束.

虚功方程: $-M\cdot\delta\varphi + F_{Dy}\cdot\delta r_D + F\cdot\delta r_C = 0$. (5)

又: $\delta r_D = \delta r_B = \frac{1}{2}\delta r_C = \delta\varphi\cdot l$ (4)

$\Rightarrow F_{Dy} = -100\text{N}$. (1)

哈工大2012年秋季学期

理论力学期末考试试题(B卷)

班号	
学号	
姓名	

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
分数											

一、是非判断题（10分）

1、因力偶是由力组成的，所以可以用一个力来平衡。（✗）

2、平面汇交力系的平衡方程为$\sum F_x=0$，$\sum F_y=0$，其不能用一个投影平衡方程和一个力矩平衡方程代替。（✗）

3、一平面任意力系向某点简化，其主矢、主矩均不等于零，则一个力偶一定可以与该力系等效。（✗）

4、公路坡度θ小于轮胎与路面间的摩擦角，则当汽车停在此路面时，载重量小的汽车不容易下滑，载重量大的汽车容易下滑。（✗）

5、点的加速度$\bar{a}=\dfrac{d\bar{v}}{dt}$，在某种运动情况下，其大小为$a=\dfrac{dv}{dt}$。（✓）

6、刚体平移时，其各点的轨迹是平面曲线，此刚体的运动是刚体的平面运动。（✓）

7、刚体平面运动时，其角速度与角加速度与基点的选择无关。（✓）

8、因质点系的总动量为零，所以该质点系一定处于静止状态。（✗）

9、因质点系动量的简便计算公式为$\bar{p}=m\bar{v}_C$，而对点的动量矩的计算为动量对该点取矩，所以质点系动量矩的计算公式必为$\bar{L}_O=\bar{r}_C\times m\bar{v}_C$。（✗）

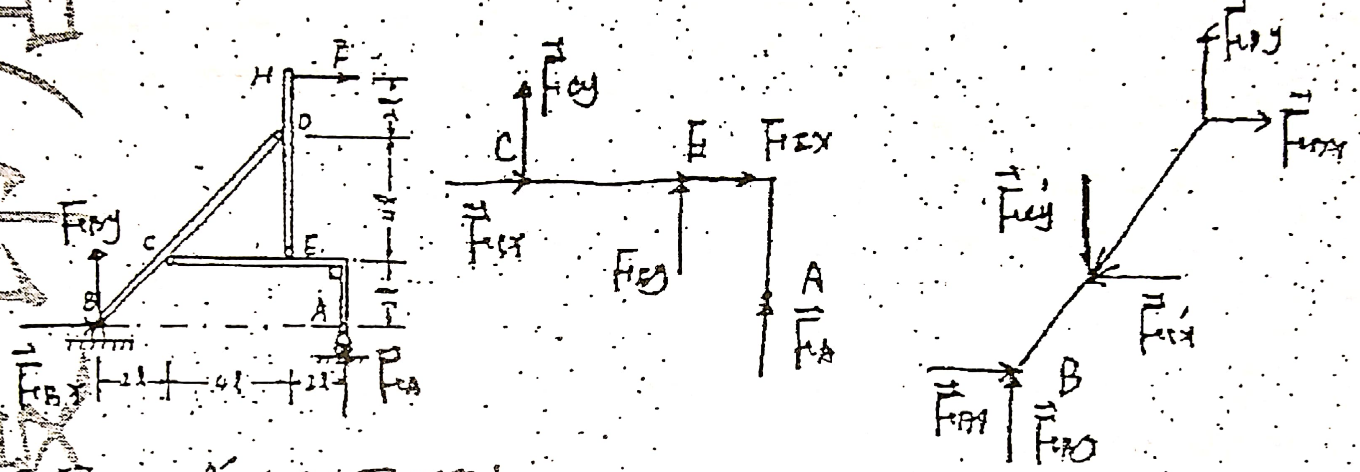
10、应用虚位移原理的前提条件是系统处于理想约束，所以不能用虚位移原理求解非理想约束问题。（✗）

试 题：　　　　　　　　班号：　　　　　　　　姓名：

二、计算题（20 分）

不计图示各构件自重，在 H 处作用一水平力 F，尺寸如图。

求：支座 A、B、C 处的约束力。



分析整体，受力如图所示

$\sum F_x = 0.\quad F_{Bx} + F = 0 \Rightarrow F_{Bx} = -F$

$\sum F_y = 0.\quad F_{By} + F_A = 0. \Rightarrow F_{By} = -F$

$\sum M_B(\vec{F}) = 0.\quad F_A \cdot 8l - F \cdot 8l = 0 \Rightarrow F_A = F$

分析 ACE.

$\sum M_E(\vec{F}) = 0.\quad F_A \cdot 2l - F_{Cy} \cdot 4l \Rightarrow F_{Cy} = \frac{F_A}{2} = \frac{F}{2}$

分析 BCD.

$\sum M_D(\vec{F}) = 0.\quad F_{Bx}' \cdot 6l - F_{By}' \cdot 6l + F_{Cy}' \cdot 4l - F_{Cx}' \cdot 4l = 0.$

$\Rightarrow F_{Cx}' = \frac{F}{2}$

总分：10

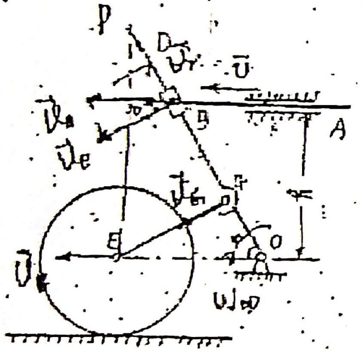
此页：5

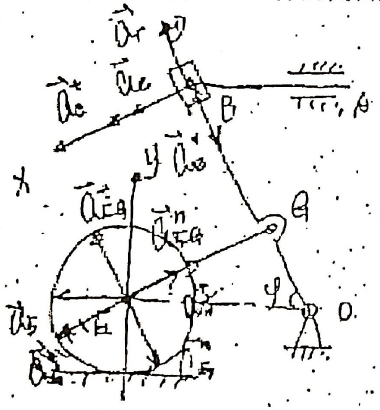
试题：　　　　　　　　班号：　　　　　　　　姓名：

、计算题（20分）

示机构中，主动件 AB 杆以匀速 v 向左运动，通过套在 OD 杆上可自由滑动的套筒 B 运动。轮做纯滚动，其半径 $R=\frac{\sqrt{3}}{3}h$。图示瞬时，角 $\varphi=60^\circ$，$OG=\frac{4}{9}h$，杆 EG 垂 OD。

图示位置时，OD 杆、EG 杆和轮的角速度；OD 杆、EG 杆的角加速度。





速度分析

以B为动点，OD为动系。

$\vec{v}_a=\vec{v}_e+\vec{v}_r \Rightarrow v_e=v_a\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}v \Rightarrow \omega_{OD}=\frac{v_e}{OB}=\frac{3v}{4h}$

v　?　?

✓　✓　✓

$v_r=v_a\sin 30^\circ=\frac{1}{2}v$　(5)

EDG的速度瞬心如图所示。

$v_G=\omega_{OD}\cdot OG=\omega_{EG}\cdot GD \Rightarrow \omega_{EG}=\frac{v}{4h}$

$v_E=\omega_{EG}\cdot PE=\frac{v}{4h}\times\sqrt{3}\times\frac{8}{9}h=\frac{2}{9}\sqrt{3}v$

$\omega_E=\frac{v_E}{R}=\frac{2v}{3h}$

$\vec{a}_a=\vec{a}_e^n+\vec{a}_e^t+\vec{a}_r+\vec{a}_c$

0　$\omega_{OD}^2\cdot OB$　?　?　$2\omega_{OD}\cdot v_r$

✓　✓　✓　✓

向x轴投影： $0=a_e^t+a_c \Rightarrow a_e^t=-2\cdots$

$\Rightarrow \alpha_{OD}=\frac{a_e^t}{OB}=\frac{2\omega_{OD}\cdot v_r}{OB}=\frac{3\sqrt{3}v^2}{8h^2}$

以G为基点，分析E点加速度。

$\vec{a}_E=\vec{a}_G^n+\vec{a}_G^t+\vec{a}_{EG}^n+\vec{a}_{EG}^t$

?　$\omega_{OD}^2\cdot OG$　$\alpha_{OD}\cdot OG$　$\omega_{EG}^2\cdot EG$　?

✓　✓　✓　✓　✓

向y轴投影：

$0=-a_G^n\cdot\cos 30^\circ+a_G^t\cdot\cos 60^\circ+a_{EG}^n\cdot\cos 60^\circ+a\cdots$

$\Rightarrow a_{EG}^t=\frac{v^2}{36h}$　$\Rightarrow \alpha_{GE}=\frac{a_{EG}^t}{EG}=\frac{\sqrt{3}v^2}{36h}$

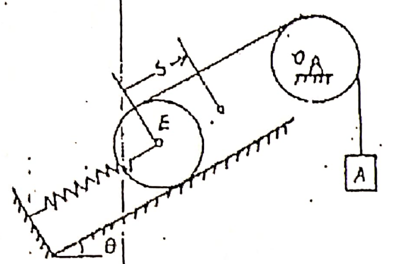
试题：　　　　　　班号：　　　　　　姓名：

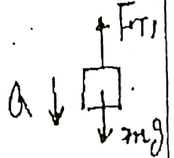
四、计算题（25 分）

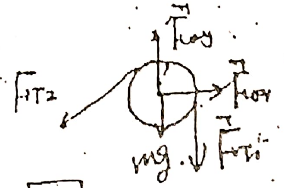
图示机构中，两轮均为均质轮，半径均为 R，质量均为 m，物块 A 质量为 $2m$，弹簧刚度为 k，系统在弹簧处于原长处由静止开始运动，轮 D 做纯滚动，斜面倾角 $\theta=30^\circ$。

求：1、轮心 E 上升距离 s 时，物块 A 的速度和加速度；

2、运动过程中轮 O 处的约束力。（以加速度或绳的拉力表示即可，不必整理）







$\sum F_x=0$: $F_{Ox}-F_{T2}\cdot\cos30^\circ=0 \Rightarrow F_{Ox}=$

$\sum F_y=0$: $F_{Oy}-mg-F_{T1}-F_{T2}\cdot\sin30^\circ$

$\Rightarrow F_{Oy}=mg+F_{T1}+\frac{1}{2}F_{T2}$

$T_1=0$. $\quad T_2=\frac{1}{2}\times2mv^2+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}mR^2\cdot\omega_O^2+\frac{1}{2}\times m v_E^2+\frac{1}{2}(\frac{3}{2}mR^2)\omega_E^2$ (8)

其中：$\omega_O=\frac{v}{R}$. $\quad v_E=\frac{v}{2}$. $\quad \omega_E=\frac{\frac{v}{2}}{R}=\frac{v}{2R}$

$\Rightarrow T_2=\frac{23}{16}mv^2$ (2)

又 $W=2mg\cdot2s-\frac{k}{2}s^2-mgs\sin30^\circ$ (3)

由动能定理：$T_2-T_1=W$. $\Rightarrow \frac{23}{16}mv^2=\frac{7}{2}mgs-\frac{k}{2}s^2$ (1)

$\Rightarrow v=\sqrt{\frac{8}{23}(7mgs-ks^2)}$ (2)

对(1)式两端求导：$\frac{23}{8}mv\cdot a=(\frac{7}{2}mg-ks)v$

$\Rightarrow a=\frac{8}{23m}(\frac{7}{2}mg-ks)=\frac{28}{23}g-\frac{8ks}{23m}$ (2)

分析重物A. $\quad 2mg-F_{T1}=2ma \Rightarrow F_{T1}=2m(g-a)$ (2)

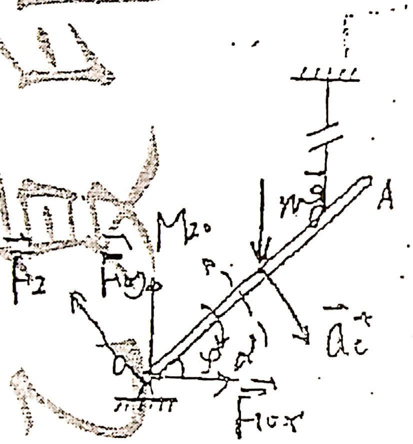
…学期末考试试题(B卷)　学号

试题：　　　　　　　　　　　班号：　　　　　　　　　　姓名：

五、计算题（15 分）

图示均质杆质量为 m，长度为 l，以细绳悬挂如图，角 $\varphi = 45^\circ$。求突然剪断细绳瞬时，杆的角加速度、轴 O 处的约束力。

（要求出动静法求解，用其他方法做不给分）



$\omega = 0.\quad \alpha \neq 0.$

$M_{IO} = \frac{1}{3} m l^2 \cdot \alpha.$ (2)　$F_I = m a_C^{\tau} = m\alpha \cdot \frac{l}{2}$ (1)

$\Sigma F_x = 0.\quad F_{Ox} - F_I \cdot \cos 45^\circ = 0$

$\Sigma F_y = 0.\quad F_{Oy} - mg + F_I \cdot \sin 45^\circ = 0$　(9)

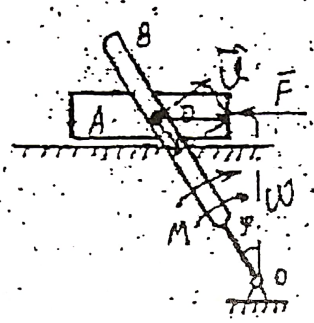
$\Sigma M_O(\vec{F}) = 0.\quad mg \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos 45^\circ - M_{IO} = 0$

$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{3\sqrt{2}\, g}{4\, l}.\quad F_{Ox} = \frac{3}{8} mg.\quad F_{Oy} = \frac{5}{8} mg$　(3)

六、计算题（10 分）

不计图示构件自重，各接触处光滑，在物块 A 上固结一销钉 D，此销钉套在杆 OB 的狭长槽中，滑块 A 上作用一水平力 F，杆 OB 上作用一大小未知的力偶，系统在图示位置平衡，角 $\varphi=30^\circ$，$OD=R$。用虚位移原理求平衡时的力偶矩 M。

（用其他方法做不给分）



$\omega\cdot OA=\overset{(4)}{v}\cdot\cos30^\circ \Rightarrow \omega=\frac{\sqrt{3}v}{2R}$

由 $-F\cdot v+M\omega=0$　(4)

$\Rightarrow M=\frac{2\sqrt{3}}{3}FR$.　(2)

哈工大 2011 年秋季学期

理论力学期末考试试题（A 卷）

班号	
姓名	

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
分数											

注意行为规范 遵守考场纪律

主管领导审核签字
[illegible]

一、是非判断题（把答案填入括号内。共 9 题，每题 1 分）

1、力沿某坐标轴的分力大小一定等于此力在该轴上的投影大小。（ X ）

2、平面汇交力系的平衡方程，选择的两个投影轴必须相互垂直。（ X ）

3、平面任意力系有 3 个独立的平衡方程，可列为三矩式（三个力矩方程），也可列为三个投影方程（即，三个方程全为力的投影方程）。（ X ）

4、摩擦角为全约束力和其约束处法线间的夹角。（ X ）

5、刚体上各点均做圆周运动，则此刚体必定为定轴转动。（ X ）

6、科氏加速度的大小在任何时刻、任意位置，都等于其牵连角速度大小与相对速度大小乘积的 2 倍。（ X ）

7、质点系的动量矩定理为 $\dfrac{dL_A}{dt}=\sum M_A(F_i^e)$，式中的点 A 只能是固定点或者是质心（质心可动）。（ X ）

8、质点系的虚位移与系统所受的力和时间有关。（ X ）

9、刚体定轴转动时，消除轴承附加动约束力的条件是，转轴为惯性主轴。（ X ）

二、填空题（把答案填入括号内。共 8 题，共 16 分）

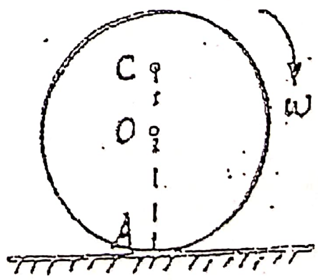
1、图示偏心圆轮质量为 m，半径为 R，圆心为 O，偏心距为 $OC=\dfrac{R}{2}$，对质心 C 的回转半径 $\rho=\sqrt{\dfrac{3}{2}}R$。圆轮沿水平面纯滚动，角速度为 ω。图示瞬时，C，O，A 位于同一铅直线上。则此瞬时，

圆轮的动量大小为 $p=$（ $\frac{3}{2}m\omega R$ ）；

圆轮对质心的动量矩大小为 $L_C=$（ $\frac{3}{2}mR^2\omega$ ）；

圆轮的动能为 $T=$（ $\frac{15}{8}mR^2\omega^2$ ）。

（每空 2 分）



题 1 图

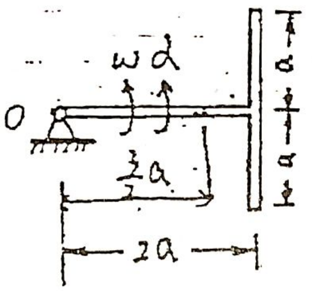
2、图示均质T型杆质量为m，其角速度为ω，角加速度为α，尺寸a均如图所示。把其惯性力向点O处简化，则其

切向惯性力大小为$F_{IR}^{t}=$（ $\frac{3}{2}m\alpha a$ ）；

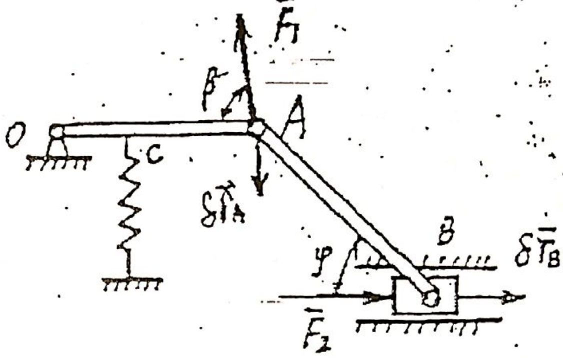
法向惯性力大小为$F_{IR}^{n}=$（ $\frac{3}{2}m\omega^2 a$ ）；

惯性力矩大小为$M_{IO}=$（ $\frac{11}{6}ma^2\alpha$ ）。

（每空2分）



题2图



题3图

3、图示平面机构处于静止平衡状态，其上作用有主动力$\bar{F}_1$，$\bar{F}_2$，C处为一铅直弹簧。OA杆长为l_1，且$OC=\frac{1}{3}OA$，AB杆长为l_2。若给出如图所示B处的虚位移δr_B，则

A点的虚位移大小为$\delta r_A=$（ $\delta r_B\cdot\frac{C\varphi}{S\varphi}$ ）；　　　　（2分）

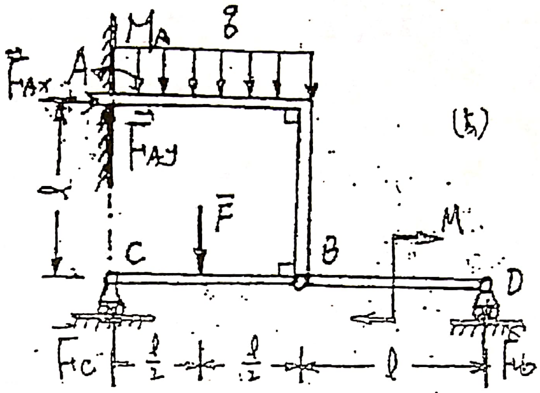
C点的虚位移大小为$\delta r_C=$（ $\frac{\delta r_B}{3}\cdot\frac{C\varphi}{S\varphi}$ ）；　　　　（1分）

OA杆的虚转角大小为$\delta\theta=$（ $\frac{\delta r_B}{l_1}\cdot\frac{C\varphi}{S\varphi}$ ）。　　　　（1分）

三、计算题（20分）

图示平面结构由三根无重杆 AB，CB，BD 组成，B 处用销钉连接三根杆，分布力 $q = 4\mathrm{kN/m}$，力偶矩 $M = 8\mathrm{kN \cdot m}$，铅直集中力 $F = 4\mathrm{kN}$，尺寸 $l = 2\mathrm{m}$。

求 C，D 处约束力和 A 处的约束力。



解：分析BC. 受力如图.

$\sum M_B(\vec{F}) = 0.\quad F_C \cdot l - F \cdot \frac{l}{2} = 0$

$\Rightarrow F_C = \frac{F}{2} = 2\mathrm{kN}.$

分析BD. 受力如图.

$\sum M_B(\vec{F}) = 0.\quad F_D \cdot l - M = 0$

$\Rightarrow F_D = \frac{M}{l} = 4\mathrm{kN}.$

方程：10分

答案：5分

分析整体. 受力如图

$\sum F_x = 0.\quad F_{Ax} = 0.$

$\sum F_y = 0.\quad F_C + F_D - F - q \cdot l + F_{Ay} = 0.$

$\Rightarrow F_{Ay} = 6\mathrm{kN}$

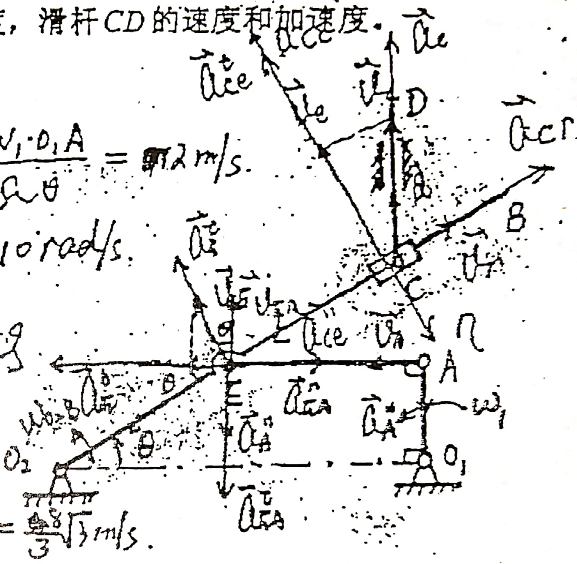
$\sum M_A(\vec{F}) = 0.\quad F_D \cdot 2l - M - F \cdot \frac{l}{2} - \frac{1}{2} l \cdot q \cdot l + M_A = 0$

$\Rightarrow M_A = 4\mathrm{kN \cdot m}.$

题目: 班号: 姓名:

四、计算题（20分）

图示平面机构，曲柄 O_1A 长为10cm，以匀角速度 $\omega_1=10\text{rad/s}$ 转动。EA 杆长为20cm。图示瞬时 $O_2E=EC=20\text{cm}$，$\theta=30^\circ$。滑块 C 套在摇杆 O_2B 上；滑杆 CD 处于铅直导槽中。求此瞬时，摇杆 O_2B 的角速度和角加速度，滑杆 CD 的速度和加速度。



解：(1) 速度分析 (10分)

$v_A = v_E \cdot \sin\theta \Rightarrow v_E = \frac{v_A}{\sin\theta} = \frac{\omega_1 \cdot O_1A}{\sin\theta} = 2\,m/s.$

(5) $\omega_{O_2B} = \frac{v_E}{O_2E} = \frac{v_E}{2O_1A} = \omega_1 = 10\,rad/s.$

分析C点. 动系 O_2B.

$v_e = \omega_{O_2B}\cdot O_2C = 4\,m/s$

(5) $v_a = \frac{v_e}{\cos30^\circ} = \frac{8}{3}\sqrt{3}\,m/s \Rightarrow v_{CD} = \frac{8}{3}\sqrt{3}\,m/s.$

$v_r = \frac{1}{2} v_a = \frac{4}{3}\sqrt{3}\,m/s.$

(2) 加速度分析 (10分) $v_{EA} = v_E\cdot\cos30^\circ \Rightarrow \omega_{EA} = \frac{v_{EA}}{EA} = \frac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{0.2} = 5\sqrt{3}\,rad/s.$

以A为基点. 分析E.

$$\vec a_E^n + \vec a_E^t = \vec a_A^n + \vec a_{EA}^n + \vec a_{EA}^t$$

(5) $\omega_{O_2B}^2\cdot O_2E$ $\quad\alpha_{O_2B}\cdot O_2E$ $\quad\omega_1^2\cdot O_1A$ $\quad\omega_{EA}^2\cdot EA$ $\quad\alpha_{EA}\cdot EA$

向ξ轴投影. $a_E^n\cos\theta + a_E^t\sin\theta = -a_{EA}^n \Rightarrow a_E^t = -30-20\sqrt{3}$

$\Rightarrow \alpha_{O_2B} = \frac{a_E^t}{O_2E} = \frac{-30-20\sqrt{3}}{0.2} = -150-100\sqrt{3}\ (rad/s^2) = -323.2\,rad/s^2$

分析C点: 动系 O_2B:

(5) $$\vec a_C = \vec a_{Ce}^n + \vec a_{Ce}^t + \vec a_{Cr} + \vec a_{CC}$$

$\omega_{O_2B}^2\cdot O_2C$ $\quad\alpha_{O_2B}\cdot O_2C$ $\quad ?$ $\quad 2\omega_{O_2B}\cdot v_r$

向η方向投影. $-a_C\cdot\cos\theta = -a_{Ce}^t - a_{CC}$

$\Rightarrow a_C = -\frac{120}{3}\sqrt{3} - \frac{80}{3} = -95.9\,m/s^2.$

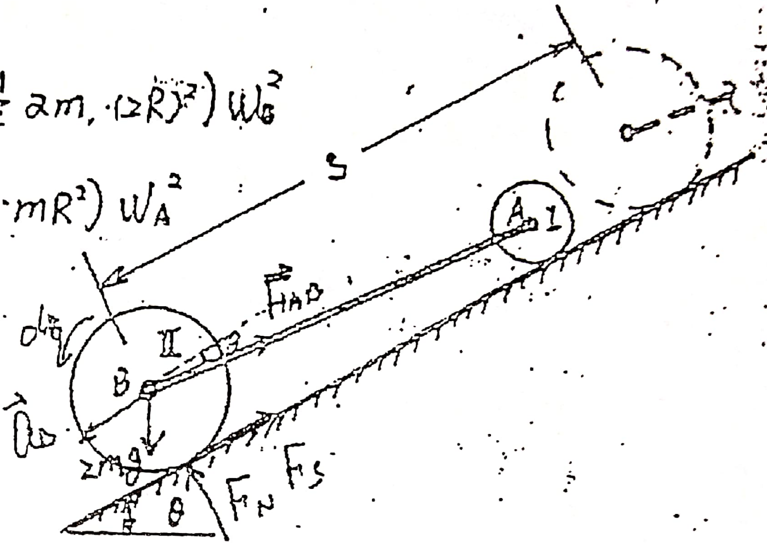
五、计算题（20分）

均质轮Ⅰ质量为m，半径为R；均质轮Ⅱ质量为$2m$，半径为$2R$；杆AB长为$6R$，自重不计，系统由静止沿倾角$\theta=30^\circ$的粗糙斜面开始运动，两轮均做纯滚动，不计滚动摩阻。

求轮Ⅱ轮心B运动距离为s时，轮Ⅱ轮心B的速度和加速度，杆AB的内力，斜面对轮Ⅱ的约束力。

解：$T_1=0$.

$$T_2=\frac{1}{2}\cdot 2m\cdot v_B^2+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}2m\cdot(2R)^2\right)\omega_B^2$$
$$+\frac{1}{2}m\cdot v_A^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot mR^2\right)\omega_A^2$$



其中：$\omega_B=\frac{v_B}{2R}$.

$\omega_A=\frac{v_A}{R}$.

10分

$$\Rightarrow T_2=\frac{9}{4}mv_B^2$$

又 $W=3mgs\cdot\sin\theta$

由：$T_2-T_1=W$.　得：$\frac{9}{4}mv_B^2=3mgs\sin\theta$.　(1)

解得：$v_B=\sqrt{\frac{4}{3}gs\sin\theta}=\sqrt{\frac{2}{3}gs}$

对(1)式两端求导：$a_B=\frac{2}{3}g\sin\theta=\frac{1}{3}g$

分析轮Ⅱ.　$-F_s+2mg\cdot\sin\theta-F_{AB}\cos\beta=2m a_B$.　　$\cos\beta=\frac{\sqrt{35}}{6}$

$F_s\cdot 2R=\frac{1}{2}(2m\cdot(2R)^2)\cdot\alpha_B$　　$\sin\beta=\frac{1}{6}$.

10分

$\alpha_B=\frac{a_B}{2R}$

$\Rightarrow$　$F_N=2mg\cdot\cos\theta+F_{AB}\cdot\sin\beta$

$F_s=\frac{2}{3}mg\sin\theta$　　$F_{AB}=\boxed{\frac{2}{\sqrt{35}}}mg.0$　　$F_N=\boxed{\sqrt{37}\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{35}}}mg$.

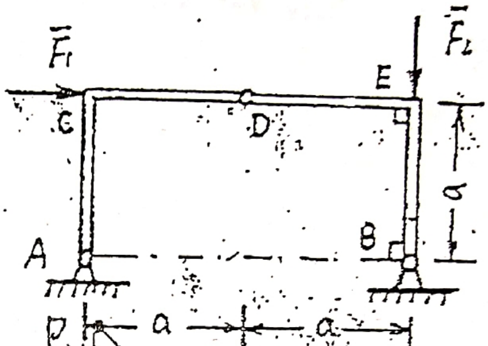
$=\frac{1}{3}mg$

六、计算题（15 分）

注意：只有理论力学Ⅲ（64 学时）的同学做此题，不做七题。其他同学不做此题。

注意：要求虚位移原理做此题，用其他方法做不给分。

不计图示平面三铰拱自重，C 处作用水平力 $\vec{F}_1$，E 处作用铅直力 $\vec{F}_2$，尺寸 a 如图。用虚位移原理求支座 A 处的约束力。



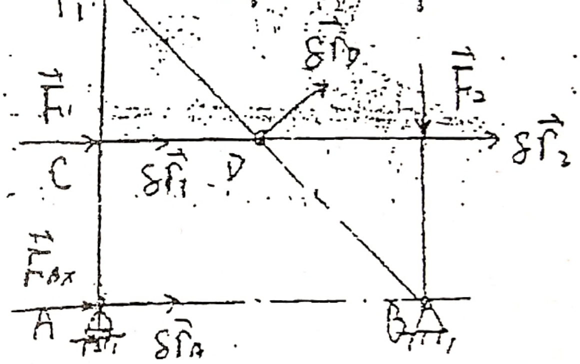
解：解除水平约束

$\delta r_A = 2\delta r_1$

虚功方程：

$F_{Ax}\cdot\delta r_A + F_1\cdot\delta r_1 = 0$

$\Rightarrow F_{Ax} = -\dfrac{F_1}{2}$



解除铅垂方向约束

瞬心为B

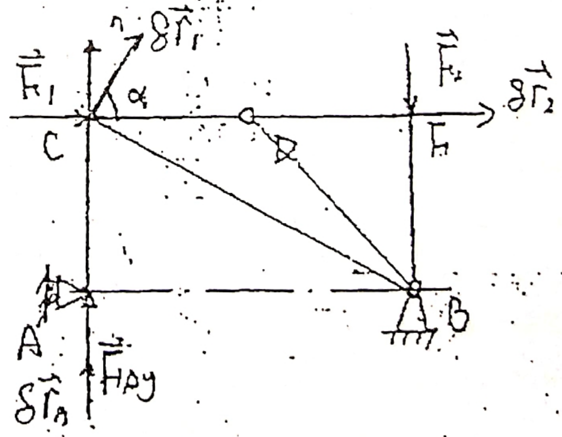
$\dfrac{\delta r_1}{BC} = \dfrac{\delta r_A}{AB} \Rightarrow \delta r_1 = \dfrac{\sqrt{5}}{2}\delta r_A$

虚功方程：

$F_{Ay}\cdot\delta r_A + F_1\cdot\delta r_1\cdot\cos\alpha = 0$

$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow F_{Ay} = -\dfrac{1}{2}F_1$



计算题（15 分）

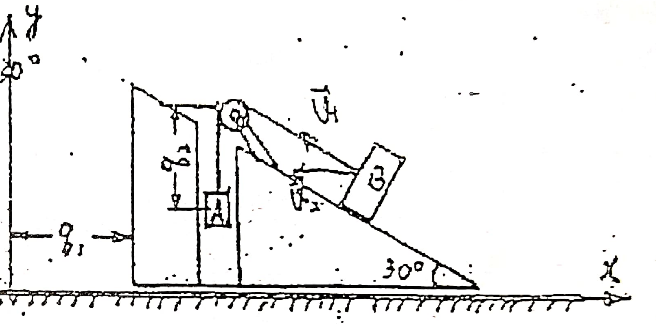
注意：理论力学Ⅲ（64 学时）的同学不做此题，其他同学做此题。

注意：要求用拉格朗日方程做此题，用其他方法做不给分。

图示三角块质量为 $3m$，物块 A，B 的质量均为 m，斜面倾角为 30°，各接触处光滑，不计定滑轮的质量，系统由静止开始运动，绳索不可伸长。以图示的 q_1，q_2 为广义坐标，用拉格朗日方程求三角块和物块 A 的运动方程。

解：$T=\frac{1}{2}\cdot 3m\cdot\dot q_1^2+\frac{1}{2}m\cdot(\dot q_1^2+\dot q_2^2)+\frac{1}{2}m(\dot q_1^2+\dot q_2^2-2\dot q_1\dot q_2\cos 30^\circ)$

$=\frac{5}{2}\dot q_1^2 m+m\dot q_2^2-\dot q_1\dot q_2 m\cos 30^\circ$



以滑轮处为零势能位置

$V=-\frac{1}{2}mgq_2$

动势 $L=T-V=\frac{5}{2}\dot q_1^2 m+m\dot q_2^2-\dot q_1\dot q_2 m\cos 30^\circ+\frac{1}{2}mgq_2$

因 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0$

得：$\begin{cases}\frac{37}{3}\sqrt{3}\ddot q_1-g=0\\ 37\ddot q_2-10g=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ddot q_1=\frac{\sqrt{3}}{37}g\\ \ddot q_2=\frac{10}{37}g\end{cases}$

$\Rightarrow q_1=\frac{\sqrt{3}}{74}gt^2 \qquad q_2=\frac{5}{37}gt^2$

哈工大 2011 年秋季学期

理论力学期末考试试题（B 卷）

班号	
姓名	

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
分数											

注意行为规范

遵守考场纪律

主管领导审核签字

一、是非判断题（把答案填入括号内。共 9 题，每题 1 分）

1、力沿某坐标轴的分力大小不一定等于此力在该轴上的投影大小。（ ✓ ）

2、平面汇交力系的平衡方程，选择的两个投影轴不一定相互垂直。（ ✓ ）

3、平面任意力系有 3 个独立的平衡方程，可列为三矩式（三个力矩方程），不可列为三个投影方程（即，三个方程全为力的投影方程）。（ ✓ ）

4、摩擦角为物体处于临界平衡状态时，全约束力和其约束处法线间的夹角。（ ✓ ）

5、刚体上各点均做圆周运动，则此刚体不一定为定轴转动。（ ✓ ）

6、科氏加速度的大小在某时刻、某位置，等于其牵连角速度大小与相对速度大小乘积的 2 倍。（ X ）

7、质点系的动量矩定理为 $\frac{d\overline{L}_A}{dt}=\sum\overline{M}_A(\overline{F}_i^e)$，式中的点 A 可以是固定点或者是质心（质心可动）。（ X ）

8、质点系的虚位移与系统所受的力和时间无关。 ✓

9、刚体定轴转动时，消除轴承附加动约束力的条件是，转轴为中心惯性主轴。（ ✓ ）

二、填空题（把答案填入括号内。共 3 题，共 16 分）

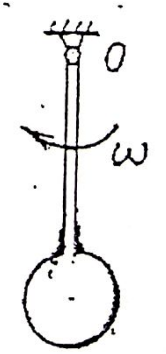
1、图示均质杆质量为 m，长度为 $4R$，其端点焊接一质量为 m、半径为 R 的均质圆轮，杆的角速度为 ω。则图示瞬时，

系统的动量大小为 $p=$（ $7mR\omega$ ）；

系统对点 O 的动量矩大小为 $L_O=$（ $\frac{185}{6}mR^2\omega$ ）；

系统的动能为 $T=$（ $\frac{185}{12}mR^2\omega^2$ ）。

（每空 2 分）



题 1 图

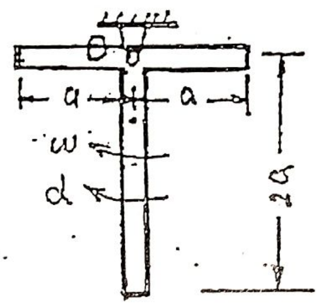
2、图示均质T型杆质量为m，其角速度为ω，角加速度为α。尺寸a均如图所示。把其惯性力向点O处简化，则其

切向惯性力大小为$F_{IR}^{t}=$（ $\frac{1}{2}ma\alpha$ ）；

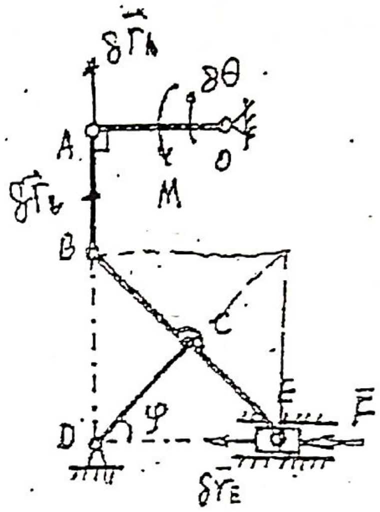
法向惯性力大小为$F_{IR}^{n}=$（ $\frac{1}{2}ma\omega^2$ ）；

惯性力矩大小为$M_{IO}=$（ $\frac{5}{6}ma^2\alpha$ ）。

（每空2分）



题2图



题3图

3、图示平面机构处于静止平衡状态，其上作用有主动力偶矩M和主动力F，杆长$OA=AB=BC=CE=CD=l$，$\varphi=45^\circ$。若给出如图所示E处的虚位移δr_E，则

B点的虚位移大小为$\delta r_B=$（ δr_E ）； （2分）

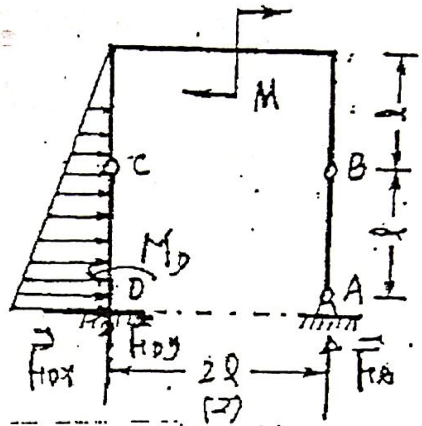
A点的虚位移大小为$\delta r_A=$（ δr_E ）； （1分）

OA杆的虚转角大小为$\delta\theta=$（ $\delta r_E/l$ ）。 （1分）

三、计算题（20 分）

图示平面结构由三根无重杆 AB，BC，CD 组成，三角形分布力 $q=6\text{kN/m}$，力偶矩 $M=8\text{kN}\cdot\text{m}$，尺寸 $l=4\text{m}$。

求 A，D 处的约束力。

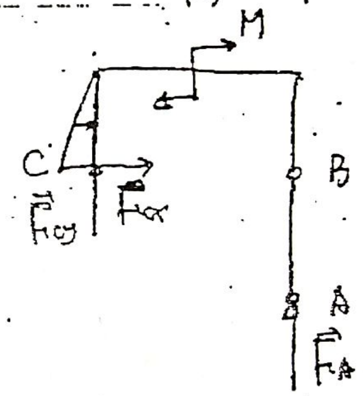


解：分析ABC，受力如图(1)所示.

$$\Sigma M_C(\vec{F})=0 \quad F_A\cdot 2l-M-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}ql\right)l=0$$

$$\Rightarrow F_A=2\text{kN}.$$

分析整体，受力如图(2)所示.



(2)

$$\Sigma F_x=0. \quad F_{Dx}+\frac{1}{2}\times q\times 2l=0$$

$$\Sigma F_y=0. \quad F_{Dy}+F_A=0;$$

$$\Sigma M_D(\vec{F})=0. \quad F_A\cdot 2l-M-\frac{1}{2}q\cdot(2l)\cdot\frac{2}{3}l+M_D=0$$

$$\Rightarrow F_{Dx}=-24\text{kN}. \quad F_{Dy}=-2\text{kN}.$$

$$M_D=56\text{kN}\cdot\text{m}.$$

结果：4

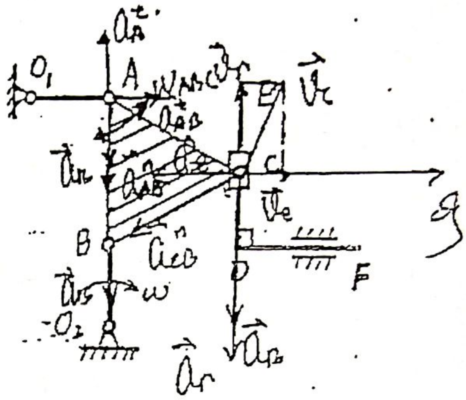
方程：4×3=12

图：4

四、计算题（20分）

图示平面机构，杆 O_1A 和 O_2B 的长度均为 R，等边三角形板 ABC 的边长为 $2R$，直角弯杆 EDF 穿过套筒 C，DF 段置于水平槽内。杆 O_1A 水平，杆 O_2B 铅直，且 A，B，O_2 在同一铅直线上。杆 O_2B 以匀角速度 ω 转动。

求此瞬时，杆 EDF 的速度和加速度。



解：1. 速度分析.

分析ABC板. 瞬心为A点.

由：$v_B = \omega \cdot R = \omega_{ABC} \cdot 2R$

得：$\omega_{ABC} = \frac{\omega}{2}$　　(5)

$v_C = \omega_{ABC} \cdot AC = \omega R$

分析C点. 动系 DEF. 速度合成图如图所示.

$v_e = v_C \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}\omega R \Rightarrow v_{EDF} = \frac{1}{2}\omega R$.　(5)

2. 加速度分析. 分析ABC板. 以B为基点.

$\vec{a}_A^n + \vec{a}_A^t = \vec{a}_B + \vec{a}_{AB}^n + \vec{a}_{AB}^t \Rightarrow$ 合成图如图所示.

0　　$\Rightarrow a_{AB}^t = 0 \Rightarrow \alpha_{ABC} = 0$

(5)

$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^n$　　(1)

以C为动点，动系 EDF.

$a_C = \vec{a}_e + \vec{a}_r$　　(2)

由(1)(2)得：　$\vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^n = \vec{a}_e + \vec{a}_r$　　(5)

向x轴投影：$-a_e = -a_{CB}^n \cdot \cos 30^\circ = -\omega_{ABC}^2 \cdot 2R = -\frac{\omega^2}{2}R$

$\Rightarrow a_{EDF} = a_e = \frac{\omega^2}{2}R$.

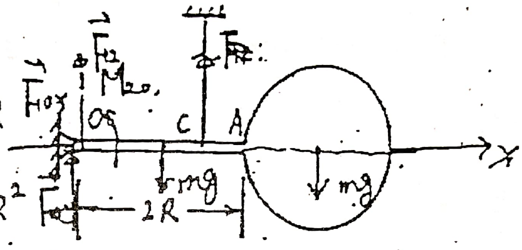
试 题:　　　　　　　　　　　　　班号:　　　　　　　　姓名:

五、计算题（20分）

图示均质杆OA质量为m，长度为$2R$，在A端焊接一质量为m，半径为R的均质轮，在$OC=\frac{3}{2}R$处用一绳悬挂处于水平平衡位置。系统位于铅垂面内，现突然剪断绳子，求：(1) 杆在水平位置时，OA杆的角速度、角加速度、O处的约束力；(2) 杆在铅垂位置时，OA杆的角速度、角加速度、O处的约束力。

解：(1) 水平位置. $\omega=0$.

定轴转动微分方程:



$$J_O\cdot\alpha = mg\cdot R + mg\cdot 3R$$

其中: $J_O=\frac{1}{3}m(2R)^2+\frac{1}{2}mR^2+m(3R)^2=\frac{65}{6}mR^2$ (5)

$$\Rightarrow \alpha=\frac{24g}{65R}.$$

质心位置. $x_C=\frac{m\cdot R+m\cdot 3R}{2m}=\frac{3}{2}R$.

$\Rightarrow a_C^n=0.\quad a_C^t=\alpha\cdot x_C=\frac{36}{65}g$

$\Rightarrow F_{I1}=2m\cdot a_C^t=\frac{72}{65}mg.\quad M_{IO}=J_O\alpha=4mgR.$ (5)

$\Sigma F_x=0.\quad F_{Ox}=0,\quad \Sigma F_y=0.\quad F_{Oy}-2mg+F_{I1}=0\Rightarrow F_{Oy}=\frac{58}{65}mg.$

(2) 铅垂位置.

$T_1=0.\quad T_2=\frac{1}{2}J_O\omega^2=\frac{65}{12}mR^2\omega^2.\quad W=mg\cdot R+mg\cdot 3R=4mgR$ (5)

因 $T_2-T_1=W \Rightarrow \frac{65}{12}mR^2\omega^2=4mgR\Rightarrow \omega^2=\frac{48}{65}\frac{g}{R}.$

定轴转动微分方程: $J_O\alpha=0\Rightarrow\alpha=0.$

$F_{I2}=2m\cdot a_C^n=\frac{144}{65}mg.$

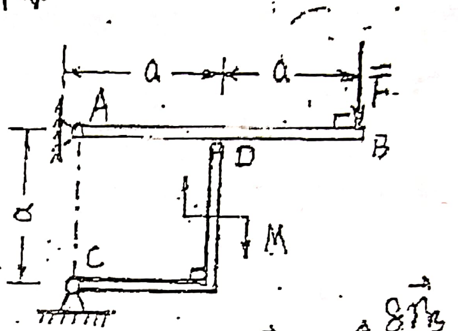
$\Sigma F_x=0.\quad F_{Ox}=0.\quad \Sigma F_y=0.\quad F_{Oy}-F_{I2}-2mg=0.\Rightarrow F_{Oy}=\frac{274}{65}mg.$ (5)

六、计算题（15 分）

注意：只有理论力学Ⅲ（64 学时）的同学做此题，不做七题。其他同学不做此题。

注意：要求虚位移原理做此题，用其他方法做不给分。

不计图示平面结构自重，B 处作用一铅直力 F，CD 杆上作用一矩为 M 的力偶，尺寸 a 如图。用虚位移原理求支座 C 处的水平方向约束力。



解：解除支座C处的水平约束力 如图.

分析CD，绕点A转动.

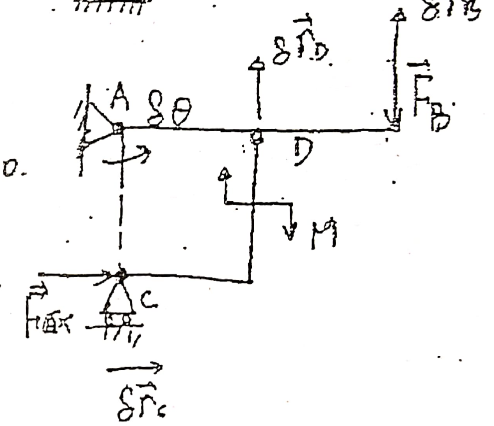
$\delta\theta = \dfrac{\delta r_C}{a}$　　$\delta r_D = \delta\theta \cdot a = \delta r_C$

$\delta r_B = 2\delta r_D = 2\delta r_C$.　(1)

虚功方程为：

(5)

$-M\cdot\delta\theta + F_{Ax}\cdot\delta r_C - F\cdot\delta r_B = 0$



$\Rightarrow F_{Ax} = \dfrac{M}{a} + 2F$　(1)

试 题：　　　　　　　　班号：　　　　　　　　姓名：

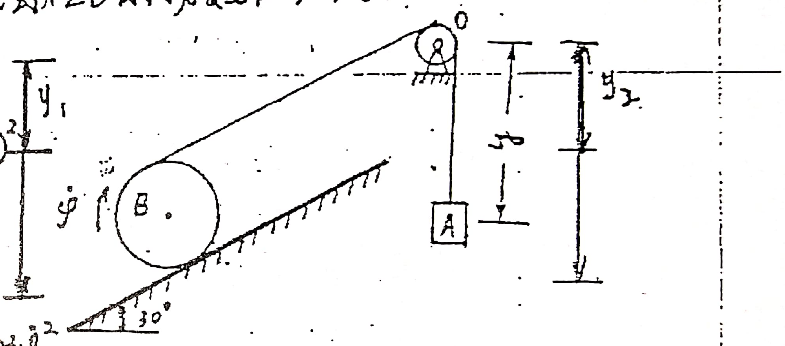
七、计算题（15 分）

注意：理论力学 III（64 学时）的同学不做此题，其他同学做此题。

注意：要求用拉格朗日方程做此题，用其他方法做不给分。

图示均质圆柱 B 的质量为 $3m$，半径为 R，物块 A 的质量为 m，斜面倾角为 30°，各接触处光滑，不计定滑轮的质量，绳索不可伸长。以图示的 y，φ 为广义坐标，用拉格朗日方程求圆柱 B 的角加速度和物块 A 的加速度。

解：设物块A初始位置为 y_2，圆柱B的初始位置为 y_1



系统动能：

$$T=\frac{1}{2}m\dot{y}^2+\frac{1}{2}\cdot 3m(\dot{y}-\dot{\varphi}R)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3mR^2\cdot\dot{\varphi}^2$$

$$=2m\dot{y}^2-3m\dot{y}\dot{\varphi}R+\frac{9}{4}mR^2\dot{\varphi}^2 \quad (3)$$

设O点为零势能位置，则系统势能

$$V=-mgy-3mg\left(y_1-((y-y_2)-\varphi R)\cdot\sin 30^\circ\right)$$

$$=\frac{1}{2}mgy-\frac{3}{2}mg\varphi R-3mgy_1-\frac{3}{2}mgy_2 \quad (3)$$

$$\Rightarrow L=T-V=2m\dot{y}^2-3m\dot{y}\dot{\varphi}R+\frac{9}{4}mR^2\dot{\varphi}^2-\frac{1}{2}mgy+\frac{3}{2}mg\varphi R+3mgy_1+\frac{3}{2}mgy_2 \quad (3)$$

拉格朗日方程：$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0$ 得： (4)

$$\begin{cases}4m\ddot{y}-3m\ddot{\varphi}R-\frac{1}{2}mg=0\\ 2m\ddot{y}-3mR\ddot{\varphi}+mg=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ddot{y}=\frac{3}{4}g\\ \ddot{\varphi}=\frac{5g}{6R}\end{cases} \quad (2)$$

哈工大 2010 年春季学期

理　论　力　学　试　题（A 卷）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
分数											

卷面共 85 分，平时成绩为 15 分

一、判断题（5 个小题，每小题 1 分）在括号中填入 √ 或 × 判断各题正误

1、两个分力的合力的大小不一定大于其中任意一个分力的大小。（　　）

2、物体只在两个力作用下不一定平衡。（　　）

3、只有在临界状态下，静滑动摩擦力的大小等于静滑动摩擦因数与正压力的乘积。（　　）

4、刚体平移时，其上各点的轨迹相同，某瞬时其上各点的速度相同，加速度也相同。（　　）

5、只要点做匀速运动，其总不受力。（　　）

二、填空题（4 个小题，共 16 分）

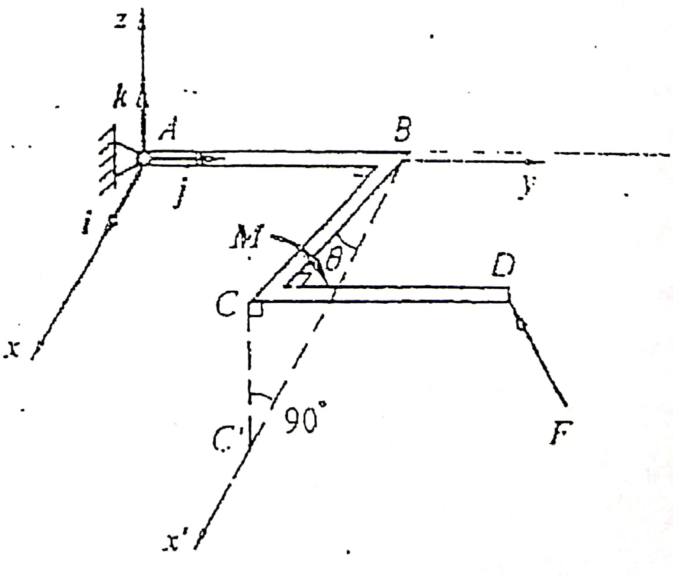
1、某空间力系其各力作用线都垂直于某一固定平面，其最多独立平衡方程的个数为（　　）个。（2 分）

A、3 个　　B、4 个　　C、5 个　　D、6 个

2、某空间力系其各力作用线都平行于某一固定平面，其最多独立平衡方程的个数为（　　）个。（2 分）

A、3 个　　B、4 个　　C、5 个　　D、6 个

3、图示位于同一平面内的无重直角弯杆 $ABCD$，平面 $ABCD$ 与平面 Axy 的夹角为 $\theta=45^\circ$，且 $AB=CD=1\text{m}$，$BC=\sqrt{2}\text{m}$，在点 D 作用一力 $\bar{F}=-1\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}$，单位为 N；沿 BC 杆作用一力偶，其矩为 $M=\sqrt{2}\text{N}\cdot\text{m}$，方向如图所示，则此力系向点 A 简化的主矢和主矩为　　（6 分）

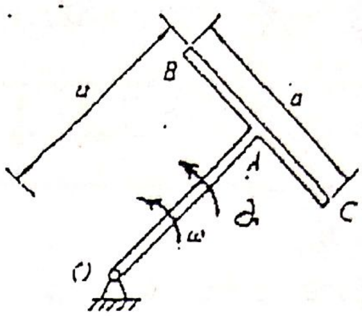


$\bar{F}_R'=$（　　）$\bar{i}+$（　　）$\bar{j}+$（　　）$\bar{k}$；

$\overline{M}_A=$（　　）$\bar{i}+$（　　）$\bar{j}+$（　　）$\bar{k}$。

试题：

4、图示直角 T 形均质杆，OA 为其对称轴，杆质量皆为 m，长度皆为 a，绕轴 O 定轴转动，角速度为 ω，角加速度为 α。则该系统的



动量 $p=$（　　　　　　）　　　　（1 分）

对轴 O 的动量矩 $L_O=$（　　　　）（1 分）

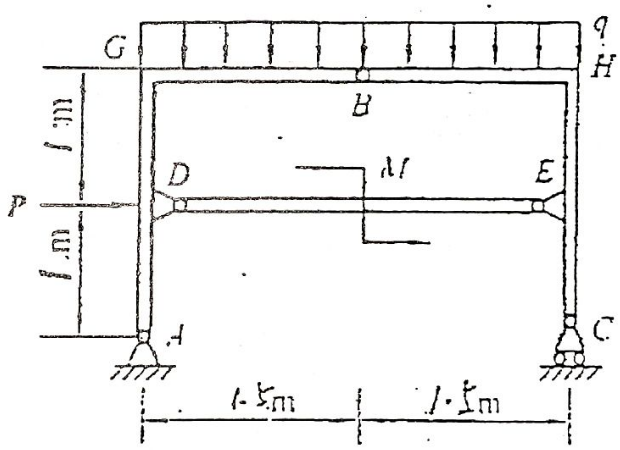
动能 $T=$（　　　　　）．　　　（1 分）

惯性力向轴 O 简化的主矢为（　　　　　　　　　　）　（2 分）

惯性力向轴 O 简化的主矩为（　　　　　　　　　　）　（1 分）

、计算题（14 分）

图示框架由 3 个刚体铰接而成，不计各构件自重，水平载荷 $P=100\text{kN}$，垂均布载荷 $q=10\text{kN/m}$，力偶矩 $M=25\text{kN}\cdot\text{m}$，尺寸如图。求 A、C、D 处的约力。



1、计算题（20 分）

曲柄OA

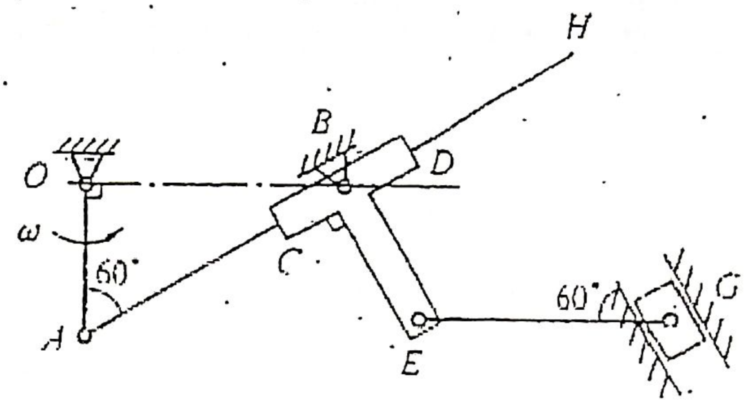
图示平面机构中，曲柄$OA = R$，套筒长$BE = R$，以匀角速度ω绕轴O转动，H杆可在 T 形套筒CDE中自由滑动，图示瞬时，$OA \perp OB$，$OB // EG$。求此时：

1、杆AH与套筒CDE的角速度；

2、杆AH相对套筒的速度；

3、滑块G的速度；

4、T 形套筒CDE的角加速度。



试题：

1、计算题（20 分）

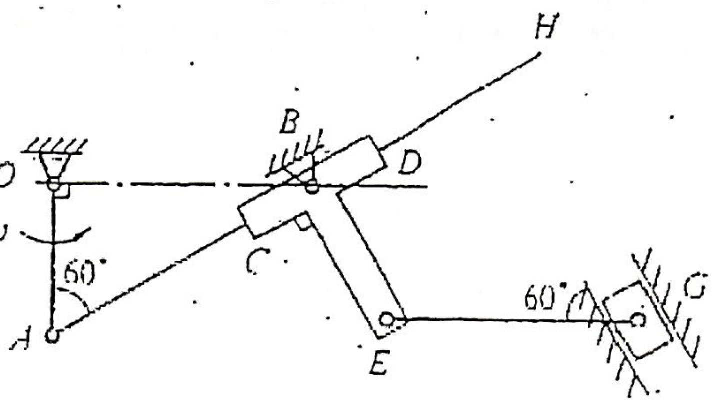
图示平面机构中，曲柄 $OA=R$，套筒长 $BE=R$，曲柄OA 以匀角速度 ω 绕轴 O 转动，H 杆可在 T 形套筒 CDE 中自由滑动，图示瞬时，$OA\perp OB$，$OB\parallel EG$。求此时：

1、杆 AH 与套筒 CDE 的角速度；

2、杆 AH 相对套筒的速度；

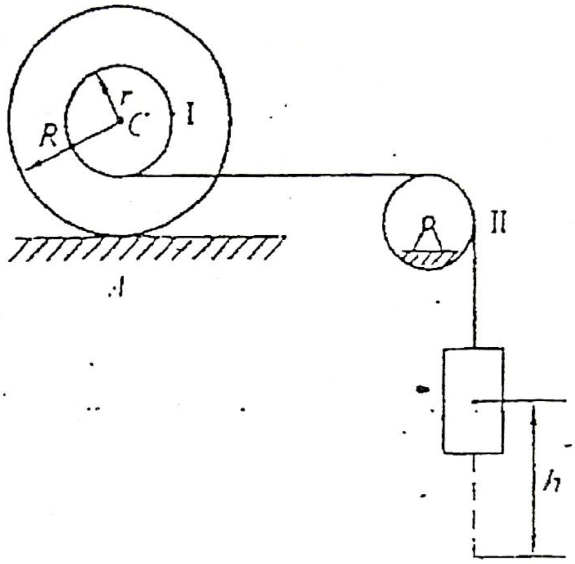
3、滑块 G 的速度；

4、T 形套筒 CDE 的角加速度。



五、计算题（20 分）

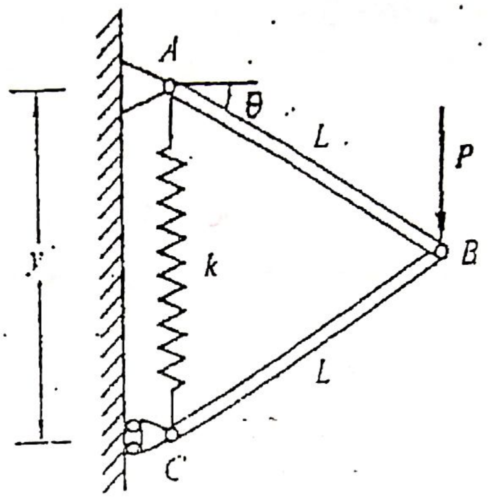
质量为 m 的鼓轮 I 在水平面上做纯滚动，其质心位于轮心 C，半径 $R=2r$，对其质心轴 C 的转动惯量为 $J_C=mr^2$。在半径为 r 的圆上绕有一无重细绳，水平引出，跨过不计质量的小滑轮 II，挂一质量也为 m 的重物。系统由静止开始运动，求重物下落高度 h 时的速度、加速度、绳的拉力、水平面对轮的摩擦力。



六、计算题（10 分）

不计图示平面机构的自重，杆长 $AB = BC = L$，在 AC 间连一刚度为 k 的弹簧，弹簧原长为 L_0，在点 B 作用一铅直力 $\overline{P}$，用虚位移原理求机构在图示位置平衡时 AC 间的距离 y。

（用其他方法做不给分）



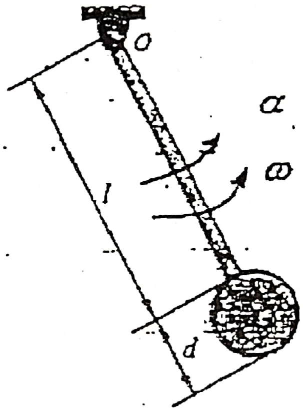
2010 年 秋 季学期

理论力学期末试题

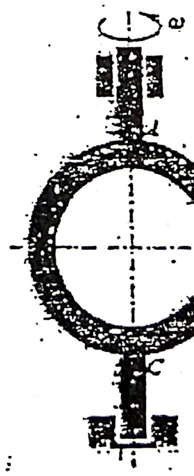
题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
分数											

一、正确求解下列各题（每题 10 分）

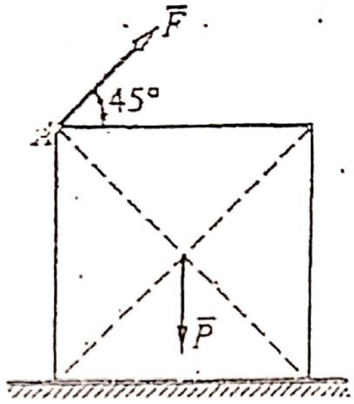
1．单摆由长为 l 的均质细杆和直径为 d 的均质圆盘固连而成，杆和圆盘的质量均为 m。若图示瞬时单摆绕 O 轴转动的角速度为 ω，角加速度为 α，试将其惯性力系向转轴 O 简化，求出主矢和主矩，并在图中标明。



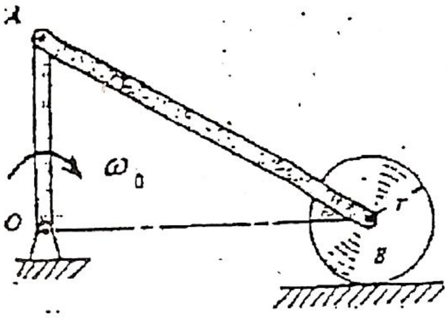
2．图示圆环半径为 R，以角速度 ω 绕铅直轴 AC 自由转动，圆环对 AC 轴的转动惯量为 J，在圆环中的点 A 放置一质量为 m 的小球。设小球由于扰动离开 A 点沿圆环向下运动，忽略小球与圆环间的摩擦，求小球到达 B 点时圆环的角速度和小环的速度。



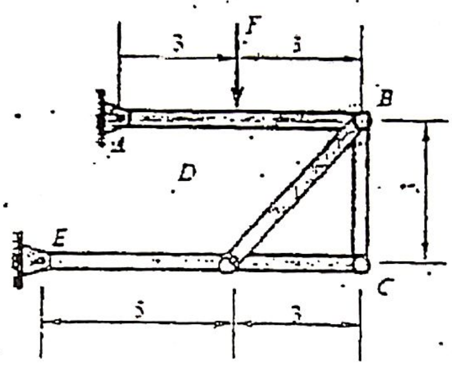
3．均质正方形薄板重P，置于铅垂面内，薄板与地面间的摩擦因数f_s=0.5，在A处作用一力F，试求使薄板静止不动力F的最大值



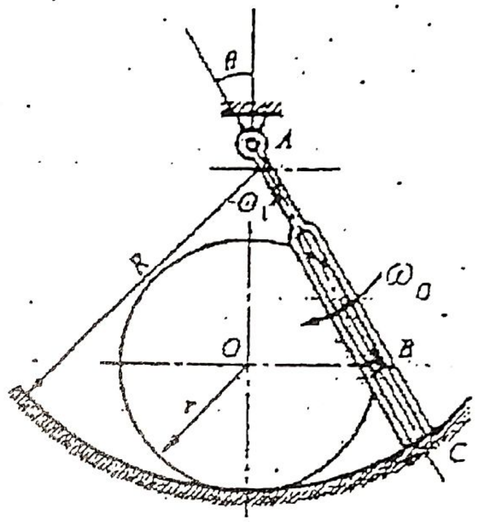
4. 曲柄 OA 绕 O 轴转动，通过连杆 AB 带动圆盘 B 在水平面做纯滚动。已知各构件的质量 $m_{OA}=m_1$，$m_{AB}=0$，$m_B=m_2$，机构尺寸 $OA=3r$，$AB=6r$。在图示位置曲柄 OA 铅直，角速度为 ω_0，求当 OA 杆转到水平位置时的角速度。



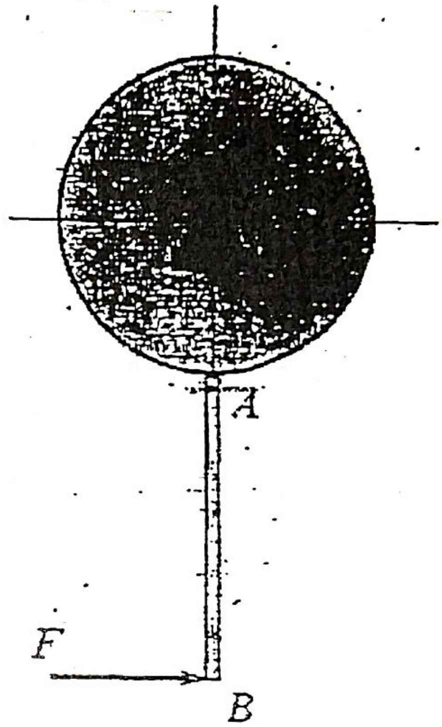
二、构架尺寸如图所示（尺寸单位为 m），载荷 $F=60\text{kN}$，不计自重，求铰链 A、E 处的约束力（15 分）。



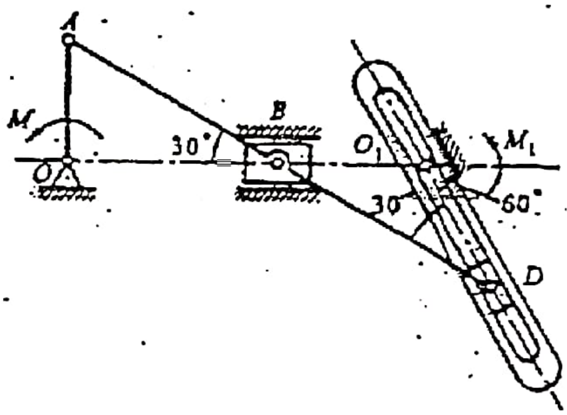
三、拨叉AC以匀角速度ω_0绕铰链A转动，并通过其滑槽拨动圆柱体上的销子使半径为r的圆柱体沿半径为R的圆弧表面做纯滚动。已知：ω_0=2 rad/s，r=100mm，R=250mm，在图示瞬时，θ=30°，B点与圆柱体中心O在同一水平线上，求此时O点的速度和加速度（15分）



四、均质圆盘质量为 m，半径为 r，可绕 O 轴转动。均质杆 AB 长为 l，质量也为 m，用铰链 A 与圆盘的边缘相连。初始系统静止，AB 杆铅直。今在 AB 杆的 B 端作用一水平力 F，不计摩擦，试求当力 F 作用的瞬时圆盘与 AB 杆的角加速度，以及铰链 O 处的水平约束力（15分）。



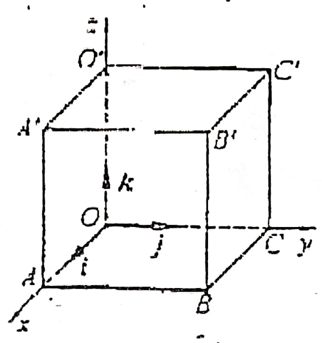
五、图示曲柄连杆机构中，连杆ABD分别用铰链与滑块B、D相连。已知：曲柄长OA=50mm，在图示位置时，连杆ABD与水平线间成 30° 角，摇杆与水平线间成 60° 角，距离O_1D=70mm。不计杆重及摩擦，求在此位置平衡时，作用在曲柄和摇杆上的力偶M和M_1之间应满足的关系。



2007 年春试题

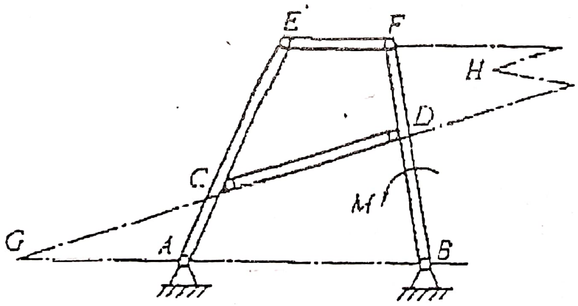
一、填空题(共 36 分)

1. 图示边长为 a 的正方体，若力系向点 B 和 B' 简化皆为一合力，向点 A 简化为一主矢和主矩，且主矩为 $M_A = M_A i$，则该力系合力为______；用矢量解析表达式给出力系向点 C 简化的主矢和主矩为______。(9 分)



题 1 图

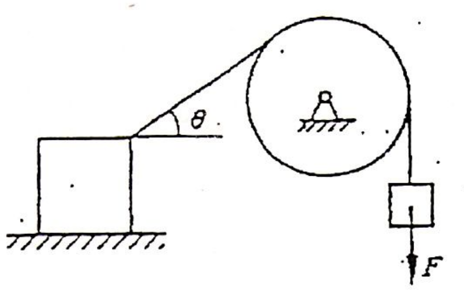
2. 图示平面构架，不计各杆件自重，在 BDF 杆上作用一矩为 M 的力偶，则 B 处约束力的作用线______。(9 分)



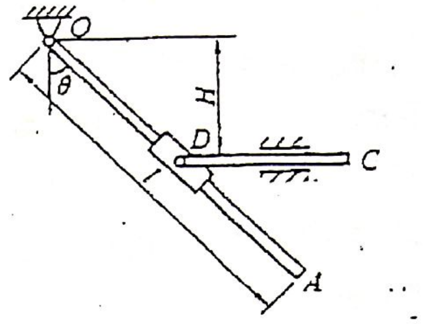
题 2 图

3. 图示系统处于平衡状态，力 F，角 θ，各部分尺寸皆为已知，问：能否求出物块和水平接触面的摩擦力______；能否求出物块和水平接触面的摩擦因数______；系统是静定问题还是超静定问题______。(9 分)

4. 图示系统中，A 点的虚位移 δr_A 和 C 点的虚位移 δr_C 的比值 $\dfrac{\delta r_A}{\delta r_C}$ = ________，在图中给出 A、D、C 点的虚位移方向。(9 分)

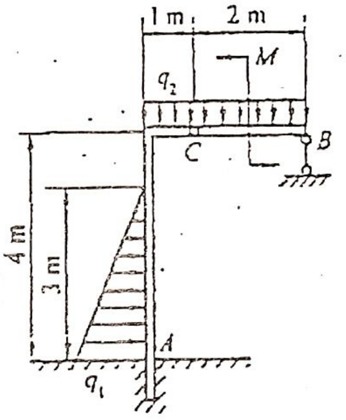


题3图



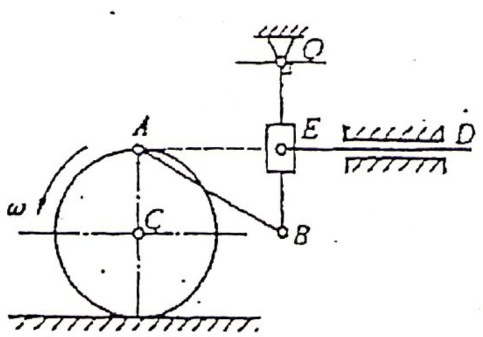
题4图

二、图示平面结构中，均布荷载 $q_1 = 3\ \mathrm{kN/m}$，$q_2 = 0.5\ \mathrm{kN/m}$，力偶矩 $M = 2\ \mathrm{kN \cdot m}$，不计各构件自重，尺寸如图所示。求：固定端 A 处和支座 B 处的约束力。(20 分)



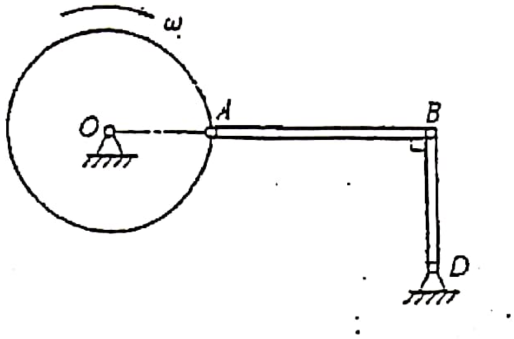
题二图

三、图示平面机构，半径为 R 的圆轮以匀角速度 ω 在水平面上做纯滚动，连杆 AB 的长度为 $2R$，摇杆 OB 的长度也为 $2R$，滑块 E 可在 OB 杆上滑动。图示瞬时，AC、OB 处于铅垂位置，$OE = R$，A、E、D 三点在同一水平线上。求：此时 ED 杆的速度和加速度。(22 分)



题三图

四、图示机构位于铅垂面内，均质细杆 AB、BD 单位长度的质量为 ρ，圆盘以匀角速度 ω 绕轴 O 转动，圆盘半径为 R，AB 杆长为 $2R$，BD 杆长为 R。在图示位置时，求：杆 AB 两端 A 与 B 处的约束力。(22分)



题四图

2007年春试题答案与提示

点评与其他：此套题填空题中1、2题偏难，4题需要通过并不很简单的计算。静力学、运动学计算题难度一般。而动力学计算题（四题）有些偏，与大部分常规计算题不同，运动学分析计算量大，而且用动静法计算比较简单，用其他方法不怎么合适。所以此套题属于难题系列。

一、1. $F_R = \frac{M_A}{a}k$；$F_R' = \frac{M_A}{a}k$，$M_C = -M_Aj$

提示：力系向点 B 和点 B' 简化，均为一合力（以 F_R 表示）；则此合力只能通过 B、B' 两点，即沿着 z 轴方向。又由所给条件，向点 A 简化为一主矢和主矩，主矩为已知，$M_A = M_Ai$，则主矩大小应有 $M_A = F_R \cdot a$，合力应沿 z 轴正向，由此得合力大小与方向。再向其他点简化则不难计算。

2. 平行于 AH 连线向下

提示：注意到 EF、CD 杆为二力杆，对 ACE 杆这两个力有交点 H。再由三力平衡汇交定理，知约束 A 处的作用线应通过点 H，即 A 处约束力作用线为已知。此时考虑整体，由力偶只能由力偶来平衡的性质，知 A、B 处的约束力应形成一力偶，由此得解。此题考察了二力杆、三力平衡汇交、力偶只能由力偶来平衡等概念。

3. 能、不能、静定

提示：画出物块的受力图便可知。因不一定处于临界平衡状态，摩擦力不一定等于 fF_N，所以不能求出摩擦因数。因可求出所有约束力，所以是静定问题。

4. $\frac{l\cos^2\theta}{H}$

提示：给点 A 以虚位移，分析 D 处的虚位移，有绝对、牵连、相对位移，找出其间的关系可得解。

二、$F_{NB} = -0.5\ \text{kN}$；$F_{Ax} = -4.5\ \text{kN}$，$F_{Ay} = 2\ \text{kN}$，$M_A = 6.25\ \text{kN}\cdot\text{m}$

提示：先取 BC 构件，由 $\sum M_C = 0$ 求出 B 处约束力。然后取整体，列3个平衡方程求 A 处3个约束力。

三、$v_{ED} = R\omega(\leftarrow)$，$a_{ED} = \frac{\sqrt{3}}{2}R\omega^2(\rightarrow)$

提示：AB 杆为瞬时平移，点 A、B 的速度相同，可得 OB 杆的角速度。把动系建于 OB 杆上，动点选为滑块 E，可知绝对速度等于牵连速度，相对速度为零，由此得 ED 杆的速度。为求加速度，选轮心为基点，则轮上点 A 的加速度为已知。再选点 A 为基点，求点 B 的加速度，由此求出点 B 的切向加速度。在点 B 的加速度已知的情况下，则 OB 杆上点 E 的加速度为已知，此实际为牵连加速度。把动系建于 OB 杆上，动点选为滑块 E，可知科氏加速度等于零，绝对加速度等于此点的牵连切向加速度，由此得 ED 杆的加速度。

四、$F_{Ax} = -3\rho r^2\omega^2$，$F_{Ay} = \rho rg$；$F_{By} = \rho rg$，$F_{Bx} = \dfrac{1}{2}\rho r^2\omega^2$

提示：AB 杆做平面运动，可知其速度瞬心为点 E，由此求出 AB 杆的角速度和 BD 杆的角速度，此时 BD 杆的角速度为零。选点 A 为基点，求点 B 的加速度，求得 AB 杆和 BD 的角加速度（AB 杆的角加速度此时为零）。然后仍选点 A 为基点，求得 AB 杆质心的加速度。在这些前提条件下，对 AB、BD 杆加惯性力，用动静法求解。为方便计，可先对 BD 杆，由 $\sum M_D = 0$，求出 B 处水平方向约束力，然后取 AB 杆，列 3 个方程求解其他 3 个约束力。

2007 年秋试题

一、判断题(每题 1 分，正确用“√”，错误用“×”填入括号内)

1. 平面任意力系的独立平衡方程有 3 个，可以完全用 3 个力的投影方程求解。( )

2. 力矩和力偶矩都可以使物体转动，所以其产生的效应完全相同。( )

3. 点做曲线运动时，加速度的方向始终与速度垂直，点必定做匀速圆周运动。( )

4. 只可以对固定点或质心计算动量矩，不能对任意点计算动量矩。( )

5. 虚位移是由约束条件决定的，具有任意性，与所受的力和时间无关。( )

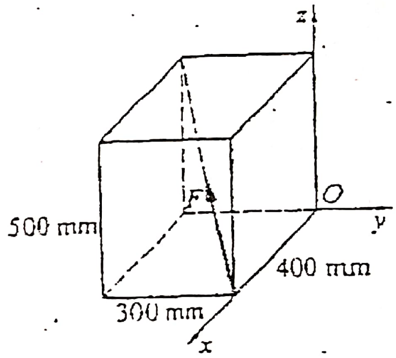
二、填空题(共 22 分)

1. 图示长方体边长如图所示，受图示的力 F 作用，求力 F 在 x、y、z 轴上的投影和对 x、y、z 轴的矩。

F_x = ________，F_y = ________，

F_z = ________，$M_x(F)$ = ________，

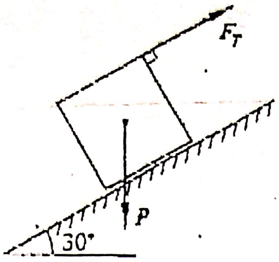
$M_y(F)$ = ________，$M_z(F)$ = ________。(6 分)



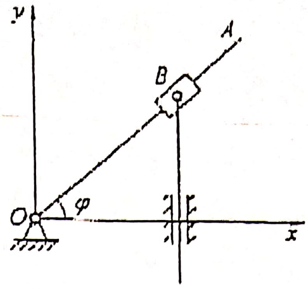
题 1 图

2. 均质正方体重为 P，放于倾角为 30° 的斜面上，静摩擦因数 f = 0.25，开始时在拉力 F_T 作用下静止不动。然后逐渐增大拉力 F_T，则物块先________(填“滑动”或“翻倒”)；又物块在斜面上保持静止时，F_T 的最大值为________。(6 分)

3. 图示平面机构中，OA 杆的虚位移 $\delta\varphi$ 与套筒 B 的虚位移 δy_B 之间的关系为________。(4 分)



题2图



题3图

4. 实心均质圆盘 A,与空心均质圆筒 B,质量相同,外半径相同,由同一高度沿同一斜面同时无初速向下做纯滚动,不计滚动摩阻,问:(8 分)

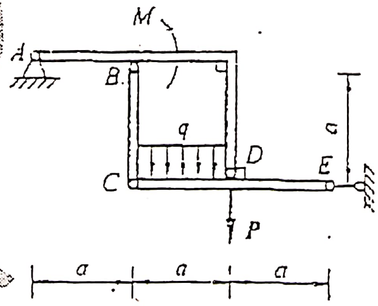
(1) A、B 哪一个先到达地面?

(2) A 到达地面时和 B 到达地面时,哪一个动能大?

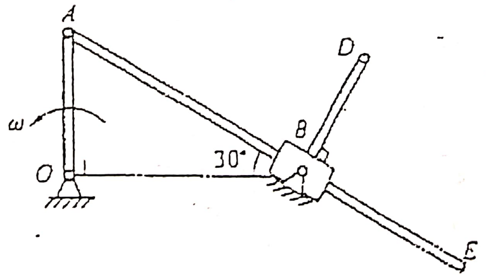
(3) 到达地面时,A 质心速度为 v_A,B 质心速度为 v_B,哪一个大?

三、不计图示各构件自重,力偶矩 $M = 500\ \mathrm{N \cdot m}$,均布荷载 $q = 1\,000\ \mathrm{N/m}$,铅垂集中力 $P = 2\,000\ \mathrm{N}$,$a = 1\ \mathrm{m}$。求:A、E 处的约束力和 B、D 处的约束力。(20 分)

四、图示平面机构,OA 杆长为 R,以匀角速度 ω 绕轴 O 转动,杆 AE 可在套筒 B 中滑动,套筒 B 和杆 BD 固接为一体做定轴转动,BD 长为 l。求图示位置时,构件 BD 的角速度 ω_{BD}、角加速度 α_{BD},点 D 的速度 v_D 和加速度 a_D。(20 分)



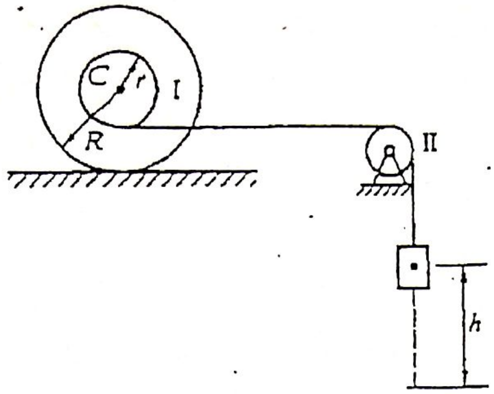
题三图



题四图

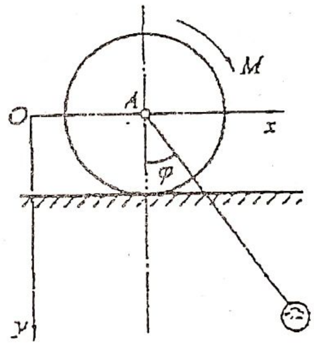
五、质量为 m 的圆盘 Ⅰ 在水平面上纯滚动,其中心 C 为质心,半径 $R = 2r$,圆盘对质心轴的转动惯量 $J_C = mr^2$。在小半径圆上绕一无重细绳,水平引出,跨过无质量的小滑轮 Ⅱ,挂一质量也为 m 的重

物。系统由静止开始运动，求重物下降高度 h 时重物的速度和加速度，地面对轮的摩擦力。(13 分)



题五图

六、图示系统，均质圆盘的质量为 m_1，半径为 R，在一常力偶矩 M 作用下，在水平面上做纯滚动。不计大小的小球的质量为 m_2，用长为 l 的无重细杆 AB 和圆盘铰接而运动。以 x、φ 为广义坐标，用拉格朗日方程建立系统的运动微分方程。(20 分)



题六图

2007年秋试题答案与提示

点评与其他：此套题判断题与填空题有一定的难度，静力学计算题属中等难度，运动学计算题难度较大，动力学计算题比较容易，拉格朗日方程一题也不算容易，所以此套题难度属于中等偏上系列。

一、1. ×

提示：平面任意力系中含力偶系与力偶，而力偶中两力在任意轴上投影之和为零，所以，单用力的投影方程不能度量力偶的作用。可以有三矩式方程，但不能有三个力的投影方程。

2. ×

提示：力矩中的力可以使物体产生转动，也可以使物体产生移动，而力偶的作用效果只能使物体产生转动。

3. ×

提示：点可以做任意的匀速曲线运动。

4. ×

提示：可以对任意点计算动量矩，但一般教材中讲到的动量矩定理不能对任意点。

5. √

提示：由虚位移的定义可知。

二、1. $F_x = -\frac{2}{5}\sqrt{2}F$；$F_y = -\frac{3}{10}\sqrt{2}F$；$F_z = \frac{\sqrt{2}}{2}F$；

$M_x(F) = 0$；$M_y(F) = -200\sqrt{2}F$；$M_z(F) = -120\sqrt{2}F$

提示：空间力在轴上的投影和力对轴的矩的基本计算，按定义进行计算即可。

2. 翻倒；$\frac{1+\sqrt{3}}{4}P = 0.683P$

提示：按滑动计算出 F_T 的值，按翻倒计算出 F_T 的值，两值比较即可。

3. $\delta y_B \cos\varphi = OB \cdot \delta\varphi$

提示：δy_B 是绝对位移，分析绝对、牵连、相对位移的关系，求出牵连位移即可得其关系。

4. (1) A；(2) 同样大；(3) v_A

提示：由物理（力学）概念可直接判断，或用动能定理简单计算即可。

三、$F_E = 5\ \text{kN}$；$F_{Ax} = -5\ \text{kN}$，$F_{Ay} = 3\ \text{kN}$；

$F_{BC} = 0.5\ \text{kN}$（拉）；$F_{Dx} = 5\ \text{kN}$，$F_{Dy} = -2.5\ \text{kN}$

提示：先取整体，由 $\sum M_A = 0$ 求出 E 处约束力，用两个投影方程求出 A 处两个约束力。然后取 ABD 杆，注意 BC 杆为二力杆，用3个方程求出3个约束力。当然，此时也可取 CDE 杆。

四、$\omega_{BD} = \dfrac{1}{4}\omega$（逆时针），$v_D = \dfrac{l}{4}\omega$，$\alpha_{BD} = \dfrac{\sqrt{3}}{8}\omega^2$（逆时针），

$a_D^t = \dfrac{\sqrt{3}}{8}l\omega^2$，$a_D^n = \dfrac{1}{16}l\omega^2$

提示：注意构件（套筒）BD 的角速度和角加速度和 AE 杆的角速度和角加速度相同。把动系建于构件 BD 上，动点选为点 A，则绝对速度和绝对加速度为已知，用点的合成运动求速度、加速度的方法求出牵连速度和牵连切向加速度，可得构件 BD 的角速度和角加速度。从而得点 D 的速度和加速度。

五、$v = \sqrt{\dfrac{gh}{3}}$；$a = \dfrac{g}{6}$；$F_s = \dfrac{1}{2}mg(\leftarrow)$

提示：取整体，用动能定理求速度与加速度的方法求出速度和加速度。然后取重物，用牛顿第二定律求出绳的拉力，由于不计小滑轮的质量，得水平绳的拉力。最后取圆盘 Ⅰ，用对质心的动量矩定理求出摩擦力。

六、$\left(\dfrac{3}{2}m_1 + m_2\right)\ddot{x} + m_2 l(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) = \dfrac{M}{R}$，

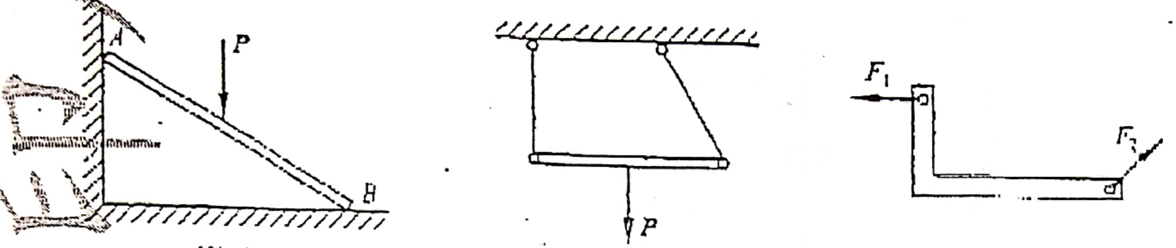
$\ddot{x}\cos\varphi + l\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0$

提示：此题和哈工大2005年秋试题五题类同，但此题为非保守系统。按所给广义坐标计算出系统的广义力，计算出系统的动能，代人格朗日方程运算整理即可。

2008 年春试题

一、简答题(只写结果,不写求解过程)

1. 不计摩擦,下述物体能否平衡?(能平衡画"√",不能平衡画"×")(6 分)



(1) ( )　　(2) ( )　　(3) ( )

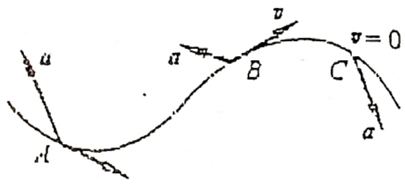
题 1 图

2. 下述运动(点沿曲线运动)是否可能?(6 分)

(1) 点 A;

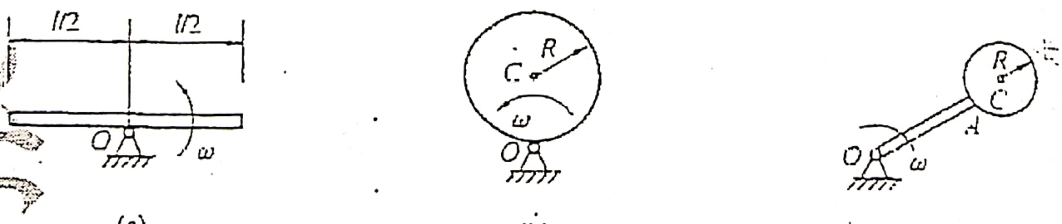
(2) 点 B;

(3) 点 C。



题 2 图

3. 求下述各图物体的动能、动量、动量矩(对 O 点),只写出大小即可。(9 分)



(a)　　(b)　　(c)

题 3 图

(1) 如图(a),均质杆长 l,质量 m,O 为质心,T = ________,p = ________,L_O = ________。

(2) 如图(b),均质圆盘,质量 m,半径 R,T = ________,p =

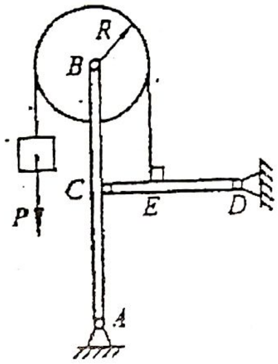
________, L_O = ________。

(3) 如图(c)，均质杆 $OA = l$，质量 m_1，均质圆盘半径 R，质量 m_2，焊接在一起。T = ________，p = ________，L_O = ________。

二、CD 水平，AB 铅垂，无重细绳由 E 起绕过滑轮悬挂重为 P 的重物。杆与滑轮质量不计，无摩擦。

已知：$AC = BC = CD = l$，滑轮半径 R，且 $CE = R$。

求：A、D 处约束力。(19 分)

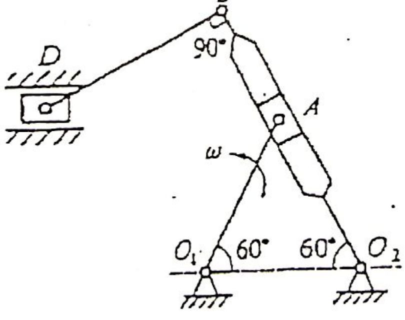


题二图

三、如图，O_1A 杆以匀角速度 ω 绕 O_1 转动，滑块 A 可沿 O_2B 中的直槽移动，从而带动 O_2B 绕 O_2 转动，铰链 B 通过 BD 杆带动滑块 D 沿水平方向运动。图示瞬时，$O_1A = O_2A = AB = BD = l$。求该瞬时：(20 分)

(1) O_2B 的角速度 ω_2 与角加速度 α_2。

(2) 滑块 D 的速度 v_D 与加速度 a_D。

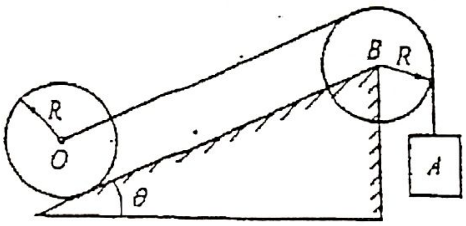


题三图

四、如图，均质圆盘 O 半径为 R，质量为 m_1，盘心系一细绳，绳沿与斜面平行的方向，绕过无重滑轮 B，悬挂一质量为 m_2 的重物 A，圆盘只能沿斜面做纯滚动，斜面倾角为 θ，系统初始静止。求：(20 分)

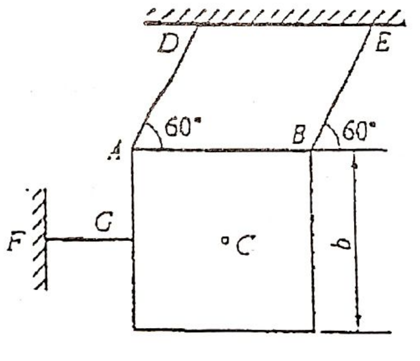
(1) 设圆盘向下纯滚动，问重物 A 上升 h 高度时重物 A 的速度与加速度。

(2) 圆盘与斜面之间的摩擦力。



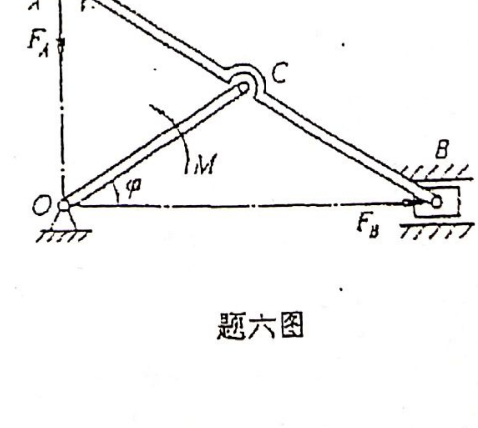
题四图

五、图示正方形均质板的质量为 m，边长为 b，在铅垂面内以 3 根软绳拉住，用动静法求软绳 FG 被剪断瞬时，板的加速度和两根绳受力。(用其他方法做不给分)(10 分)



题五图

六、图示平面机构中，不计各构件自重，$OC = CA = CB = l$，力 F_A，F_B 为已知，机构在图示位置平衡，用虚位移原理求系统平衡时，力偶矩 M 的大小。(用其他方法做不给分)(10 分)



题六图

2008 年春试题答案与提示

点评与其他：此套题题量有些大，但无什么难题，属正常考试题范围。

一、1. (1) ×；(2) ×；(3) ×

提示：对(1)、(2) 所示，直观判断可知，或由力矩方程、投影方程、三力平衡汇交定理等去判断。对(3) 所示，其不满足二力平衡公理。

2. (1) 能；(2) 不能；(3) 不能

提示：点的运动学速度、加速度的基本概念。

3. (1) $T = \frac{1}{24}ml^2\omega^2, p = 0, L_O = \frac{1}{12}ml^2\omega$；

(2) $T = \frac{3}{4}mR^2\omega^2, p = mR\omega, L_O = \frac{3}{2}mR^2\omega$；

(3) $T = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}m_1l^2 + \frac{1}{2}m_2R^2 + m_2(l + R)^2\right]\omega^2$

$p = \frac{\omega}{2}[m_1l + 2m_2(l + R)]$

$L_O = \left[\frac{1}{3}m_1l^2 + \frac{1}{2}m_2R^2 + m_2(l + R)^2\right]\omega$

提示：动能、动量、动量矩的基本概念和计算，按相应计算公式计算即可。

二、$F_{Ax} = 0, F_{Ay} = P + \frac{R}{l}P; F_{Dx} = 0, F_{Dy} = -\frac{R}{l}P$

提示：可直接看出，或取滑轮，得 B 处无水平方向约束力，只有铅垂方向约束力，且为 $2P$。由此取 ACB 杆，由 $\sum M_C = 0$ 求出 A 处水平方向约束力为零。此时取整体，用 3 个方程求出其他 3 个约束力。

三、(1) $\omega_2 = \frac{1}{2}\omega$(逆时针)；

(2) $\alpha_2 = 0, v_D = \sqrt{2}l\omega(\leftarrow), a_D = \sqrt{2}l\omega^2(\rightarrow)$

提示：把动系建于 O_2B 杆上，动点选为滑块 A，用点的合成运动求速度、加速度的方法求出牵连速度与牵连切向加速度，可得 O_2B 杆的角速度和角加速度。此时点 B 的速度和加速度为已知，用刚体平面运动求速度与加速度的方法求出滑块(点) D 的速度、加速度。

四、(1) $v=\sqrt{\dfrac{4(m_1\sin\theta-m_2)gh}{3m_1+2m_2}}$，$a=\dfrac{2(m_1\sin\theta-m_2)g}{3m_1+2m_2}$；

(2) $F_s=\dfrac{(m_1\sin\theta-m_2)m_1 g}{3m_1+2m_2}$。

提示：先取整体用动能定理求速度、加速度的方法求出速度与加速度，然后取轮 O，用对质心的动量矩定理求出摩擦力。

五、$a_C=\dfrac{1}{2}g$，$F_{BE}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}mg$，$F_{AD}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}mg$

提示：板做平移，此瞬时点 A、B 无法向加速度，有垂直于 DA 向下的加速度，板质心的加速度与此相同。加上惯性力，按题目要求，用动静法求解。注意投影轴的选择，先沿垂直于 AD 方向的轴投影，一个方程可求出加速度。由 $\sum M_A=0$ 求出 BE 绳受力，另一绳受力也可容易地求出。

六、$M=2l(F_A\cot\varphi+F_B)\sin\varphi$

提示：可设给 OC 杆一虚位移，求出各虚位移的关系，代入虚功方程求解即可。

2008年秋试题

卷面共85分，平时成绩为15分。

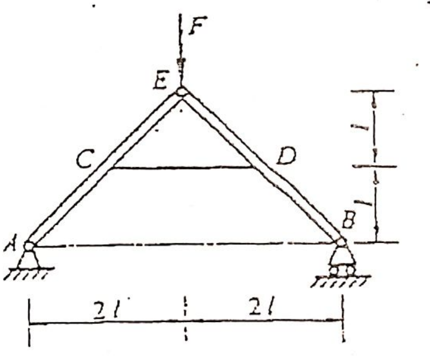
一、选择题(每题2分，共10分)

1. 图示平面结构中，各构件自重不计，水平绳 CD 能承受的最大拉力为10 kN，则铅垂力 F 的最大值为(   )。

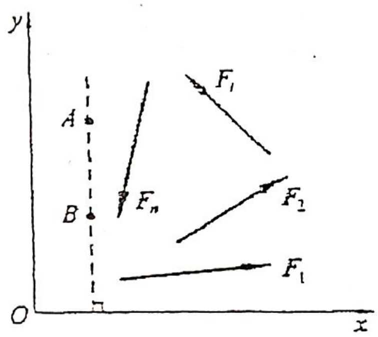
A. 5 kN　　B. 10 kN　　C. 15 kN　　D. 20 kN

2. 图示一平衡的平面任意力系，在平衡方程 $\sum F_x = 0, \sum M_A = 0, \sum M_B = 0$ 中，A、B 两个取矩点和投影轴 x 垂直，有(   )方程是独立的。

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个



题1图



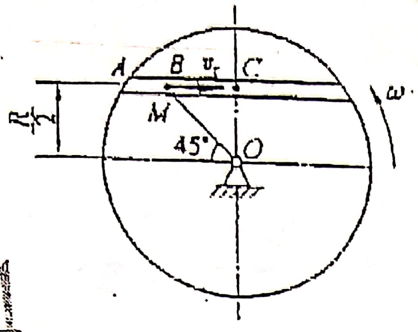
题2图

3. 圆盘以匀角速度 ω 绕轴 O 转动，动点 M 相对于圆盘以匀速 v_r 在直槽内运动，以圆盘为动系，当动点 M 运动到 A、B、C 各点时，其牵连速度大小(   )；牵连加速度大小(   )；科氏加速度的大小(   )。

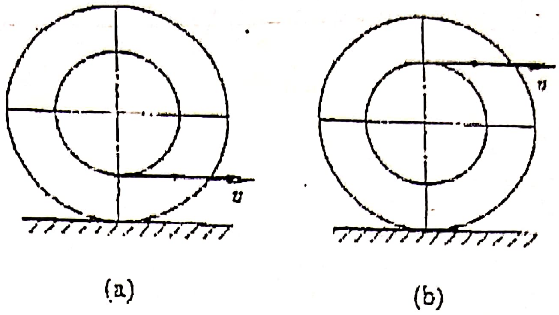
A. 相等　　B. 不相等　　C. 难以确定

4. 两个完全相同但绕线方式不同的绕线轮，在绳的拉动下沿水平固定轨道纯滚动，绳端的速度都是 v，则图(a)所示轮将(   )滚动，图(b)所示轮将(   )滚动，且图(a)所示轮比图(b)所示轮滚得(   )。

A.逆时针　　　　B.顺时针　　　　C.快　　　　D.慢



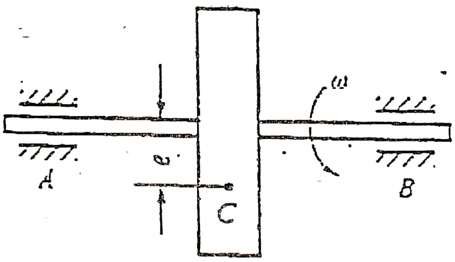
题3图



题4图

5. 图示飞轮其质心不在转轴上，偏心距为 e。飞轮以匀角速度 ω 转动时，轴承 A 处的附加动约束力大小为 F_{NA}。当飞轮以匀角速度 2ω 转动时，轴承 A 处的附加动约束力大小为(　　)。

A. F_{NA}　　　B. $2F_{NA}$　　　C. $3F_{NA}$　　　D. $4F_{NA}$



题5图

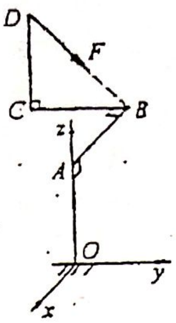
二、填空题(共15分)

1. 图示不计自重直角刚性弯杆 $OABCD$，O 处为空间固定端约束，OA、CD 铅垂，AB、BC 水平，AB 平行于 x 轴，BC 平行于 y 轴，CD 平行于 z 轴，$OA = AB = BC = CD = l$，D 处作用一力 F，大小为 F，方向沿着 DB。则 O 处的约束力为：(6分)

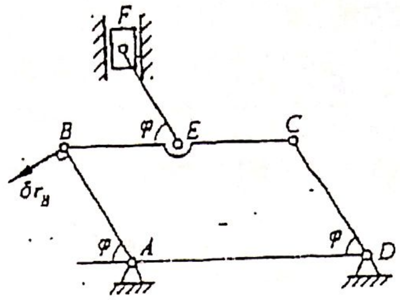
F_{Ox} = ________，F_{Oy} = ________，F_{Oz} = ________；

M_{Ox} = ________，M_{Oy} = ________，M_{Oz} = ________。

2. 图中 $ABCD$ 组成一平行四边形，$EF // AB$，且 $AB = EF = l$。设点 B 的虚位移为 δr_B，则点 C 的虚位移 δr_C = ________，点 E 的虚位移 δr_E = ________，点 F 的虚位移 δr_F = ________。在图上画出各虚位移的方向。(5分)

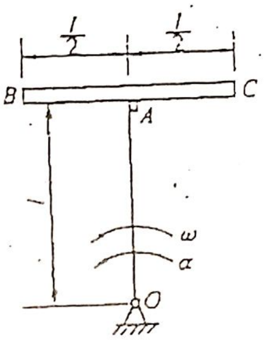


题1图



题2图

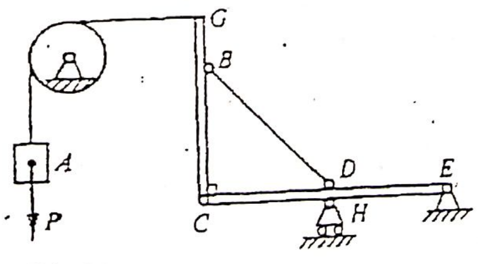
3. 图示直角T形杆以角速度ω和角加速度α绕轴O转动，尺寸如图所示，不计OA的质量，BC杆为均质杆，其质量为m，其惯性力向轴O处简化的主矢为________，主矩为________，方向在图中画出。(4分)



题3图

三、计算题(15分)

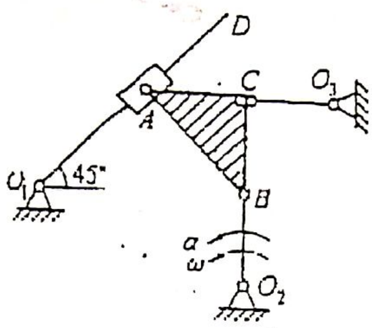
图示系统处于平衡状态，不计各构件自重，物块A重为P，尺寸$GB = 0.3$ m，$BC = CD = DE = 1$ m，求支座H、E处的约束力和BD杆受力。



题三图

四、计算题(15分)

图示平面机构中，$O_2B = BC = CA = O_3C = R$，$AC \perp CB$，主动件 O_2B 以角速度 ω 和角加速度 α 绕轴 O 转动，图示瞬时 A、C、O_3 在同一水平线上，C、B、O_2 位于同一铅垂线上，$O_1A = \sqrt{2}R$。求此瞬时：O_1D 杆的角速度和三角板的角加速度。



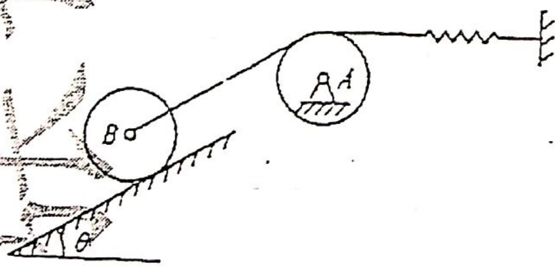
题四图

五、计算题(15分)

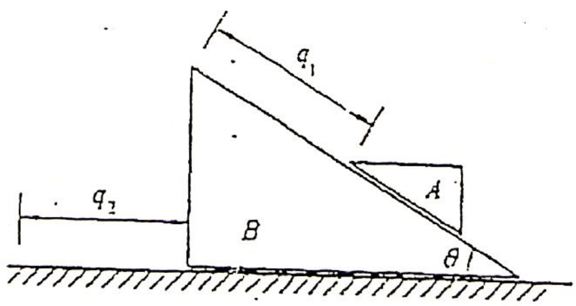
图示系统中，两均质轮质量为 m，半径均为 R，轮 B 在运动过程中做纯滚动，不计滚动摩阻。系统初始静止，此时弹簧为原长。弹簧刚度为 k，斜面倾角 $\theta = 30°$。绳与轮 A 间不打滑，绳的倾斜段与斜面平行，另一段水平。求：轮心 B 向下运动距离 s 时，轮心 B 的速度和加速度。

六、计算题(15分)

图示三棱柱 A 的质量为 m_1，三棱柱 B 的质量为 m_2，且 $m_2 = 3m_1$，各接触处光滑，斜面倾角 $\theta = 30°$，用拉格朗日方程，以 q_1、q_2 为广义坐标，建立系统的运动微分方程，并求出运动中三棱柱 B 的加速度。



题五图



题六图

2008 年秋试题答案与提示

点评与其他：此套题题量大，无论选择题、填空题和计算题，难度均属中等，属正常考试题范围。

一、1. B

提示：对整体由 $\sum M_A = 0$ 或直接可得 $F_{RB} = \dfrac{F}{2}$，然后取 BDE 杆，由 $\sum M_E = 0$ 计算可得。

2. B

提示：二矩式方程的限制条件为，两个取矩点的连线和投影轴不得垂直，不满足此条件，三个平衡方程不独立。

3. B；B；A

提示：重合点不同，离点 O 的距离不同，所以牵连速度、牵连加速度不同，而 $a_C = 2\omega \times v_r$ 则不变。

4. B；B；C

提示：与轨道接触点为速度瞬心，由此可知各结果。

5. D

提示：角速度为 ω 时，其惯性力主矢为 $me\omega^2$，角速度为 2ω 时，其惯性力主矢为 $me(2\omega)^2 = 4me\omega^2$，由此可知。

二、1. $F_{Ox} = 0, F_{Oy} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}F, F_{Oz} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}F$；

$M_{Ox} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}Fl, M_{Oy} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}Fl, M_{Oz} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}Fl$

提示：此题是求空间固定端的约束力，实际是力在轴上的投影和力对轴的矩的基本计算，画出空间固定端的 6 个约束力，投影、取矩计算即可。

2. $\delta r_C = \delta r_B, \delta r_E = \delta r_B, \delta r_F = 0$

提示：BEC 杆为平移，其上各点虚位移相同。EF 杆做平面运动，其速度瞬心为点 F。

3. 切向惯性力 $F_{IO}^{n} = ml\omega^2$，作用在 O 处，沿 OA 向上；法向惯性力 $F_{IO}^{t} = ml\alpha$，作用在 O 处，垂直于 OA 向右；$M_{IO} = \dfrac{13}{12}ml^2\alpha$，顺时针转向。

提示：刚体定轴转动惯性力系简化基本运算，求出其质心加速度，求出对轴 O 的转动惯量，按公式计算即可。

三、$F_{Ex} = P$，$F_{Ey} = -1.3P$；$F_{NH} = 1.3P$；$F_{BD} = 1.3\sqrt{2}P$（拉）

提示：去掉滑轮，即把水平绳断开，取右边部分，相当于取整体，列 3 个方程求出 H、E 处的 3 个约束力。然后取 GBC 杆或 CDE 杆，注意 BD 杆为二力杆，均用一个取矩方程求出 BD 杆受力。

四、$\omega_{O_1} = \frac{1}{2}\omega$（逆时针）；$\alpha_{ABC} = \alpha$（顺时针）

提示：三角板 ABC 做平面运动，其速度瞬心在点 C，由此得三角板的角速度和套筒（点）A 的速度，把动系建于 O_1D 杆上，动点选为套筒（点）A，求出牵连速度得 O_1D 的角速度。选点 B 为基点，求点 C 的加速度，求出点 C 相对点 B 的切向加速度得三角板 ABC 的角加速度。

五、$v_B = \sqrt{\frac{1}{2}\left(gs - \frac{k}{m}s^2\right)}$；$a_B = \frac{1}{4}g - \frac{ks}{2m}$

提示：取整体，用动能定理求速度、加速度的方法求速度、加速度，即写出系统的动能，计算出力做功，由动能定理可得速度，求导数可得加速度。

六、$2\ddot{q}_1 \pm \sqrt{3}\ddot{q}_2 - g = 0$，$8\ddot{q}_2 \pm \sqrt{3}\ddot{q}_1 = 0$；$\ddot{q}_2 = \mp\frac{\sqrt{3}}{13}g$（←）

提示：拉格朗日方程基本计算题，按所给广义坐标写出系统的动能，此系统为保守系统，可写出系统的势能或计算出广义力。代入拉格朗日方程计算整理即可。求得关于 $\ddot{q}_1$、$\ddot{q}_2$ 的微分方程后，联立求解可得 $\ddot{q}_2$。