哈尔滨工业大学 2009～2016 年

理论力学试题与解答

哈尔滨工业大学2009年(春)期末
理　论　力　学　试　题

一、选择题(5个小题,每小题2分,共10分)

1. 二力平衡公理指的是(　　)。

A. 两个力等值即可　　B. 两个力等值、反向即可

C. 两个力等值、反向、不共线　　D. 两个力等值、反向、共线

2、三力平衡汇交定理指的是(　　)。

A. 物体在三个力作用下即可平衡

B. 刚体在三个力作用下即可平衡

C. 物体在三个力作用下平衡,若其中有两个力的作用线交于一点,则第三个力的作用线必定通过该点,且三个力共面。

D. 刚体在三个力作用下平衡,若其中有两个力的作用线交于一点,则第三个力的作用线必定通过该点,且三个力共面

3. 超静定问题指的是(　　)。

A. 物体的所有约束力用静力学平衡方程均可求出

B. 未知数(力)的个数大于独立平衡方程的个数

C. 未知数(力)的个数小于独立平衡方程的个数

D. 结合后续的力学课程,其约束力也不可能完全求出

4. 任意形状一刚体,在做定轴转动时,其(　　)。

A. 通过质心轴的转动惯量为最大　　B. 通过质心轴的转动惯量为最小

C. 通过任意轴的转动惯量都一样　　D. 转动惯量不能确定

5. 消除刚体定轴转动附加动约束力的条件是(　　)。

A. 转轴通过质心　　B. 转轴为中心惯性主轴

C. 转轴为惯性主轴　　D. 通过任意点的转轴均可

二、填空题(4个小题,共16分)

1. 平面内一个力与一个力偶,(　　)用一个力来平衡。(2分)

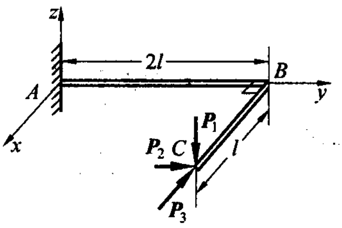
A. 可以　　B. 不可以　　C. 不能确定

2. 空间内一个力与一个力偶,(　　)用一个力来平衡。(2分)

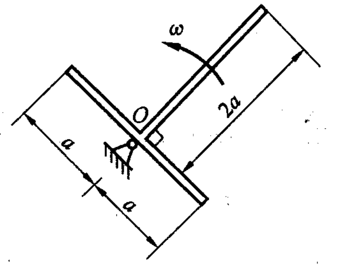
A. 可以　　B. 不可以　　C. 不能确定

3. 不计图示直角弯杆的自重,杆 BC 平行于 x 轴。力 $\boldsymbol{P}_1$ 平行于 z 轴,$\boldsymbol{P}_2$ 平行于 y 轴,$\boldsymbol{P}_3$ 平行于 x 轴,尺寸 l 为已知。则此力系向点 A 简化的主矢和主矩为(6分)

$\boldsymbol{F}'_R=(\quad)\boldsymbol{i}+(\quad)\boldsymbol{j}+(\quad)\boldsymbol{k}$;$\boldsymbol{M}_A=(\quad)\boldsymbol{i}+(\quad)\boldsymbol{j}+(\quad)\boldsymbol{k}$。



题 3 图



题 4 图

4. 图示直角 T 形均质杆，其总质量为 m，长度 a 为已知，绕轴 O 定轴转动，其角速度为 ω，角加速度为 α。则该系统的：

动量 $p=$________；(1 分)

对轴 O 的动量矩 $L_O=$________；(1 分)

动能 $T=$________；(1 分)

惯性力向轴 O 简化的主矢为

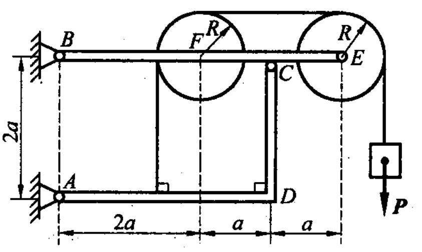
________________；(2 分)

惯性力向轴 O 简化的主矩为

________________；(1 分)

三、计算题(20 分)

不计图示各构件自重，力 P 与尺寸 a 为已知。求 A,B,C 处的约束力。

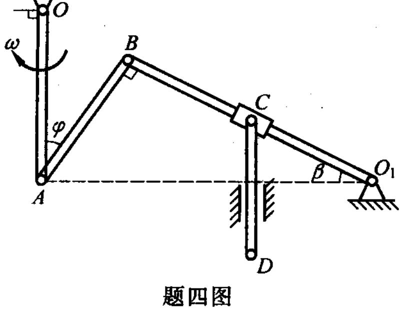


题三图

四、计算题(20 分)

图示平面机构，$OA=\frac{4}{3}R$，图示瞬时，$BC=O_1C=R$，$\varphi=\beta=30°$，OA 杆以匀角速度 ω 绕轴 O 转动。求此瞬时：

1. O_1B 杆的角速度；
2. D 点的速度；
3. O_1B 杆的角加速度。



题四图

五、计算题(20 分)

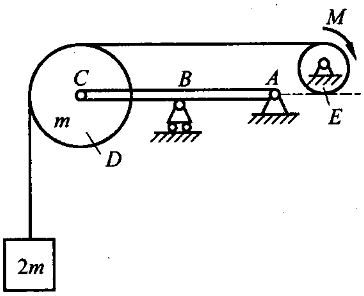
图示系统，均质轮 D 质量为 m，半径为 R，与电动机转子固连的卷筒 E 半径为$\frac{R}{2}$，忽略其质量，驱动力偶矩 $M=2mgR$，为常量，被提升重物的质量为 $2m$，不计梁 ABC 的质量，$CB=BA=2R$，系统初始静止。求：

1. 重物被提升高度 h 时的速度和加速度；
2. 轮 C 两边绳的拉力；
3. 梁 ABC 在支座 B 处的约束力。

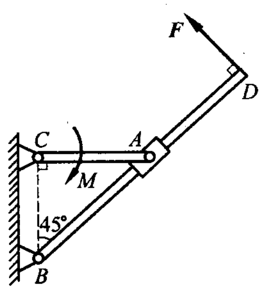
六、计算题(14 分)

不计图示机构各构件自重与各处摩擦，$CA=l$，$BD=2\sqrt{2}\,l$，机构在图示位置(CA 杆水平，角度如图)平衡。用虚位移原理求系统平衡时力偶矩 M 与力 F 间的关系。

(用其他方法做不给分)



题五图



题六图

哈尔滨工业大学 2009 年(春)期末理论力学试题解答

一、1. D；2. D；3. B；4. B；5. B

二、1. 可以；2. 不可以

3. $\boldsymbol{F}'_R=-P_3\boldsymbol{i}+P_2\boldsymbol{j}-P_1\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{M}_A=-2P_1l\boldsymbol{i}+P_1l\boldsymbol{j}+(P_2l+2P_3l)\boldsymbol{k}$

4. $p=\frac{1}{2}ma\omega$，$L_O=\frac{5}{6}ma^2\omega$，$T=\frac{5}{12}ma^2\omega^2$

$F^t_{IR}=\frac{1}{2}ma\alpha$，$F^n_{IR}=\frac{1}{2}ma\omega^2$，$M_{IO}=\frac{5}{6}ma^2\alpha$

三、解：取整体，受力图如图(a)所示，由

$$\sum M_B=0,\quad F_{Ax}\cdot 2a-P\cdot(4a+R)=0,\quad 解得\ F_{Ax}=\frac{4a+R}{2a}P$$

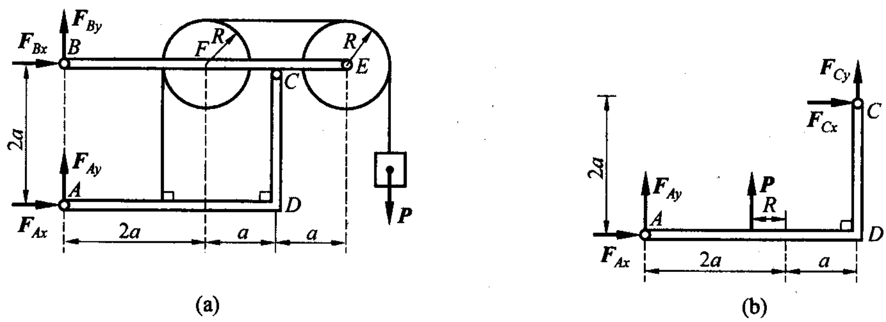
$$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}+F_{Bx}=0,\quad 解得\ F_{Bx}=-\frac{4a+R}{2a}P$$

取构件 ADC，其受力图如图(b)所示，由

$$\sum M_C=0,\quad F_{Ax}\cdot 2a-F_{Ay}\cdot 3a-P(a+R)=0,\quad 解得\ F_{Ay}=P$$

$$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}+F_{Cx}=0,\quad 解得\ F_{Cx}=-\frac{4a+R}{2a}P$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{Ay}+F_{Cy}+P=0,\quad 解得\ F_{Cy}=-2P$$



题三解答图

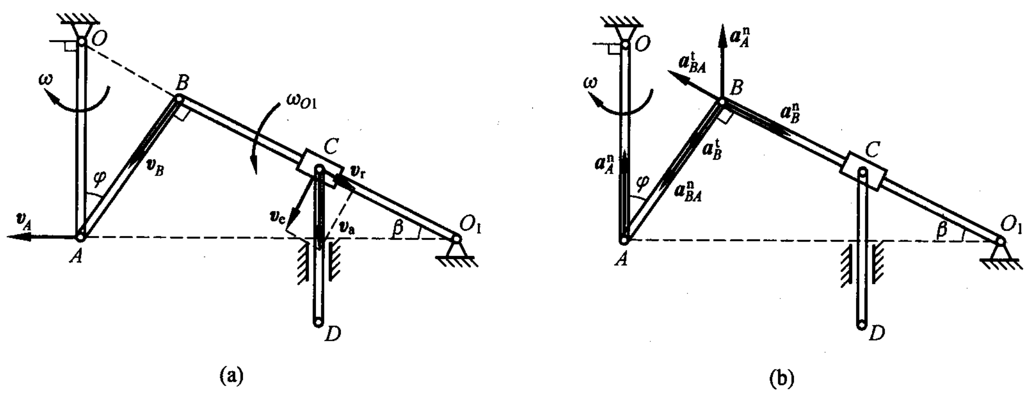
对整体，由 $\sum F_y=0$，　$F_{Ay}+F_{By}-P=0$，　解得 $F_{By}=0$

若取 BC 构件，带着定滑轮与不带着定滑轮，同样可求解，求解略。

四、解：AB 杆为平面运动，其速度瞬心位于点 O，如图(a)所示，得 AB 杆的角速度 ω_{AB} 与 OA 杆的角速度相同，为 $\omega_{AB}=\omega_{OA}=\omega$，则 $v_B=OB\cdot\omega_{AB}=\frac{2}{3}R\omega$，或由速度投影定理得 $v_B=v_A\cos 60°=\frac{2}{3}R\omega$，则 O_1B 杆的角速度为

$$\omega_{O_1}=\frac{v_B}{O_1B}=\frac{1}{3}\omega(\text{逆时针})$$

如图(a)所示。



题四解答图

把动系建于 O_1B 杆上，选套筒 C 为动点，有 $\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$，如图(a)所示，式中 $v_e=O_1C\cdot\omega_{O_1}=\frac{1}{3}R\omega$，则 $v_a\cos 30°=v_e$，解得

$$v_D=v_a=\frac{2\sqrt{3}}{9}R\omega(\downarrow)$$

求加速度，选点 A 为基点，$a_A^n=\frac{4}{3}R\omega^2$，由

$$\boldsymbol{a}_B^t+\boldsymbol{a}_B^n=\boldsymbol{a}_A^n+\boldsymbol{a}_{BA}^t+\boldsymbol{a}_{BA}^n \tag{1}$$

如图(b)所示，式中 $a_{BA}^n=AB\cdot\omega_{AB}^2=\frac{2}{3}\sqrt{3}R\omega^2$，把式(1)沿 BA 方向投影有

$$a_B^t = -a_A^n \cos 30° + a_{BA}^n = 0$$

得 O_1B 杆的角加速度为

$$\alpha_{O_1} = \frac{a_B^t}{O_1B} = 0$$

此题还可以接着求点 D 的加速度，需用点的合成运动的方法，略。

五、解：取整体用动能定理，如图(a)所示

$$T_1 = 0$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} mR^2 \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot v^2 = \frac{5}{4} m v^2$$

且轮 E 转过的角度 φ 与 h 的关系为

$$\frac{R}{2}\varphi = h$$

所有力做的功为

$$W = M\varphi - 2mgh = 2mgh$$

由动能定理 $T_2 - T_1 = W$ 有

$$\frac{5}{4} m v^2 - 0 = 2mgh \tag{1}$$

得重物被提升高度 h 时的速度为

$$v = \sqrt{\frac{8}{5} gh}$$

把式(1)对时间求一阶导数，有

$$\frac{5}{2} m v a = 2mgv$$

得重物被提升高度 h 时的加速度为

$$a = \frac{4}{5} g$$

取物块，受力图如图(b)所示，有

$$2ma = F_{T1} - 2mg, \quad F_{T1} = \frac{18}{5} mg$$

取转子，受力图如图(c)所示，因其无质量，由 $J_z\alpha = \sum M_z$，有

$$0 = M - F_{T2} \cdot \frac{R}{2}, \quad F_{T2} = 4mg$$

取轮 C，受力图如图(d)所示，由 $ma_{Cy} = \sum F_y$，有

$$0 = F_{Cy} - mg - F_{T1}, \quad F_{Cy} = \frac{23}{5} mg$$

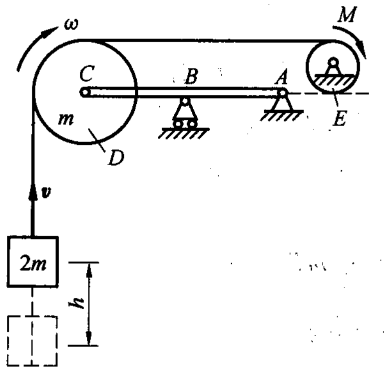
最后取梁 CBA，受力图如图(e)所示，由

$$\sum M_A = 0, \quad F_{Cy} \cdot 4R - F_{NB} \cdot 2R = 0$$

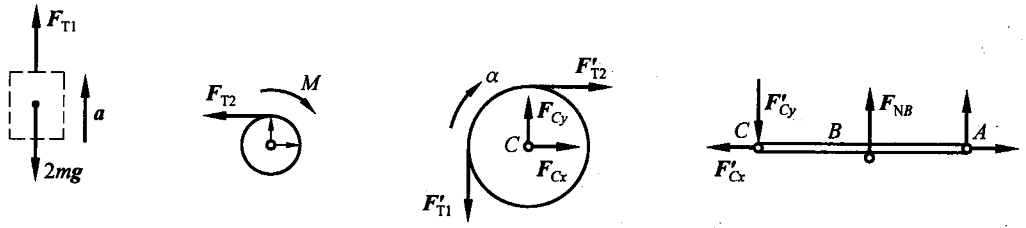
得梁 CBA 在支座 B 处的约束力为

$$F_{NB} = \frac{46}{5} mg = 9.2mg$$

此题还可以对轮 C 求出 C 处水平方向约束力，从而由图(e)求出支座 A 处水平方向约束力等，略。



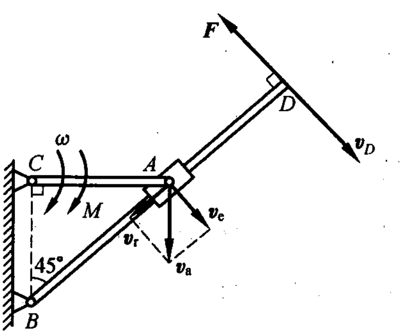
(a)



(b) (c) (d) (e)

题五解答图

六、解：用虚速度法，设杆 CA 有一虚角速度 ω，选套筒 A 为动点，动系建于杆 BD 上，则速度分析如图所示，有 $\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$，式中 $v_a=l\omega$，则



题六解答图

$$v_e=v_a\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}l\omega$$

而
$$v_D=2v_e=\sqrt{2}\,l\omega$$

由虚速度法方程有

$$M\omega-F\cdot v_D=0$$

得
$$M=\sqrt{2}\,Fl$$

哈尔滨工业大学2009年(秋)期末
理　论　力　学　试　题

（卷面共85分，平时成绩为15分。）

一、判断是非题（每题1分，共5分。把答案填入括号内）

1. 刚体在任意三个力作用下平衡，则该三力必在同一平面内，且汇交于一点。（　　）

2. 求解处于非临界平衡状态有摩擦的平衡问题时，未求解时静摩擦力的大小一般是未知的，但方向肯定是已知的。（　　）

3. 刚体做平面运动时，绕基点转动的角速度和角加速度与基点的选择无关。（　　）

4. 只要知道了作用在质点上的力，则质点在任一瞬时的运动状态就完全确定。（　　）

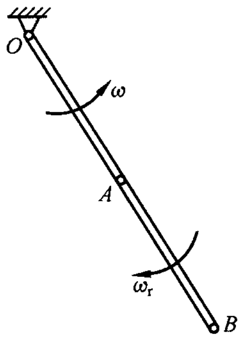
5. 质点系不受外力作用时，质心的运动状态不变，各质点的运动状态也不变。（　　）

二、填空题（每题3分，共15分。）

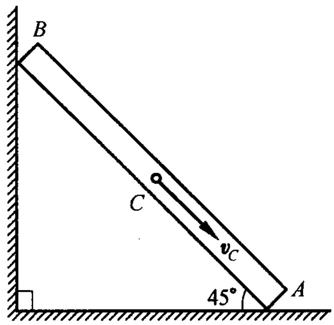
1. 一平面力系，已知$\sum F_x=0$，$\sum M_A=0$，$\sum M_B\neq 0$，则该力系简化的最后结果为________________。

2. 在常规直角坐标系下，一大小为$5\sqrt{2}$ kN的力$\boldsymbol{F}$，通过点$A(3,0,0)$与点$B(0,4,5)$，长度单位为m，且由A指向B，则该力在z轴上的投影为________，对z轴的力矩为________。

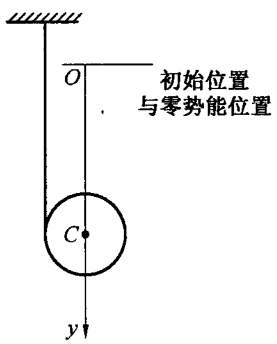
3. 两根长为l的直杆用铰链A连接在图示平面内运动，OA杆以角速度ω绕轴O转动，AB杆相对OA杆以相对角速度ω_r绕轴A转动。以点B为动点，动系建于OA杆上，当两杆在同一直线上时，点B的科氏加速度的大小为________，方向为________。



题3图



题4图



题5图

4. 图示均质杆AB，长为l，质量为m，在图示瞬时，其质心的速度为v_C，在该瞬时，杆的动量为__________，动能为______________。

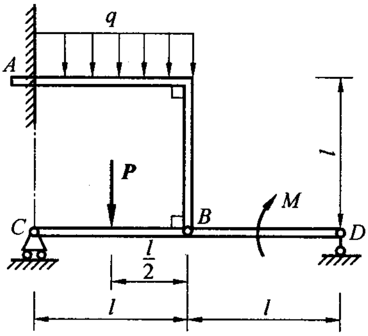
5. 图示均质圆盘，质量为m，半径为R，初始静止，绳不可伸长，在图示铅垂平面内运动。以y为广义坐标，初始位置与零势能点如图所示，则其拉格朗日函数为________________________________。

三、计算题(15 分)

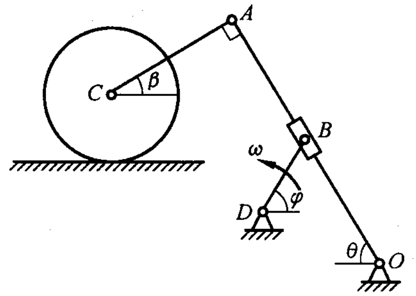
图示平面结构由直角曲梁 AB,直梁 CB、BD 组成,各构件自重不计。已知:$P=4$ kN,$M=8$ kN·m,$q=4$ kN/m,$l=2$ m。求 C,D 处约束力与 A 处约束力。

四、计算题(20 分)

图示平面机构,已知:$DB=R$,$OA=4R$,$AC=2R$,轮 C 的半径为 R。DB 杆以匀角速度 ω 绕轴 O 转动,图示瞬时 $\theta=\varphi=60°$,$\beta=30°$,滑块 B 在 OA 杆的正中间,轮做纯滚动。求此瞬时 OA 杆、AC 杆的角速度和轮 C 的角速度,杆 OA 的角加速度。



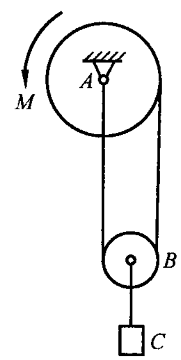
题三图



题四图

五、计算题(20 分)

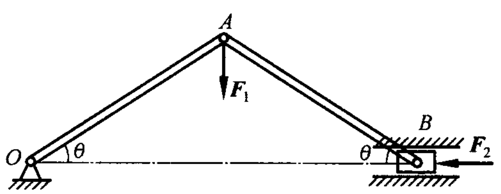
图示系统由均质圆轮 A,B 和物块 C 组成,均质圆轮 A 的质量为 $2m$,半径为 R,均质圆轮 B 和物块 C 的质量均为 m,三段绳铅直。系统初始静止,在常力偶矩 $M=4mgR$ 作用下开始运动,绳的一端拴于轴承 A 处。求:物块 C 上升任意一高度 h 时,物块 C 的速度、加速度,动滑轮两边绳的拉力,轴承 A 处的约束力。



题五图

六、计算题(10 分)

不计图示机构各构件自重与各处摩擦,$OA=AB=l$,在点 A 处作用一铅直力 $\boldsymbol{F}_1$,系统在图示位置平衡。用虚位移原理求系统平衡时的水平力 $\boldsymbol{F}_2$。(用其他方法做不给分)



题六图

哈尔滨工业大学 2009 年(秋)期末理论力学试题解答

一、1. ×;2. ×;3. √;4. ×;5. ×

1. 提示:三力可平行。

2. 提示:方向一般也未知。

3. **提示**:如同刚体定轴转动,其上各点的角速度与角加速度相同,对刚体平面运动,因其是刚体,绕各基点转动的角速度与角加速度也相同。具体证明,一般教材上有,略。

4. **提示**:还与初始条件有关。

5. **提示**:质心运动守恒,各质点运动不一定守恒。

二、1. 一合力,或垂直于 x 轴过点 A 的一合力。

提示:把已知条件画出如图 1 所示,满足

$$\sum F_x=0,\sum M_A=0,\text{但}\sum M_B\neq 0$$

由力的平移定理,向点 B 简化,为一力与一力偶。

2. $F_z=5\ \mathrm{kN}, M_z(\boldsymbol{F})=12\ \mathrm{kN\cdot m}$

提示:把题给条件画出,如图 2 所示,可看出

$$F_z=F\sin 45^\circ=5\ \mathrm{kN}$$

$$F_y=F\sin 45^\circ\cdot\frac{4}{5}=4\ \mathrm{kN}$$

$$M_z(\boldsymbol{F})=F_y\cdot 3=12\ \mathrm{kN\cdot m}$$

3. $a_C=2l\omega\omega_r$,方向沿 AB 向下。

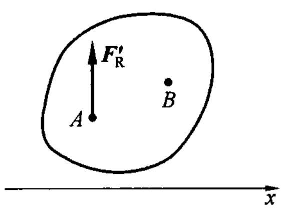


图 1

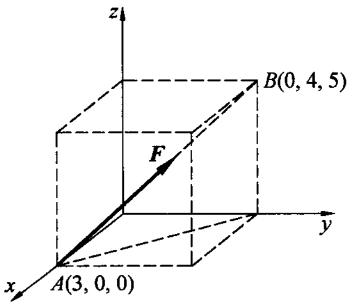


图 2

提示:点 B 的相对速度如图 3 所示,其大小为 $v_r=l\omega_r$,OA 杆的角速度为牵连角速度 ω_e,由科氏加速度的定义 $\boldsymbol{a}_C=2\boldsymbol{\omega}_e\times\boldsymbol{v}_r$ 可得。

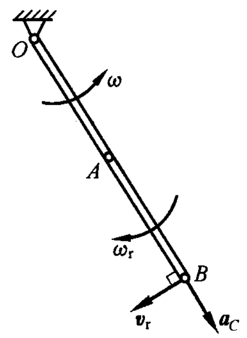


图 3

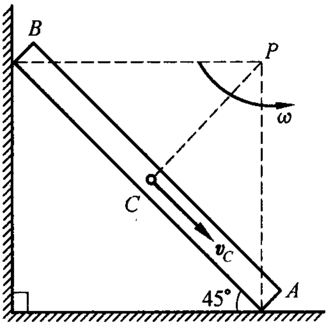


图 4

4. $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}_C, T=\frac{2}{3}mv_C^2$

提示:如图 4 所示,可求出杆的角速度 $\omega=\frac{v_C}{CP}=\frac{2v_C}{l}$,由动能计算公式 $T=\frac{1}{2}J_P\omega^2$ 或

$T=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega^2$ 计算可得。

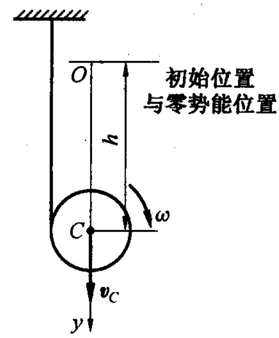


图 5

5. $L=T-V=\frac{3}{4}m\dot{y}^2+mgy$

提示:如图 5 所示,由动能计算公式

$$T=\frac{1}{2}J_P\omega^2$$

计算其动能为 $T=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}mR^2\omega^2=\frac{3}{4}m\dot{y}^2$,而其势能为 $V=-mgy$,由 $L=T-V$ 可得。

三、**解**:取 CB 杆,其受力图如图(a)所示,其中 B 处不包含销钉 B,可由

$$\sum M_B=0,\quad P\cdot\frac{l}{2}-F_{NC}\cdot l=0$$

得 $$F_{NC}=2\ \text{kN}$$

若包含销钉 B,也可得此结果。

取 BD 杆,其受力图如图(b)所示,其中 B 处不包含销钉 B,由

$$\sum M_i=0,\quad F_{ND}\cdot l-M=0$$

得 $$F_{ND}=4\ \text{kN}$$

或按任意力系由 $\sum M_B=0$ 也可得。

取整体,受力图如图(c)所示,由

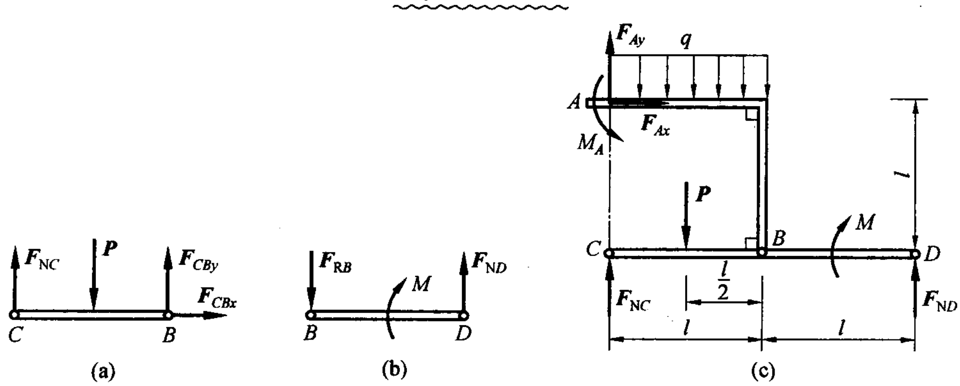
$$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}=0$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{Ay}-ql-P+F_{NC}+F_{ND}=0$$

解得 $$F_{Ay}=6\ \text{kN}$$

$$\sum M_A=0\quad M_A-ql\cdot\frac{l}{2}-P\cdot\frac{l}{2}-M+F_{ND}\cdot 2l=0$$

解得 $$M_A=4\ \text{kN}\cdot\text{m}$$



题三解答图

此题也可取弯杆 AB 进行求解,但在 B 处销钉 B 连接了 3 个构件,求解时要注意。

四、解：把动系建于 OA 杆上，选套筒 B 为动点，有 $\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$，如图(a)所示，式中 $v_a=R\omega$，则

$$v_e=v_a\cos 60°=\frac{1}{2}R\omega$$

$$v_r=v_a\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}R\omega$$

所以 OA 杆的角速度为

$$\omega_{OA}=\frac{v_e}{OB}=\frac{\omega}{4}$$

方向如图所示。

AC 杆为平面运动，其速度瞬心位于点 P，也如图(a)所示，$v_A=4R\cdot\omega_{OA}=R\omega$，则 AC 杆的角速度为

$$\omega_{AC}=\frac{v_A}{PA}=\frac{\sqrt{3}}{6}\omega$$

方向也如图所示。

由速度投影定理 $v_C\cos 30°=v_A$ 或瞬心法 $v_C=PC\cdot\omega_{AC}$ 得 $v_C=\frac{2}{3}\sqrt{3}R\omega$，得轮 C 的角速度为

$$\omega_C=\frac{v_C}{R}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\omega$$

方向也如图所示。

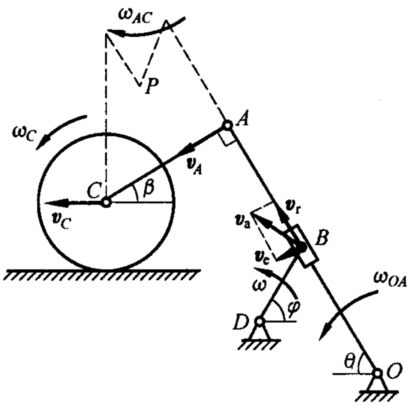
把动系建于 OA 杆上，选套筒 B 为动点，有 $\boldsymbol{a}_a^n=\boldsymbol{a}_e^n+\boldsymbol{a}_e^t+\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_C$，如图(b)所示，式中 $a_a^n=R\omega^2$，$a_C=2\omega_{OA}v_r=\frac{\sqrt{3}}{4}R\omega^2$，垂直于 OA，投影得

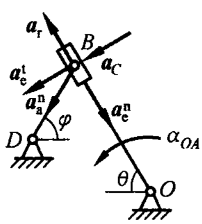
$$a_a^n\cos 30°=a_e^t+a_C$$

解得 $a_e^t=\frac{\sqrt{3}}{4}R\omega^2$，则 OA 杆的角加速度为

$$\alpha_{OA}=\frac{a_e^t}{OB}=\frac{\sqrt{3}}{8}\omega^2$$

方向如图(b)所示。





题四解答图

当然，作为扩展，也可以求 AC 杆与轮 C 的角加速度，作为训练，有兴趣的读者可以做一下，本书从略。

五、解：取整体用动能定理，如图(a)所示，则

$$T_1=0$$

$$T_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2mR^2\cdot\omega_A^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}m\left(\frac{R}{2}\right)^2\cdot\omega_B^2+\frac{1}{2}mv_C^2=\frac{13}{4}mv_C^2$$

物块 C 上升高度 h 时，所有力做的功为

$$W=M\varphi-2mgh$$

轮 A 转过的角度 φ 与 h 的关系为

$$R\varphi=2h$$

所有力做的功为

$$W=M\varphi-2mgh=6mgh$$

由动能定理 $T_2-T_1=W$ 有

$$\frac{13}{4}mv_C^2-0=6mgh \tag{1}$$

得物块 C 被提升高度 h 时的速度为

$$v_C=\sqrt{\frac{24}{13}gh}$$

把式(1)对时间求一阶导数，有

$$\frac{13}{2}mv_Ca_C=6mgv_C$$

得物块 C 被提升高度 h 时的加速度为

$$a_C=\frac{12}{13}g$$

取轮 B 与物块 C，受力图如图(b)所示，用动静法求解，加惯性力也如图(b)所示，其中

$$F_I=ma_C=\frac{12}{13}mg,\quad M_{IB}=\frac{1}{2}\cdot m\left(\frac{R}{2}\right)^2\cdot\alpha_B=\frac{3}{13}mgR$$

由 $$\sum M_D=0,\quad 2mg\cdot\frac{R}{2}+2F_I\cdot\frac{R}{2}-F_{T1}\cdot R-M_{IB}=0$$

解得 $$F_{T1}=\frac{22}{13}mg$$

由 $$\sum F_y=0,\quad F_{T1}+F_{T2}-2F_I-2mg=0$$

解得 $$F_{T2}=\frac{28}{13}mg$$

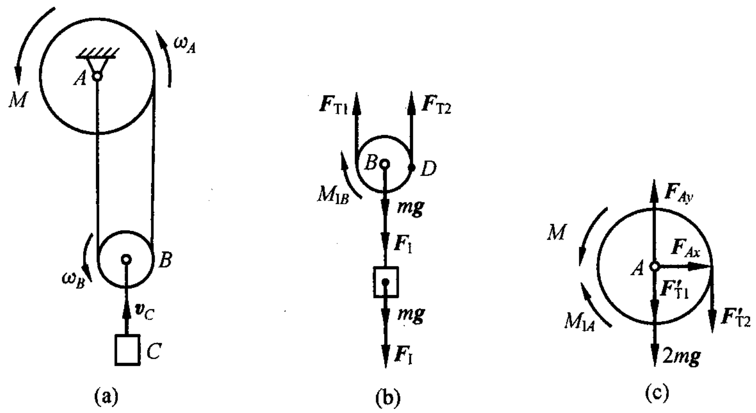
最后取轮 A，其受力图如图(c)所示，由质心运动定理 $ma_{Cx}=\sum F_x$，解得

$$F_{Ax}=0$$

$$ma_{Cy}=\sum F_y$$

有 $$0=F_{Ay}-2mg-F'_{T1}-F'_{T2}$$

解得 $$F_{Ay}=\frac{76}{13}mg$$



题五解答图

讨论:若不求绳的拉力,只求轴承 A 处约束力,则取整体,用动静法求解简单,求解略。

求解动滑轮两边绳的拉力,可分别取物块 C 与动滑轮,用牛顿第二定律与刚体平面运动微分方程求解,略,但如题所做,用动静法求解简单些。

六、解:用虚速度法,设滑块 B 有一虚角速度 $\boldsymbol{v}_B$,则点 A 的虚速度如图所示,由虚速度法方程

$$\sum \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{v}_i = 0$$

有

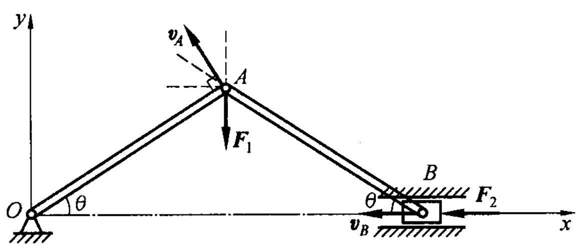
$$F_2 \cdot v_B - \boldsymbol{F}_1 \cdot \boldsymbol{v}_A = 0 \tag{1}$$

由速度投影定理,有

$$v_B \cos\theta = v_A \cos(90° - 2\theta)$$

得

$$v_B = 2v_A \sin\theta$$



题六解答图

代入方程(1)有

$$F_2 \cdot v_B - F_1 \cdot v_A \cos\theta = 0$$

解得

$$F_2 = \frac{F_1}{2}\cot\theta$$

用解析法,写出其虚功方程为

$$-F_1 \delta y_A - F_2 \delta x_B = 0 \tag{2}$$

而

$$y_A = l\sin\theta, \quad x_B = 2l\cos\theta$$

其变分为

$$\delta y_A = l\cos\theta\delta\theta, \quad \delta x_B = -2l\sin\theta\delta\theta$$

代入方程(2),同样可得

$$F_2 = \frac{F_1}{2}\cot\theta$$

哈尔滨工业大学2010年(春)期末
理　论　力　学　试　题

(卷面共85分,平时成绩为15分。)

一、判断题(5个小题,每小题1分。在括号中填入"√"或"×")

1. 两个分力的合力的大小不一定大于其中任意一个分力的大小。　　(　　)

2. 物体只在两个力作用下不一定平衡。　　(　　)

3. 只有在临界状态下,静滑动摩擦力的大小等于静滑动摩擦因数与正压力的乘积。　　(　　)

4. 刚体平移时,其上各点的轨迹相同,某瞬时其上各点的速度相同,加速度也相同。　　(　　)

5. 只要点做匀速运动,其总不受力。　　(　　)

二、填空题(4个小题,共16分)

1. 某空间力系其各力作用线都垂直于某一固定平面,其最多独立平衡方程的个数为____个。(2分)

A. 3个　　B. 4个　　C. 5个　　D. 6个

2. 某空间力系其各力作用线都平行于某一固定平面,其最多独立平衡方程的个数为____个。(2分)

A. 3个　　B. 4个　　C. 5个　　D. 6个

3. 图示位于同一平面内的无重直角弯杆 $ABCD$,平面 $ABCD$ 与平面 Axy 的夹角为 $\theta=45°$,且 $AB=CD=1$ m,$BC=\sqrt{2}$ m。在点 D 作用一力 $\boldsymbol{F}=-1\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$,单位为 N;沿 BC 杆作用一力偶,其矩为 $M=\sqrt{2}$ N·m,方向如图所示。则此力系向点 A 简化的主矢和主矩为(6分)

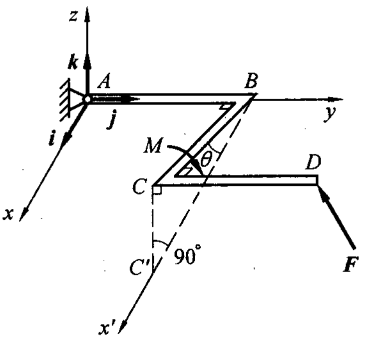
$$\boldsymbol{F}'_R=(\quad)\boldsymbol{i}+(\quad)\boldsymbol{j}+(\quad)\boldsymbol{k};\ \boldsymbol{M}_A=(\quad)\boldsymbol{i}+(\quad)\boldsymbol{j}+(\quad)\boldsymbol{k}$$

4. 图示直角T形均质杆,OA 为其对称轴,两杆质量皆为 m,长度皆为 a,绕轴 O 定轴转动,其角速度为 ω,角加速度为 α。则该系统的:

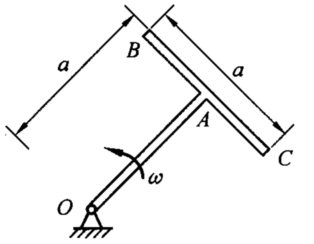
动量 $p=$________;对轴 O 的动量矩 $L_O=$________;动能 $T=$________(各1分)

惯性力向轴 O 简化的主矢为____________(2分)

惯性力向轴 O 简化的主矩为____________(1分)



题 3 图



题 4 图

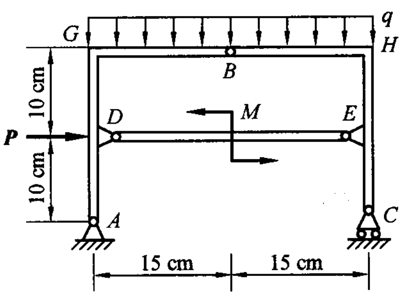
三、计算题(14 分)

图示框架由 3 个刚体铰接而成,不计各构件自重,水平载荷 $P=100$ kN,垂直均布载荷 $q=10$ kN/m,力偶矩 $M=25$ kN · m,尺寸如图。求 A,C,D 处的约束力。

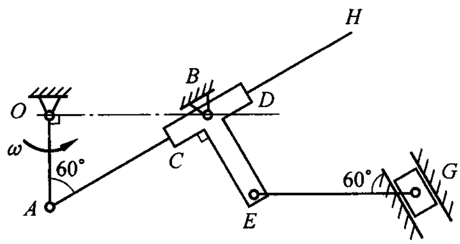
四、计算题(20 分)

图示平面机构中,曲柄 $OA=R$,套筒长 $BE=R$,曲柄 OA 以匀角速度 ω 绕轴 O 转动,AH 杆可在 T 形套筒 CDE 中自由滑动,图示瞬时,$OA \perp OB$,$OB//EG$。求此瞬时:

1. 杆 AH 与套筒 CDE 的角速度;
2. 杆 AH 相对套筒的速度;
3. 滑块 G 的速度;
4. T 形套筒 CDE 的角加速度。



题三图



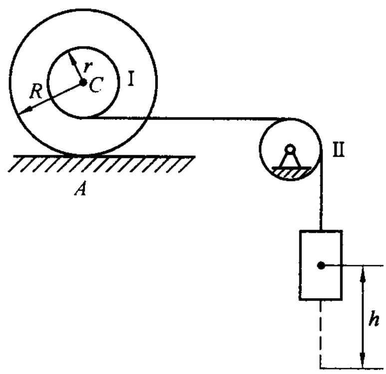
题四图

五、计算题(20 分)

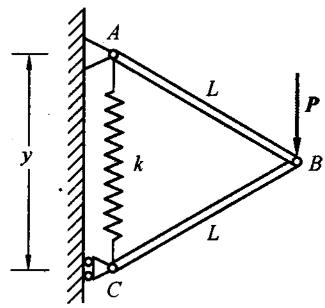
质量为 m 的鼓轮 Ⅰ 在水平面上做纯滚动,其质心位于轮心 C,半径 $R=2r$,对其质心轴 C 的转动惯量为 $J_C=mr^2$。在半径为 r 的圆上绕有一无重细绳,水平引出,跨过不计质量的小滑轮 Ⅱ,挂一质量也为 m 的重物。系统由静止开始运动,求重物下落高度 h 时的速度、加速度、绳的拉力、水平面对轮的摩擦力。

六、计算题(10 分)

不计图示平面机构的自重,杆长 $AB=BC=L$,在 AC 间连一刚度为 k 的弹簧,弹簧原长为 L_0,在点 B 作用一铅直力 $\boldsymbol{P}$,用虚位移原理求机构在图示位置平衡时 AC 间的距离 y。(用其他方法做不给分)



题五图

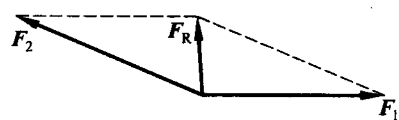


题六图

哈尔滨工业大学2010年(春)期末理论力学试题解答

一、1. √;2. √;3. √;4. √;5. ×

1. **提示**:如图所示,可看出两个分力的合力的大小不一定大于其中任意一个分力的大小。



题一提示图

5. **提示**:匀速运动,不一定是匀速直线运动,可以是曲线运动。

二、1. 3个;2. 5个

3. $\boldsymbol{F}'_R=-1\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{M}_A=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$

4. $p=\dfrac{3}{2}ma$, $L_O=\dfrac{17}{12}ma^2\omega$, $T=\dfrac{17}{24}ma^2\omega^2$

$F_{IR}^{t}=\dfrac{3}{2}ma\alpha$, $F_{IR}^{n}=\dfrac{3}{2}ma\omega^2$, $M_{IO}=\dfrac{17}{12}ma^2\alpha$

1. **提示**:某空间力系其各力作用线都垂直于某一固定平面,为一空间平行力系,所以其最多的独立平衡方程个数为3个。

2. **提示**:某空间力系其各力作用线都平行于某一固定平面,则所有力在垂直于该平面的轴上的投影均为零,6个独立平衡方程少了一个,所以其最多的独立平衡方程个数为5个。

3. **提示**:空间任意力系简化基本计算题,其中,在计算对x,y,z的力矩时,注意把力偶矩M用矢量表示后再投影。

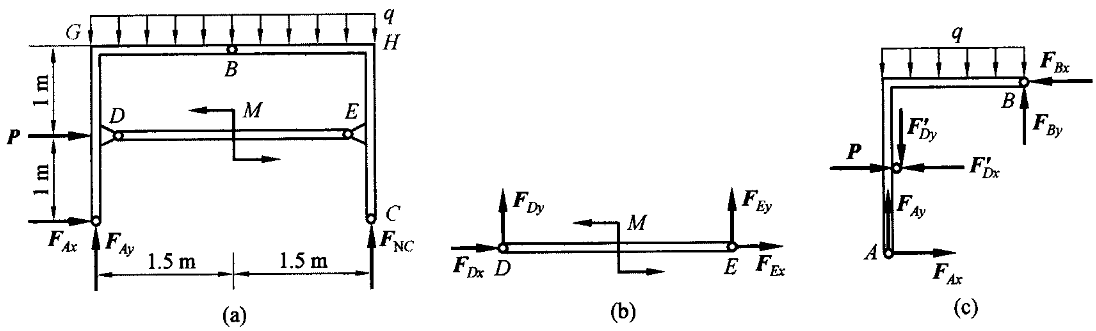
4. **提示**:动量、动量矩、动能与惯性力的基本计算题,按定义计算即可。

三、**解**:先取整体,其受力图如图(a)所示,由

$\sum F_x=0$, $F_{Ax}+P=0$ 解得$F_{Ax}=-100\ \text{kN}$

$\sum M_A=0$, $3F_{NC}+M-1.5\times 3q-P\times 1=0$ 解得$F_{NC}=10\ \text{kN}$

$\sum F_y=0$, $F_{Ay}+F_{NC}-3q=0$ 解得$F_{Ay}=20\ \text{kN}$



题三解答图

取 DE 杆，其受力图如图(b)所示，由

$$\sum M_E=0,\quad -3F_{Dy}+M=0,\quad \text{解得} F_{Dy}=\frac{25}{3}\ \text{kN}$$

取 ADB 杆，其受力图如图(c)所示，由

$$\sum M_B=0,\quad 2F_{Ax}-1\cdot F'_{Dx}+P\cdot 1+1.5q\times 0.75+1.5F'_{Dy}-1.5F_{Ay}=0$$

解得
$$F'_{Dx}=-106.25\ \text{kN}$$

四、解: 杆 AH 为平面运动，由点的合成运动的概念，可知 AH 杆上点 D 的速度 $\boldsymbol{v}_D$ 沿着 AH 杆，则 AH 杆的速度瞬心为点 P，如图(a)所示，则杆 AH 杆的角速度为

$$\omega_{AH}=\frac{v_A}{PA}=\frac{R\omega}{4R}=\frac{\omega}{4}\quad (\text{逆时针})$$

则 AH 杆点 D 的速度为

$$v_D=BP\cdot\omega_{AH}=\frac{\sqrt{3}}{2}R\omega$$

此速度即为杆 AH 相对套筒的速度，因杆 AH 相对套筒为平移，即

$$v_r=v_D=\frac{\sqrt{3}}{2}R\omega$$

虽然套筒 CDE 为定轴转动，杆 AH 为平面运动，但其角度变化率相同，即两者的角速度相同，有

$$\omega_{CDE}=\omega_{AH}=\frac{\omega}{4}$$

套筒上点 E 的速度为 $\qquad v_E=R\omega_{CDE}=\dfrac{R\omega}{4}$

由速度投影定理 $\qquad v_G\cos 60°=v_E\cos 30°,\quad v_G=\dfrac{\sqrt{3}}{4}R\omega$

选套筒为动系，点 A 为动点，如图(b)所示，由

$$\boldsymbol{a}_a=\boldsymbol{a}_a^n=\boldsymbol{a}_e^t+\boldsymbol{a}_e^n+\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_C \tag{1}$$

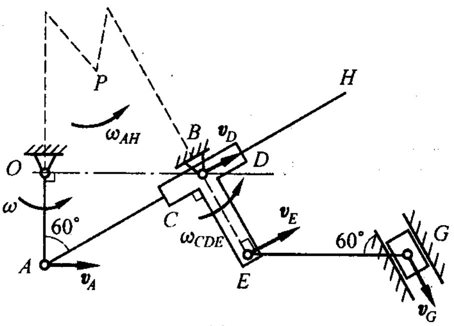
式中
$$a_A^n=a_a^n=R\omega^2,\quad a_C=2\omega_{CDE}v_r=\frac{\sqrt{3}}{4}R\omega^2$$

把式(1)沿图示 ξ 轴投影得

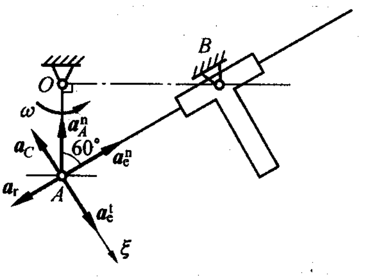
$$-a_a^n\cos 30°=a_e^t-a_C$$

得 $a_e^t=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}R\omega^2$，则套筒 CDE 的角加速度为

$$\alpha_{CDE}=\frac{a_e^t}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{8}\omega^2\text{(顺时针)}$$



(a)



(b)

题四解答图

扩展：若给出 EG 杆的长度，如 $EG=2R$，还可以求 EG 杆的角速度与角加速度，滑块 G 的加速度。作为练习，有兴趣的读者可以做一下。

五、解：取整体用动能定理　　$T_1=0$

$$T_2=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega_C^2+\frac{1}{2}mv^2=3mv^2$$

式中，运动学关系为 $r\omega_C=v$，$v_C=2v$，如图(a)所示

或

$$T_2=\frac{1}{2}(J_C+mR^2)\omega_C^2+\frac{1}{2}mv^2=3mv^2$$

所有力做功为　　$W=mgh$

由 $T_2-T_1=W$ 得　　$3mv^2-0=mgh$

把此式对时间求一阶导数有　　$6mva=mgv$

得重物下落高度 h 时的速度与加速度为

$$v=\sqrt{\frac{1}{3}gh},\quad a=\frac{g}{6}$$

取物块，其受力图如图(b)所示，有

$$ma=mg-F_{T1}$$

得绳的拉力为　　$F_{T1}=\frac{5}{6}mg$

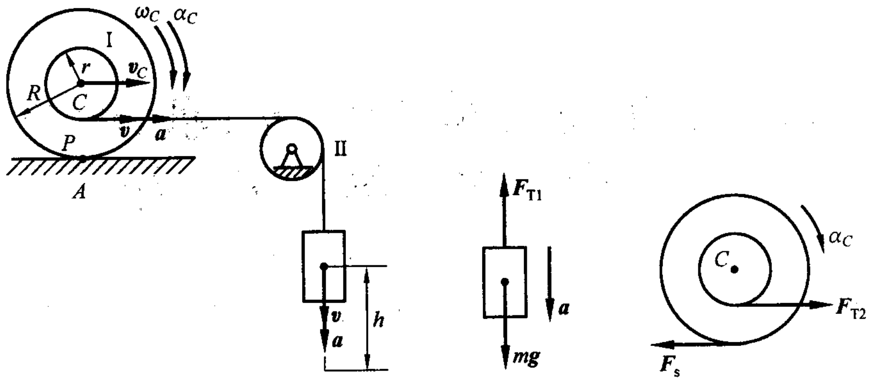
因不计定滑轮Ⅱ的质量，两段绳的拉力一样，即 $F_{T2}=F_{T1}$。

然后取轮，其受力图如图(c)所示，由对质心的动量矩定理 $J_C\alpha=\sum M_C$，有

$$J_C\alpha=F_s\cdot R-F_{T2}\cdot r$$

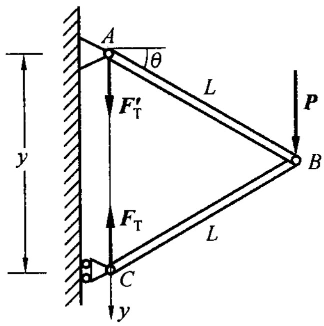
得水平面对轮的摩擦力大小为

$$F_s=\frac{1}{2}mg(\leftarrow)$$



题五解答图

六、解:此题用坐标法求解比较方便，建坐标系，去掉弹簧，如图所示，弹性力大小为



题六解答图

$$F_T = k(y - L_0)$$

虚功方程为 $\delta W_F = 0$， $P \cdot \delta y_B - F_T \cdot \delta y_C = 0$ (1)

而 $y_B = L\sin\theta$， $y_C = 2L\sin\theta$

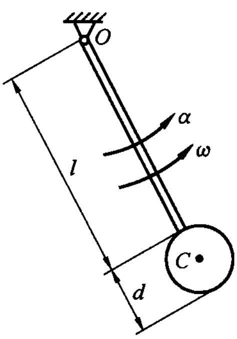
其变分为 $\delta y_B = L\cos\theta \cdot \delta\theta$， $\delta y_C = 2L\cos\theta \cdot \delta\theta$

代入式(1)解得 $y = \dfrac{P}{2k} + L_0$

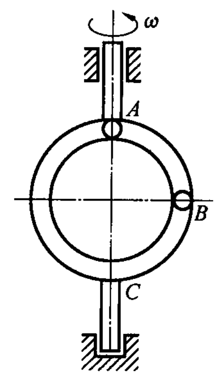
哈尔滨工业大学2010年(秋)期末
理　论　力　学　试　题

一、单摆由长为l的均质细杆和直径为d的均质圆盘固结而成，且$l=3d$，杆和盘的质量均为m。图示瞬时单摆绕轴O的角速度为ω，角加速度为α。求惯性力系向转轴O处简化的主矢与主矩，方向在图中标明。(10分)

二、图示圆环半径为R，以角速度ω绕铅直轴AC定轴转动，圆环对AC轴的转动惯量为J，且$J=2mR^2$，在圆环中的点A放一质量为m的小球，小球受到干扰由点A沿圆环向下运动，不计各处摩擦。求小球到达B点时，圆环的角速度，小球的绝对速度、牵连速度与相对速度的大小。(10分)



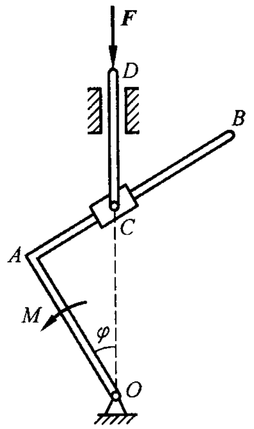
题一图



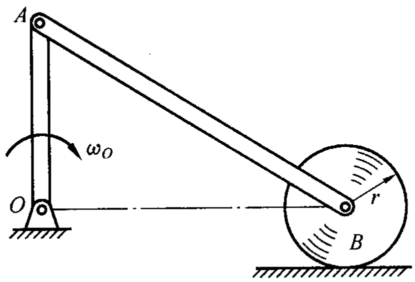
题二图

三、弯成直角的曲杆OAB受力偶M作用，在曲杆的AB段装有套筒C，套筒又与铅直杆DC铰接于C，O点与DC位于同一铅垂线上。不计各构件自重与各处摩擦，$OA=R$，$\varphi=30°$。用虚位移原理求机构在此位置平衡时，铅直力与力偶矩M之间的关系。(10分)

四、均质曲柄OA绕轴O转动，通过连杆AB带动半径为r的均质圆盘B在水平面上做纯滚动。机构的尺寸$OA=3r$，$AB=6r$，各构件的质量为$m_{OA}=m_1$，$m_{AB}=0$，$m_B=m_2$，且$m_1=2m_2$。在图示位置曲柄OA铅直，角速度为ω_O，求当曲柄OA转到水平位置时的角速度。(10分)



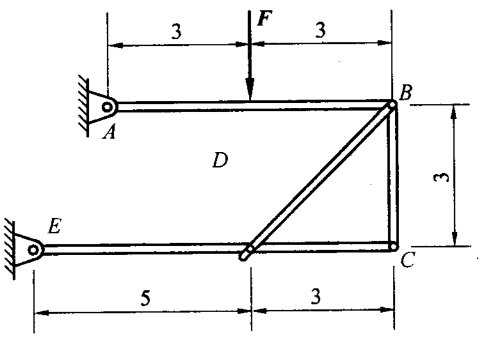
题三图



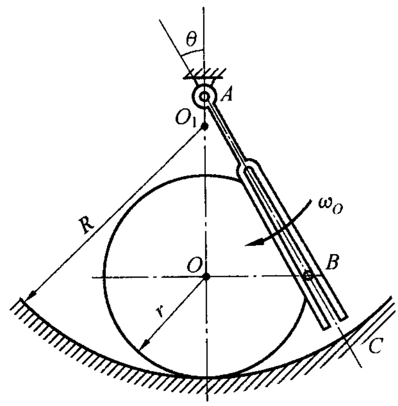
题四图

五、图示平面结构，尺寸单位为 m，不计各构件自重，铅直载荷 $F=60$ kN。求铰链支座 A，E 处的约束力，BC，BD 杆受力。(15 分)

六、拨叉 AC 以匀角速度 $\omega_O=2$ rad/s 绕轴 A 转动，并通过其上的滑槽拨动圆柱体上的销子 B，使半径为 r 的圆柱体沿半径为 R 的圆弧表面做纯滚动，$R=250$ mm，$r=100$ mm。在图示瞬时，$\theta=30°$，销子 B 与圆柱体中心点 O 在同一水平线上，求此时圆柱体中心点 O 的速度与加速度。(15 分)



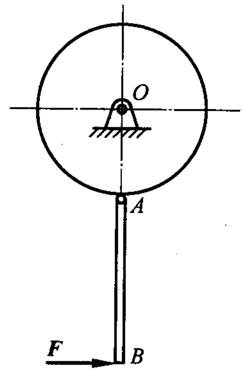
题五图



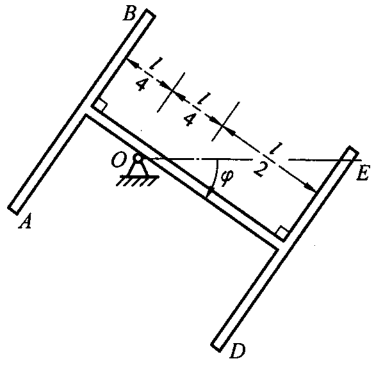
题六图

七、均质圆盘质量为 m，半径为 r，可绕轴 O 转动。均质杆 AB 长为 l，质量也为 m，用铰链 A 与圆盘边缘相连。初始系统静止，AB 杆铅直。今在 AB 杆的 B 端突加一水平力 $\boldsymbol{F}$，如图所示，不计各处摩擦。求当力 $\boldsymbol{F}$ 作用瞬时，圆盘与杆的角加速度，铰链 O 处的约束力。(15 分)

八、如图所示，工字形构件由三根质量均为 m，长均为 l 的均质细长杆焊接为一体，绕轴 O 转动。初始静止，中间一杆处于水平位置时系统开始运动。要求用拉格朗日方程求其角加速度与角速度，并用其他方法验证结果。(15 分)



题七图

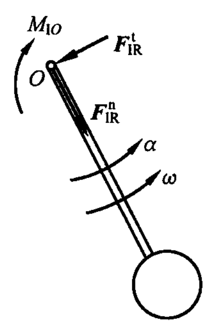


题八图

哈尔滨工业大学2010年(秋)期末理论力学试题解答

一、解:单摆对轴 O 的转动惯量为

$$J_O=\frac{1}{3}ml^2+\frac{1}{2}m\left(\frac{d}{2}\right)^2+m\left(l+\frac{d}{2}\right)^2=\frac{123}{8}md^2$$



题一解答图

质心直接看出位于距 O 为 $\frac{5}{2}d$ 处,或用下式求得

$$x_C=\frac{m\cdot\frac{l}{2}+m\cdot\left(l+\frac{d}{2}\right)}{2m}=\frac{5}{2}d$$

则质心的切向加速度 $a_C^t=\frac{5}{2}d\alpha$,法向加速度为 $a_C^n=\frac{5}{2}d\omega^2$。

其切向惯性力大小为 $F_{IR}^t=2m\cdot a_C^t=5md\alpha$

法向惯性力大小为 $F_{IR}^n=2m\cdot a_C^n=5md\omega^2$

方向如图所示,其惯性力矩大小为 $M_{IO}=J_O\alpha=\frac{123}{8}md^2\alpha$

转向也如图所示。

二、解:因系统对转轴的力矩为零,系统对转轴的动量矩守恒。在初始位置

$$L_A=J\omega$$

在 B 位置

$$L_B=(J+mR^2)\omega_B$$

因 $L_B=L_A$,有

$$(J+mR^2)\omega_B=J\omega$$

解得

$$\omega_B=\frac{J}{J+mR^2}\omega=\frac{2mR^2}{3mR^2}\omega=\frac{2}{3}\omega$$

系统在初始位置时,系统的动能为 $T_1=\frac{1}{2}J\omega^2=mR^2\omega^2$,在 B 位置时,系统的动能为

$$T_2=\frac{1}{2}J\omega_B^2+\frac{1}{2}mv_a^2=\frac{4}{9}mR^2\omega^2+\frac{1}{2}mv_a^2$$

所有力做的功为 $W=mgR$,由动能定理 $T_2-T_1=W$,有

$$\frac{4}{9}mR^2\omega^2+\frac{1}{2}mv_a^2-mR^2\omega^2=mgR$$

解得
$$v_a=\sqrt{\frac{10}{9}R^2\omega^2+2gR}$$

而
$$v_e=R\omega_B=\frac{2}{3}R\omega$$

则相对速度大小为
$$v_r=\sqrt{v_a^2-v_e^2}=\sqrt{\frac{2}{3}R^2\omega^2+2gR}$$

三、解:用虚速度法。设杆 OAB 有图示的角速度 ω,把动系建于杆 OAB 上,动点为滑块 C,则速度分析图如图所示

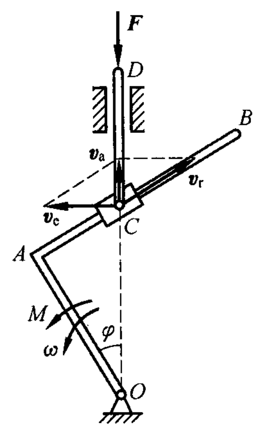
$$v_e=OC\cdot\omega=\frac{2r}{\sqrt{3}}$$

$$v_a=v_e\tan\varphi=\frac{2}{3}r\omega$$

虚速度法方程为 $M\omega-F\cdot v_a=0$

解得

$$M=\frac{2}{3}Fr$$



题三解答图

四、解:运动学分析为,在初瞬时,杆 AB 为瞬时平移,点 A,B 的速度相同。而在 OA 杆处于水平位置时,点 B 为杆 AB 的速度瞬心,即轮 B 不动,如图所示。

初始时刻
$$v_A=3r\omega_0$$
$$v_B=v_A=3r\omega_0=r\omega_B$$

系统的初动能为

$$T_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}m_1\ (3r)^2\cdot\omega_0^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}m_2r^2\cdot\omega_B^2=\frac{39}{4}m_2r^2\omega_0^2$$

OA 杆处于水平位置时的动能为

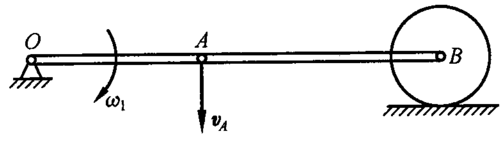
$$T_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}m_1(3r)^2\cdot\omega_1^2=3m_2r^2\omega_1^2$$

力所做的功为
$$W=m_1g\cdot\frac{3}{2}r=3m_2gr$$

由动能定理 $T_2-T_1=W$,有

$$3m_2r^2\omega_1^2-\frac{39}{4}m_2r^2\omega_0^2=3m_2gr$$

解得
$$\omega_1=\sqrt{\frac{g}{r}+\frac{13}{4}\omega_0^2}$$



题四解答图

五、解：首先取 AB 杆，其受力图如图(a)所示，可看出 $F_{Ay}=\frac{F}{2}=30\ \text{kN}$，此结果也可由方程 $\sum M_B=0$ 求出。即

$$F_{Ay}=30\ \text{kN}$$

然后取整体，其受力图如图(b)所示，由

$$\sum M_E=0,\quad -3F_{Ax}+2F_{Ay}-5F=0$$

求出

$$F_{Ax}=-80\ \text{kN}$$

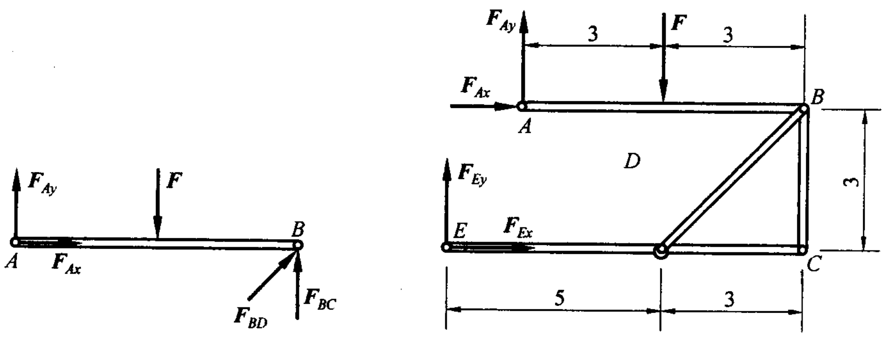
由

$$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}+F_{Ex}=0$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{Ay}+F_{Ey}-F=0$$

分别解得

$$F_{Ex}=80\ \text{kN},\quad F_{Ey}=30\ \text{kN}$$



题五解答图

最后对图(a)，由

$$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}+F_{BD}\cos 45^\circ=0$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{Ay}-F+F_{BD}\sin 45^\circ+F_{BC}=0$$

分别解得

$$F_{BD}=80\sqrt{2}\ \text{kN}(压),\quad F_{BC}-50\ \text{kN}(拉)$$

六、解：圆柱体的速度瞬心为点 P，则动系建于拨叉 AC 上，动点选为圆柱体上的销子 B，如图(a)所示，有

$$\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$$

式中 $v_e=AB\cdot\omega_O=400\ \text{mm/s}$，而 $v_a\sin 15^\circ=v_e$，解得圆柱体的角速度为

$$\omega=\frac{v_a}{BP}=\frac{v_a}{\sqrt{2}r}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin 15^\circ}$$

则圆柱体中心 O 的速度为

$$v_O=r\omega=\frac{200\sqrt{2}}{\sin 15^\circ}=1\ 092.8\ \text{mm/s}$$

或

$$v_O=1.093\ \text{m/s}$$

因圆柱体中心 O 的轨迹为以 $O_1O=150\ \text{mm}$ 的圆，所以

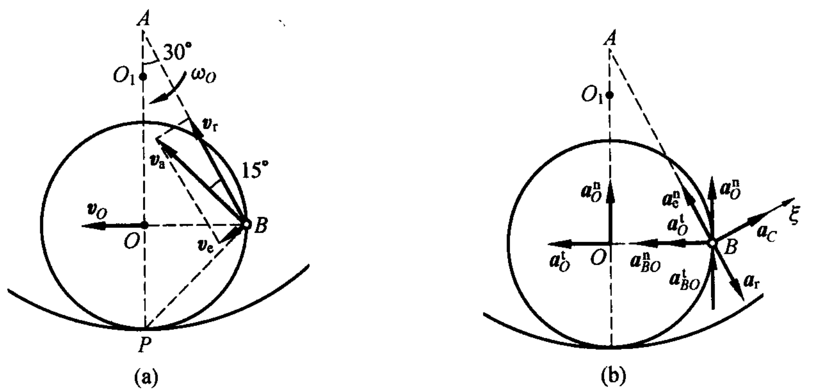
$$a_O^n=\frac{v_O^2}{O_1O}=7\ 961.4\ \text{mm/s}^2$$

或

$$a_O^n=7.96\ \text{m/s}^2$$

选圆柱体中心 O 为基点，求圆柱体上销子 B 的加速度，如图(b)所示，有

$$\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_O^n+\boldsymbol{a}_O^t+\boldsymbol{a}_{BO}^t+\boldsymbol{a}_{BO}^n \tag{1}$$



题六解答图

式中
$$a_{BO}^n = r\omega^2 = \frac{800}{\sin^2 15°} = 11\ 942.5\ \mathrm{mm/s^2}$$

同时 $a_O^t = r\alpha, a_{BO}^t = r\alpha$，式中 α 为圆柱体的角加速度，即 $a_O^t = a_{BO}^t$。

同时把动系建于拨叉 AC 上，动点选为圆柱体上的销子 B，如图(b)所示，有

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e^n + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C \tag{2}$$

式(2)中，科氏加速度 $\boldsymbol{a}_C = 2\boldsymbol{\omega}_O \times \boldsymbol{v}_r$，由图(a)，$v_r = v_a \cos 15° = v_e \cot 15°$，有

$$a_C = 2\omega_O v_r = 5\ 971.2\ \mathrm{mm/s^2}$$

由式(1)与式(2)，有

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_B$$

即
$$\boldsymbol{a}_O^n + \boldsymbol{a}_O^t + \boldsymbol{a}_{BO}^t + \boldsymbol{a}_{BO}^n = \boldsymbol{a}_e^n + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C$$

把此式沿图(b)所示 ξ 轴投影，有

$$a_O^n \cos 60° - a_O^t \cos 30° + a_{BO}^t \cos 60° - a_{BO}^n \cos 30° = a_C$$

解得
$$a_O^t = -33\ 696.7\ \mathrm{mm/s^2}(\rightarrow)$$

或
$$a_O^t = -33.697\ \mathrm{m/s^2}(\rightarrow)$$

七、解：运动学分析如图(a)所示，初瞬时，两构件均没有角速度，有

$$a_A^t = r\alpha_O$$

选圆盘上点 A 为基点，求杆质心 D 的加速度，有

$$\boldsymbol{a}_D = \boldsymbol{a}_A^t + \boldsymbol{a}_{DA}^t$$

式中
$$a_{DA}^t = \frac{l}{2}\alpha_{AB}$$

则
$$a_D = r\alpha_O + \frac{l}{2}\alpha_{AB} \tag{1}$$

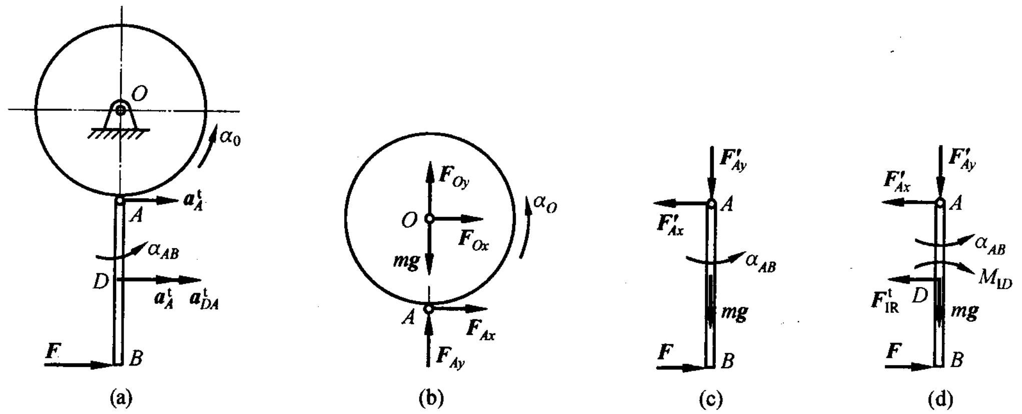
分别取圆盘与杆，如图(b)与图(c)所示，对圆盘，由 $J_O\alpha = \sum M_O$ 有

$$\frac{1}{2}mr^2\alpha_O = F_{Ax} \cdot r$$

即
$$F_{Ax} = \frac{1}{2}mr\alpha_O \tag{2}$$

杆做平面运动，由刚体平面运动微分方程

即
$$ma_{Cx} = \sum F_x, \quad ma_{Cy} = \sum F_y$$



题七解答图

与

$$J_C\alpha=\sum M_C$$

有

$$ma_D=F-F'_{Ax} \tag{3}$$

$$0=mg-F'_{Ay} \tag{4}$$

$$\frac{1}{12}ml^2\cdot\alpha_{AB}=F\cdot\frac{l}{2}+F'_{Ax}\cdot\frac{l}{2} \tag{5}$$

把方程(1),(2),(3),(4),(5)联立,共有 $a_D,\alpha_O,\alpha_{AB},F_{Ax},F_{Ay}$ 五个未知数,联立求解可得

$$\alpha_O=-\frac{2F}{3mr},\quad \alpha_{AB}=\frac{4F}{ml}$$

$$F_{Ax}=-\frac{F}{3},\quad F_{Ay}=-mg$$

对图(b),由

$$\sum F_x=0,\quad F_{Ox}+F_{Ax}=0$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{Oy}+F_{Ay}-mg=0$$

分别解得

$$F_{Ox}=\frac{F}{3},\quad F_{Oy}=2mg$$

对 AB 杆,也可加惯性力如图(d)所示,用动静法求解。

$$F_{IR}^t=ma_D=m(r\alpha_O+\frac{l}{2}\alpha_{AB})$$

$$M_{ID}=\frac{1}{12}ml^2\alpha_{AB}$$

由

$$\sum M_A=0,\quad F\cdot l-F_{IR}^t\cdot\frac{l}{2}-M_{ID}=0 \tag{1}$$

$$\sum F_x=0,\quad F-F_{IR}^t-F'_{Ax}=0 \tag{2}$$

再考虑到

$$\frac{1}{2}mr^2\alpha_O=F_{Ax}\cdot r \tag{3}$$

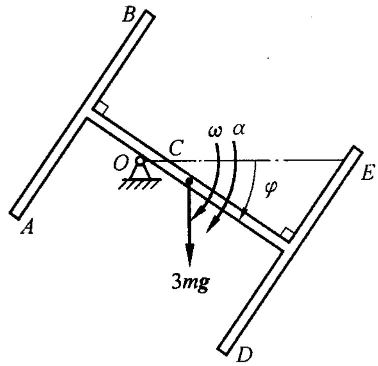
三个方程联立求解,同样可得

$$\alpha_O=-\frac{2F}{3mr},\quad \alpha_{AB}=\frac{4F}{ml},\quad F'_{Ax}=-\frac{F}{3}$$

然后对图(b)求解。

八、解:系统具有一个自由度,选角 φ 为广义坐标,刚体为定轴转动,其动能为

$$T=\frac{1}{2}J_O\omega^2=\frac{1}{2}J_O\dot{\varphi}^2$$



题八解答图

而杆 AB 对轴 O 的转动惯量为

$$J_{OAB}=\frac{1}{12}ml^2+m\left(\frac{l}{4}\right)^2=\frac{7}{48}ml^2$$

中间杆对轴 O 的转动惯量为

$$J_{O2}=\frac{1}{12}ml^2+m\left(\frac{l}{4}\right)^2=\frac{7}{48}ml^2$$

杆 DE 对轴 O 的转动惯量为

$$J_{ODE}=\frac{1}{12}ml^2+m\left(\frac{3}{4}l\right)^2=\frac{31}{48}ml^2$$

有　$$J_O=J_{OAB}+J_{O2}+J_{ODE}=\frac{45}{48}ml^2=\frac{15}{16}ml^2$$

则系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}J_O\omega^2=\frac{15}{32}ml^2\dot{\varphi}^2$$

系统为保守系统，其势能为

$$V=-3mg\cdot\frac{l}{4}\sin\varphi$$

系统的拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{15}{32}ml^2\dot{\varphi}^2+\frac{3}{4}mgl\sin\varphi$$

由　$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0$$

得　$$\frac{15}{16}ml^2\ddot{\varphi}-\frac{3}{4}mgl\cos\varphi=0$$

即杆的角加速度为　$$\alpha=\ddot{\varphi}=\frac{4}{5}\frac{g}{l}\cos\varphi$$

由　$$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\varphi}$$

有　$$\alpha=\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\varphi}=\frac{4}{5}\frac{g}{l}\cos\varphi$$

分离变量积分有　$$\int_0^\omega\omega\mathrm{d}\omega=\int_0^\varphi\frac{4}{5}\frac{g}{l}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi$$

得杆的角速度为　$$\omega=\sqrt{\frac{8}{5}\frac{g}{l}\sin\varphi}$$

验证解法 1:用刚体绕定轴转动微分方程

$$J_O\alpha=\sum M_O$$

有　$$\frac{15}{16}ml^2\alpha=3mg\cdot\frac{l}{4}\cos\varphi$$

得　$$\alpha=\ddot{\varphi}=\frac{4}{5}\frac{g}{l}\cos\varphi$$

然后积分得角速度。

验证解法 2:用动能定理

$$T_1=0$$

$$T_2=\frac{1}{2}J_O\omega^2=\frac{15}{32}ml^2\dot{\varphi}^2$$

力做功为
$$W=3mg\cdot\frac{l}{4}\sin\varphi$$

由动能定理 $T_2-T_1=W$,有

$$\frac{15}{32}ml^2\dot{\varphi}^2-0=\frac{3}{4}mgl\sin\varphi \tag{1}$$

得角速度为
$$\omega=\sqrt{\frac{8}{5}\frac{g}{l}\sin\varphi}$$

把式(1)对时间求一阶导数,有

$$\frac{15}{16}ml^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}=\frac{3}{4}mgl\dot{\varphi}\cos\varphi$$

得角加速度为
$$\alpha=\ddot{\varphi}=\frac{4}{5}\frac{g}{l}\cos\varphi$$

哈尔滨工业大学2011年(春)期末
理　论　力　学　试　题

一、是非判断题(共5题,每题1分。把答案填入括号内。)

1. 平面力偶系有3个独立的平衡方程,可列为基本式、二矩式或三矩式。　(　　)

2. 刚体上各点均做圆周运动,则此刚体必定为定轴转动。　(　　)

3. 刚体做平面运动时,平面图形上两点的加速度在两点连线上的投影一定不相等。　(　　)

4. 不论刚体做何种运动,其惯性力系简化的主矩为 $\boldsymbol{F}_{IR}=-m\boldsymbol{a}_C$,其方向因和质心加速度相反,所以应一律画在质心上。　(　　)

5. 刚体定轴转动时,消除轴承附加动约束力的条件是,转轴为惯性主轴。　(　　)

二、选择题(共5题,每题3分)

1. 一力系向一点简化,其主矢 $\boldsymbol{F}_R=0$,则(　　)。

A. 该力系必定是平衡力系

B. 该力系必定不是平衡力系

C. 当该力系的主矩也为零时,该力系为平衡力系

D. 该力系最后可简化为一合力

2. 一空间力系,其所有力的作用线均通过某轴,则其最多的独立平衡方程的个数为(　　)。

A. 3个　　B. 4个　　C. 5个　　D. 6个

3. 下列说法正确的是(　　)

A. 刚体平移是刚体平面运动的特殊情况

B. 刚体平面运动是刚体平移的特殊情况

C. 刚体定轴转动是刚体平面运动的特殊情况

D. 刚体上只要有一条直线始终与自身的初始位置平行,此刚体的运动即为平移

4. 质点系的动量沿 x 轴方向守恒,则质点系的外力(　　)。

A. 在任意轴投影之和为零

B. 在 y 轴投影之和为零

C. 在 x 轴投影之和为零

D. 条件不够,不能判断

5. 质点系的内力(　　)。

A. 能改变质点系的总动能

B. 不能改变每个质点的动能

C. 能改变质点系质心的运动

D. 能改变质点系的总动量矩

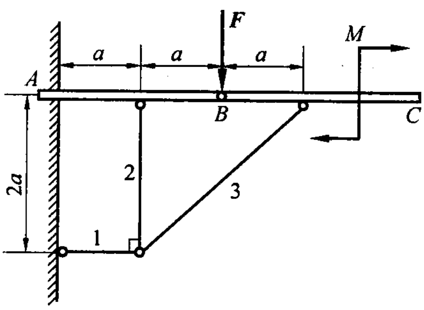
三、计算题(20 分)

图示平面结构由水平梁 AB、BC 和三根杆组成,力偶矩 $M=10\ \text{kN}\cdot\text{m}$,铅直力 $F=20\ \text{kN}$(可认为作用在销钉 B 上),尺寸 $a=1\ \text{m}$,不计各构件自重。求三根杆受力和 A 处的约束力。

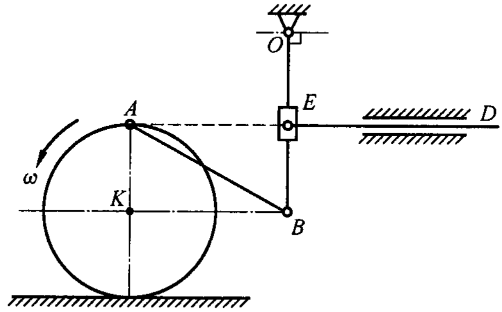
四、计算题(20 分)

图示平面机构,半径为 R 的轮以匀角速度 ω 在水平面上纯滚动。连杆 AB 长为 $2R$,一端与轮缘铰接,一端与杆 OB 铰接。摇杆 OB 长为 $2R$,滑块 E 可在 OB 上滑动,滑块 E 与一水平滑杆 ED 铰接。图示瞬时 AK 与 OB 均处于铅直位置,$OE=R$,且 A、E、D 三点处于同一水平线上。

求:此瞬时,摇杆 OB 的角速度和角加速度,滑杆 ED 的速度和加速度。



题三图



题四图

五、计算题(25 分)

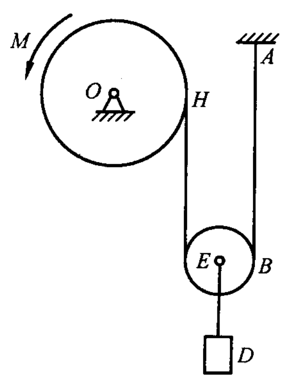
均质定滑轮质量为 m,半径为 $2R$,其上作用一常值力偶矩 $M=4mgR$。均质动滑轮质量也为 m,半径为 R。物块 D 的质量也为 m。不计柔软绳索自重,HE,ED,AB 段皆处于铅直位置。系统由静止开始运动。

求:物块 D 上升高度为 h 时的速度和加速度;HE,ED,AB 段绳索的拉力。

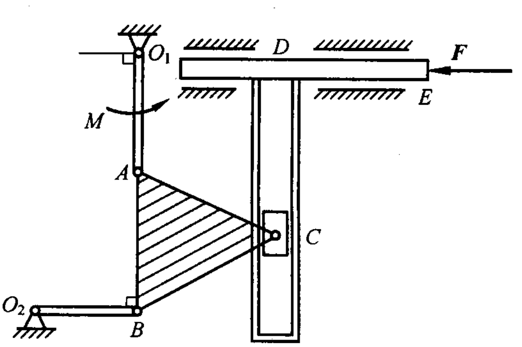
六、计算题(15 分)

注意:一校区同学做此题,不做七题。二校区同学不做此题。

注意:要求用虚位移原理做此题,用其他方法做不给分。



题五图



题六图

不计图示平面机构中各构件自重,不计各处摩擦。O_1A 杆处于铅直位置,长为 R,其上作用矩为 M 的力偶。ABC 为一等边三角形,O_2B 杆处于水平位置,点 O_1,A,B 处于同一铅直线上。滑块 C 可在铅直滑槽中滑动,水平滑杆 DE 的 E 处作用一水平力 $\boldsymbol{F}$。

求：机构平衡时，力偶矩 M 与力 F 的关系。

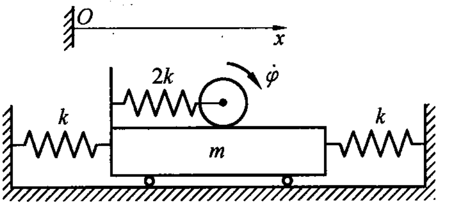
七、计算题(15 分)

注意：二校区同学做此题，不做六题。

注意：要求用拉格朗日方程做此题，用其他方法做不给分。

图示矩形块质量为 m，不计与地面的摩擦，用刚度系数均为 k 不计质量的水平弹簧连接，如图所示。矩形块上有一质量为 $\frac{m}{2}$、半径为 r 的均质轮，沿矩形块的水平面纯滚动，其轮心连接一刚度系数为 $2k$ 不计质量的水平弹簧。

求：以矩形块的水平位移 x 和轮的转角 φ 为广义坐标的系统的运动微分方程。(x,φ 均从弹簧处于原长位置算起。)



题七图

哈尔滨工业大学 2011 年(春)期末理论力学试题解答

一、1. ×；2. ×；3. ×；4. ×；5. ×

1. **提示**：平面任意力系有 3 个独立的平衡方程，可列为基本式、二矩式或三矩式。但对平面力偶系，因力偶中两个力在任意轴投影之和为零，所以基本式、二矩式中投影平衡方程不包含力偶系。平面力偶系只有一个独立平衡方程，所以此题不对。

2. **提示**：如图(a)所示，O_1A 杆与 O_2B 杆等长平行，AB 杆为平移，其上各点均做圆周运动。刚体定点运动时，其上各点也做圆周运动，所以此题不对。

3. **提示**：如图(b)所示，刚体做平面运动，由求加速度的基点法公式

$$\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{a}_{BA}^{n}+\boldsymbol{a}_{BA}^{t}$$

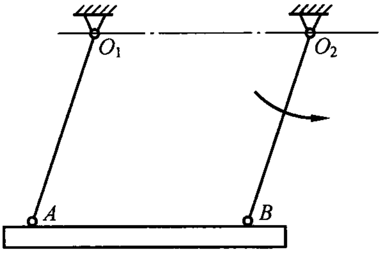
把此式沿 AB 连线投影，有

$$[\boldsymbol{a}_B]_{AB}=[\boldsymbol{a}_A]_{AB}+[\boldsymbol{a}_{BA}^{n}]_{AB}$$

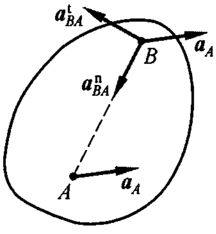
其中 $a_{BA}^{n}=AB\cdot\omega^2$，一般情况下，角速度 $\omega\neq0$，但当角速度 $\omega=0$ 时，$a_{BA}^{n}=0$，此时有

$$[\boldsymbol{a}_B]_{AB}=[\boldsymbol{a}_A]_{AB}$$

所以，刚体做平面运动时，平面图形上两点的加速度在两点连线上的投影有相等的时候。



(a)



(b)

题一提示图

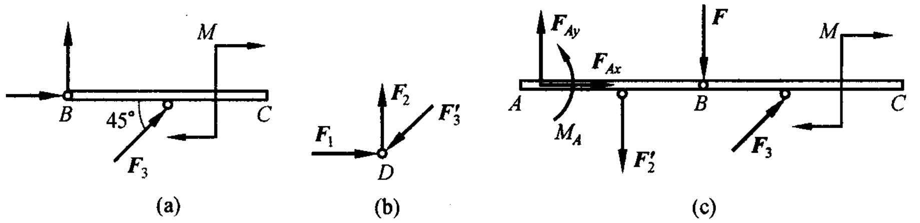
4. **提示**：刚体惯性力系简化的主矩为 $F_{IR}=-ma_C$，其大小与方向与简化中心无关，但其作用点与简化中心有关。为方便计，刚体平移与平面运动时，向其质心简化，应画在质心上，刚体定轴转动时，一般选转轴上一点为简化中心，所以应画在转轴上这一点。

5. **提示**：应为过质心的惯性主轴，称其为中心惯性主轴。

二、1. C；2. C；3. C；4. C；5. A

三、**解**：先取 BC 构件，其受力图如图(a)所示，由

$$\sum M_B=0,\quad F_3\sin 45°\cdot a-M=0,\quad 解得 F_3=10\sqrt{2}\ \mathrm{kN}(受压)$$



题三解答图

取三根杆的交点 D，受力图如图(b)所示，由

$$\sum F_x=0,\quad F_1-F'_3\sin 45°=0,\quad 解得 F_1=10\ \mathrm{kN}(受压)$$

$$\sum F_y=0,\quad F_2-F'_3\cos 45°=0,\quad 解得 F_2=10\ \mathrm{kN}(受拉)$$

取 ABC 为一体，其受力图如图(c)所示，由

$$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}+F_3\cos 45°=0,\quad 解得 F_{Ax}=-10\ \mathrm{kN}$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{Ay}-F_2-F+F_3\sin 45°=0,\quad 解得 F_{Ay}=20\ \mathrm{kN}$$

$$\sum M_A=0,\quad M_A-F_2\cdot a-F\cdot 2a+F_3\sin 45°\cdot 3a-M=0$$

解得
$$M_A=30\ \mathrm{kN\cdot m}$$

四、**解**：轮纯滚动，则 $v_A=2R\omega$，杆 AB 为瞬时平移，则 $\omega_{AB}=0$，如图(a)所示，有

$$v_B=2R\omega$$

所以，此瞬时，摇杆 OB 的角速度为

$$\omega_{OB}=\frac{v_B}{2R}=\omega(顺时针)$$

把动系建于 OB 杆上，动点为套筒 E，由 $\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$，如图(a)所示，可看出 $v_r=0$，有

$$v_a=v_{ED}=v_e=R\omega(\leftarrow)$$

此即为此瞬时，滑杆 ED 的速度。

选轮心 K 为基点，求得 $a_A=R\omega^2(\downarrow)$，如图(b)所示。

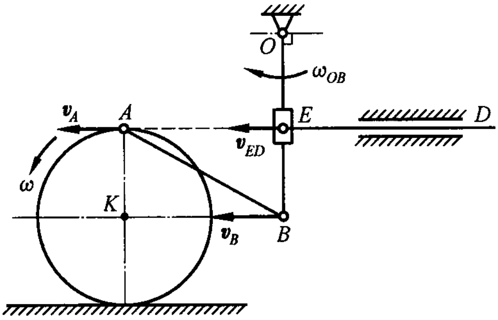
选点 A 为基点，由　　$\boldsymbol{a}_B^n+\boldsymbol{a}_B^t=\boldsymbol{a}_A^n+\boldsymbol{a}_{BA}^n+\boldsymbol{a}_{BA}^t$

如图(b)所示，式中

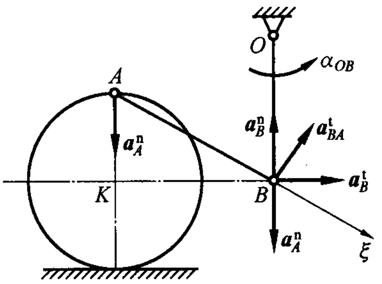
$$a_B^n=2R\omega^2,\quad a_{BA}^n=AB\cdot\omega_{AB}^2=0$$

沿图示 ξ 轴投影，有　　$a_B^t\cos 30°-a_B^n\cos 60°=a_A^n\cos 60°$

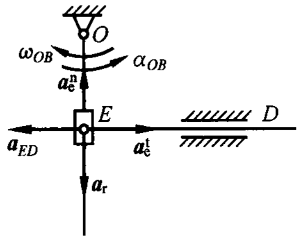
解得
$$a_B^t=-\sqrt{3}R\omega^2$$



(a)



(b)



(c)

题四解答图

则此瞬时，摇杆 OB 的角加速度为

$$\alpha_{OB}=\frac{a_B^t}{2R}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\omega^2\text{（逆时针）}$$

把动系建于 OB 杆上，动点为套筒 E，由

$$\boldsymbol{a}_a=\boldsymbol{a}_e^t+\boldsymbol{a}_e^n+\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_C$$

如图(c)所示，式中

$$a_e^t=R\alpha_{OB}=\frac{\sqrt{3}}{2}R\omega^2,\quad a_C=0$$

沿水平轴投影，有　$-a_a=a_e^t$

解得此瞬时，滑杆 ED 的加速度为

$$a_{ED}=a_a=\frac{\sqrt{3}}{2}R\omega^2\ (\rightarrow)$$

五、解：取整体，如图(a)所示，运动学关系为

$$v_D=v_E,\quad \omega_B=\frac{v_E}{R},\quad \omega_O=\frac{2v_E}{2R}=\frac{v_E}{R}$$

用动能定理　$T_1=0$

$$T_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m\,(2R)^2\cdot\omega_O^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}mR^2\omega_E^2+\frac{1}{2}mv_D^2=\frac{9}{4}mv_D^2$$

所有力做功为　$W=M\varphi-2mgh=2mgh$

式中　$2R\varphi=2h$

由动能定理 $T_2-T_1=W$，有

$$\frac{9}{4}mv_D^2-0=2mgh\tag{1}$$

得物块 D 上升高度为 h 时的速度为

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{v_D=\sqrt{\frac{8}{9}gh}=\frac{2}{3}\sqrt{2gh}}$$

把式(1)对时间求一阶导数有

$$\frac{9}{2}mv_Da_D=2mgv_D$$

得物块 D 上升高度为 h 时的加速度为

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{a_D=\frac{4}{9}g}$$

取物块 D,其受力图如图(b)所示,由

$$ma_D=F_{T1}-mg$$

解得 ED 段绳索的拉力为 $$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{F_{T1}=\frac{13}{9}mg}$$

取轮 E,其受力图如图(c)所示,由刚体平面运动微分方程,对速度瞬心 B 的动量矩定理

$$J_B\alpha_E=\sum M_E$$

有 $$\frac{3}{2}mR^2\alpha_E=F_{EH}\cdot 2R-(F'_{T1}+mg)\cdot 2R$$

解得 EH 段绳索的拉力为

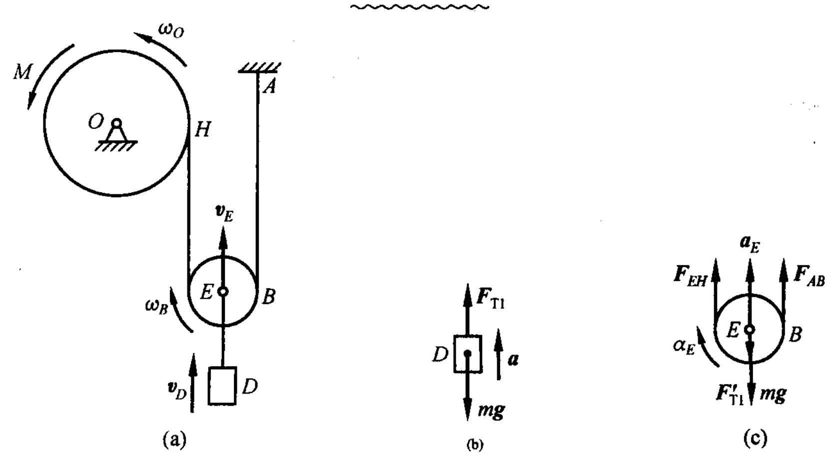
$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{F_{EH}=\frac{14}{9}mg}$$

由质心运动定理 $$ma_{Cy}=\sum F_y$$

有 $$ma_E=F_{EH}+F_{AB}-F'_{T1}-mg$$

解得 AB 段绳索的拉力为

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{F_{AB}=\frac{4}{3}mg}$$



题五解答图

六、解:用虚速度法,设给 O_1A 杆一虚角速度 ω,则点 A 一向右的虚速度 v_A 有 $v_A=R\omega$,如图所示,由虚速度法方程有

$$M\omega-F\cdot v_{CD}=0$$

设三角板边长为 l,其速度瞬心为点 B,有

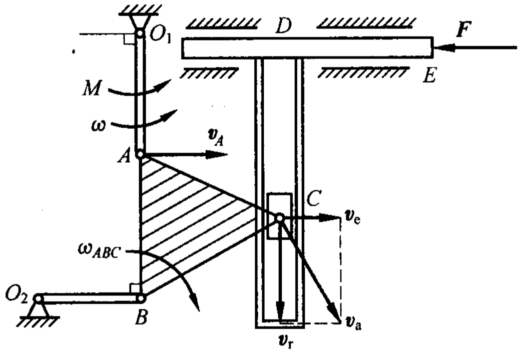
$$\omega_{ABC}=\frac{v_A}{l}$$

则　　$v_C=v_a=l\omega_{ABC}=v_A$

把动系建于 CDE 杆上，动点选为滑块 C，由图中可看出

$$v_{CD}=v_e=v_A\sin 30°=\frac{1}{2}R\omega$$

有　$M\omega-F\cdot\frac{1}{2}R\omega=0$，　$M=\frac{1}{2}FR$



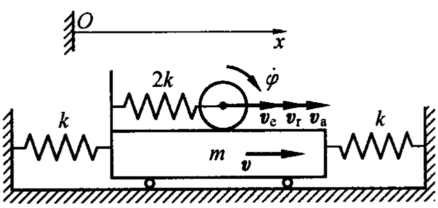
题六解答图

七、解：按题目所给广义坐标，把动系建于矩形块上，如图所示，运动学关系为

$$\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$$

式中 $v_e=\dot{x}$，$v_r=r\dot{\varphi}$，则

$$v_a=v_e+v_r=\dot{x}+r\dot{\varphi}$$



题七解答图

系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{2}\cdot(\dot{x}+r\dot{\varphi})^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{m}{2}r^2\cdot\dot{\varphi}^2$$

$$=\frac{3}{4}m\dot{x}^2+\frac{3}{8}mr\dot{\varphi}^2+\frac{m}{2}r\dot{x}\dot{\varphi}$$

系统的势能为　　$V=\frac{1}{2}(2k)x^2+\frac{1}{2}(2k)r^2\varphi^2=kx^2+kr^2\varphi^2$

拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{3}{4}m\dot{x}^2+\frac{3}{8}mr\dot{\varphi}^2+\frac{m}{2}r\dot{x}\dot{\varphi}-kx^2-kr^2\varphi^2$$

由拉格朗日方程　　$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0$，　$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0$

解得系统的运动微分方程为

$$3m\ddot{x}+mr\ddot{\varphi}+4kx=0$$

$$3mr\ddot{\varphi}+2m\ddot{x}+8kr\varphi=0$$

哈尔滨工业大学2011年(秋)期末
理　论　力　学　试　题

一、是非判断题(共9题,每题1分。把答案填入括号内。)

1. 力沿某坐标轴的分力大小一定等于此力在该轴上的投影大小。（　）

2. 平面汇交力系的平衡方程,选择的两个投影轴必须相互垂直。（　）

3. 平面任意力系有3个独立的平衡方程,可列为三矩式(三个力矩方程),也可列为3个投影方程(即3个方程全为力的投影方程)。（　）

4. 摩擦角为全约束力和其约束处法线间的夹角。（　）

5. 式子$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$与$\frac{dv}{dt}$均表示加速度,所以$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{dv}{dt}$。（　）

6. 科氏加速度的大小在任何时刻、任意位置,都等于其牵连角速度大小与相对速度大小乘积的2倍。（　）

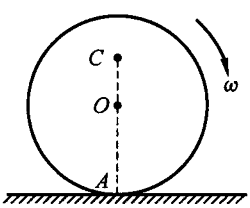
7. 质点系的动量矩定理为$\frac{d\boldsymbol{L}_A}{dt}=\sum \boldsymbol{M}_A(\boldsymbol{F}_i^e)$,式中的点$A$只能是固定点或者是质心(质心可动)。（　）

8. 质点系的虚位移与系统所受的力和时间有关。（　）

9. 不具有质量对称平面的刚体,不存在惯性主轴。（　）

二、填空题(共3题,共16分)

1. 图示偏心圆轮质量为m,半径为R,圆心为O,偏心距为$OC=\frac{R}{2}$,对质心C的回转半径$\rho=\sqrt{\frac{3}{2}}R$。圆轮沿水平面纯滚动,角速度为ω。



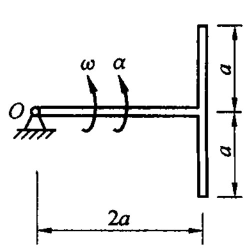
题1图

图示瞬时,C,O,A位于同一铅直线上。则此瞬时,圆轮的动量大小为$p=$________;

圆轮对质心的动量矩大小为$L_C=$________;

圆轮的动能为$T=$____________。(每空2分)

2. 图示均质T形杆质量为m,其角速度为ω,角加速度为α,尺寸a均如图所示。把其惯性力向点O处简化,则其切向惯性力大小为$F_{IR}^{t}=$________;



题2图

法向惯性力大小为$F_{IR}^{n}=$________;

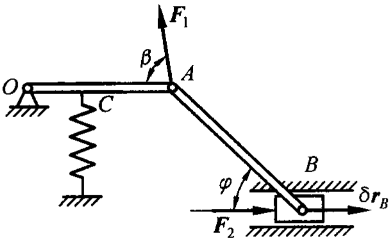
惯性力矩大小为$M_{IO}=$________。(每空2分)

3. 图示平面机构处于静止平衡状态,其上作用有主动力$\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2$,$C$处为一铅直弹簧。$OA$杆长为$l_1$,且$OC=\frac{1}{3}OA$,$AB$杆长为$l_2$。若给出如图所示$B$处的虚位移$\delta \boldsymbol{r}_B$,则:

A点的虚位移大小为$\delta r_A=$________;(2分)

C 点的虚位移大小为 $\delta r_C=$________;(1 分)

OA 杆的虚转角大小为 $\delta\theta=$________。(1 分)



题 3 图

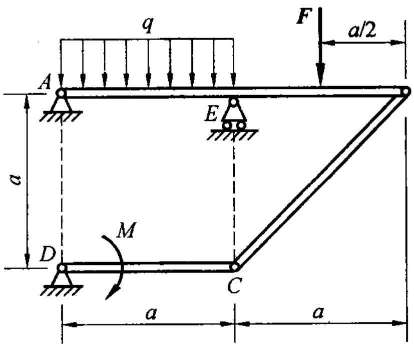
三、计算题(20 分)

图示平面结构由 AB,BC 与 CD 杆组成,均布载荷 $q=8$ kN/m,集中力 $F=20$ kN,力偶矩 $M=10$ kN·m,尺寸 $a=1$ m,不计各构件自重。求 A,D,E 处的约束力。

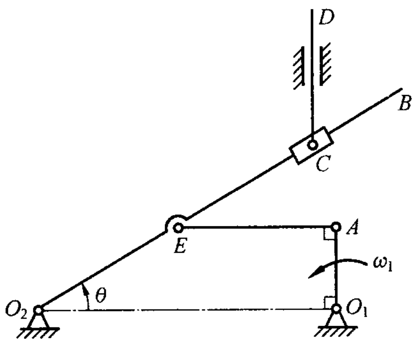
四、计算题(20 分)

图示平面机构,曲柄 O_1A 长为 10 cm,以匀角速度 $\omega_1=10$ rad/s 转动。EA 杆长为 20 cm。图示瞬时 $O_2E=EC=20$ cm,$\theta=30°$。滑块 C 套在摇杆 O_2B 上,滑杆 CD 处于铅直导槽中。

求此瞬时,摇杆 O_2B 的角速度和角加速度,滑杆 CD 的速度和加速度。



题三图



题四图

五、计算题(20 分)

均质轮Ⅰ质量为 m,半径为 R;均质轮Ⅱ质量为 $2m$,半径为 $2R$;杆 AB 长为 $6R$,自重不计。系统由静止沿倾角 $\theta=30°$的粗糙斜面开始运动,两轮均做纯滚动,不计滚动摩阻。

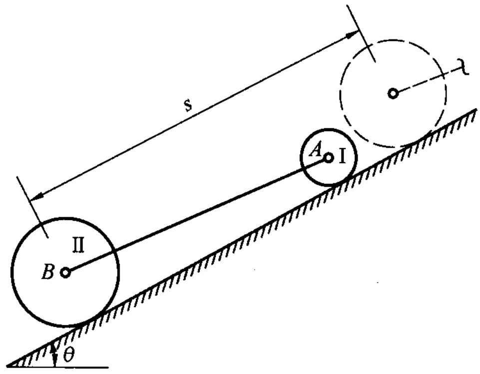
求:轮Ⅱ轮心 B 运动距离为 s 时,轮Ⅱ轮心 B 的速度和加速度,杆 AB 的内力,斜面对轮Ⅱ的约束力。

六、计算题(15 分)

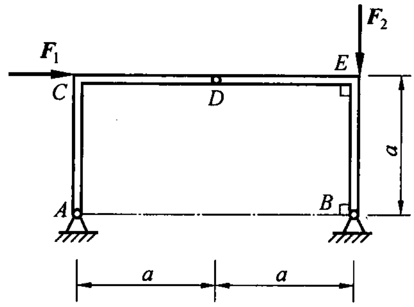
注意:只有理论力学Ⅲ(64 学时)的同学做此题,不做七题。其他同学不做此题。

注意:要求用虚位移原理做此题,用其他方法做不给分。

不计图示平面三铰拱自重,C 处作用水平力 $\boldsymbol{F}_1$,E 处作用铅直力 $\boldsymbol{F}_2$,尺寸 a 如图。用虚位移原理求支座 A 处的约束力。



题五图



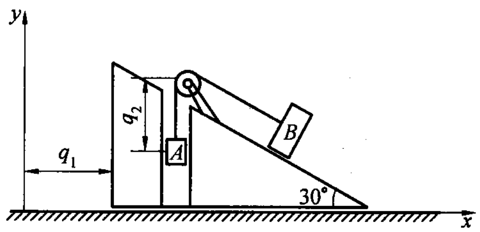
题六图

七、计算题(15 分)

注意:理论力学Ⅲ(64 学时)的同学不做此题,其他同学做此题。

注意:要求用拉格朗日方程做此题,用其他方法做不给分。

图示三角块质量为 $3m$,物块 A,B 的质量均为 m,斜面倾角为30°,各接触处光滑,不计定滑轮的质量与大小,系统由静止开始运动,绳索不可伸长。以图示的 q_1,q_2 为广义坐标,用拉格朗日方程求三角块和物块 A 的运动方程。

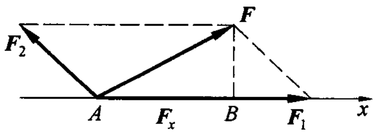


题七图

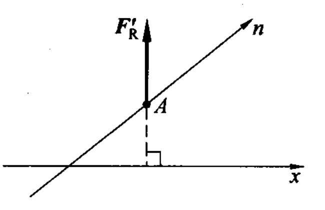
哈尔滨工业大学 2011 年(秋)期末理论力学试题解答

一、1. ×;2. ×;3. ×;4. ×;5. ×;6. ×;7. ×;8. ×;9. ×

1. **提示**:如图所示,力沿某坐标轴的分力大小不等于此力在该轴上的投影大小。



题 1 提示图



题 2 提示图

2. **提示**:如图所示,设平面汇交力系汇交点为 A,其满足平衡方程 $\sum F_x=0$,则力系如图所示,若再满足 $\sum F_n=0$,则力系已为零力系,力系平衡。

所以,平面汇交力系平衡的投影轴,只要两根轴不平行即可。

3. **提示**:平面任意力系包含平面力偶系,由力偶的性质知,力偶中两力在任意轴上投影之和为零,若三个平衡方程全为投影方程,则不能说明此力系平衡。

或者说，平面任意力系简化的中间结果为一个主矢和主矩，即一个力与一个力偶，若三个平衡方程全为投影方程，则主矩不可能为零。所以，三个平衡方程中至少必须有一个力矩平衡方程。

4. **提示**：摩擦角为物体处于临界平衡状态时，全约束力和其约束处法线间的夹角，非临界状态时全约束力和其约束处法线间的夹角不是摩擦角。

5. **提示**：$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$表示的是全加速度，包含切向与法向加速度，即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{a}_\mathrm{t}+\boldsymbol{a}_\mathrm{n}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}$$

而$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$表示的是切向加速度的大小。所以$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\neq\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$。

6. **提示**：计算科氏加速度的公式是 $\boldsymbol{a}_C=2\boldsymbol{\omega}_\mathrm{e}\times\boldsymbol{v}_\mathrm{r}$，教材中大多数题目中 $a_C=2\omega_\mathrm{e}v_\mathrm{r}$，即矢量 $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{e}$ 与 $\boldsymbol{v}_\mathrm{r}$ 夹角为直角。但科氏加速度大小的一般计算公式为 $a_C=2\omega_\mathrm{e}v_\mathrm{r}\sin\theta$，不完全为 $a_C=2\omega_\mathrm{e}v_\mathrm{r}$

7. **提示**：还可以是其他动点，如刚体做平面运动时，若其质心到速度瞬心（用 A 表示）的距离保持不变，则$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_A}{\mathrm{d}t}=\sum\boldsymbol{M}_A(\boldsymbol{F}_i^\mathrm{e})$成立。

8. **提示**：由虚位移的定义可知，质点系的虚位移与系统所受的力和时间无关。实位移与系统所受的力和时间有关。

9. **提示**：由惯性积的定义 $J_{xz}=\sum m_ix_iz_i$，$J_{yz}=\sum m_iy_iz_i$，其不但与质量有关，而且与质量的分布有关。不具有质量对称平面的刚体，其惯性积 $J_{xz}=\sum m_ix_iz_i$，$J_{yz}=\sum m_iy_iz_i$ 也可以为零，存在惯性主轴。

二、1、$p=\frac{3}{2}mR\omega$， $L_C=\frac{3}{2}mR^2\omega$， $T=\frac{15}{8}mR^2\omega^2$

2. $F_\mathrm{IR}^\mathrm{t}=\frac{3}{2}ma\alpha$， $F_\mathrm{IR}^\mathrm{n}=\frac{3}{2}ma\omega^2$， $M_\mathrm{IO}=\frac{17}{6}ma^2\alpha$

3. $\delta r_A=\delta r_B\cot\varphi$， $\delta r_C=\frac{1}{3}\delta r_B\cot\varphi$， $\delta\theta=\frac{1}{l_1}\delta r_A\cot\varphi$

提示：这 3 个题均是计算题，按相应定义（概念）与公式计算即可。

三、解：先取 CD 杆，其受力图如图(a)所示，因杆 BC 为二力杆，所以可把此杆的平衡按力偶系平衡计算，有

$$\sum M_i=0,\quad F_{RD}\cdot a\sin 45^\circ-M=0$$

解得

$$F_{RD}=\sqrt{2}M=10\sqrt{2}\ \mathrm{kN}$$

也可按任意力系，即把 D 处画为两个正交分力列 3 个平衡方程，求得

$$F_{Dx}=-10\ \mathrm{kN},\quad F_{Dy}=-10\ \mathrm{kN}$$

后取 AEB 杆，其受力图如图(b)所示，由

$$\sum M_A=0\quad F_{NE}\cdot a-qa\cdot\frac{a}{2}-F\cdot\frac{3a}{2}-F_{BC}\sin 45^\circ\cdot 2a=0$$

解得

$$F_{NE}=54\ \mathrm{kN}$$

$$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}-F_{BC}\cos 45^\circ=0$$

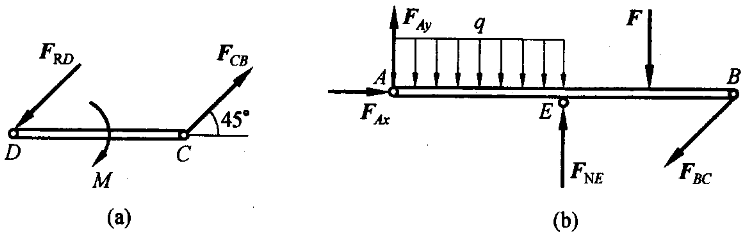
解得

$$F_{Ax}=10\ \mathrm{kN}$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{Ay}-qa+F_{NE}-F-F_{BC}\sin 45^\circ=0$$

解得

$$F_{Ay}=-16\ \text{kN}$$



题三解答图

四、解：EA 杆做平面运动，其速度瞬心为 P，如图(a)所示，则

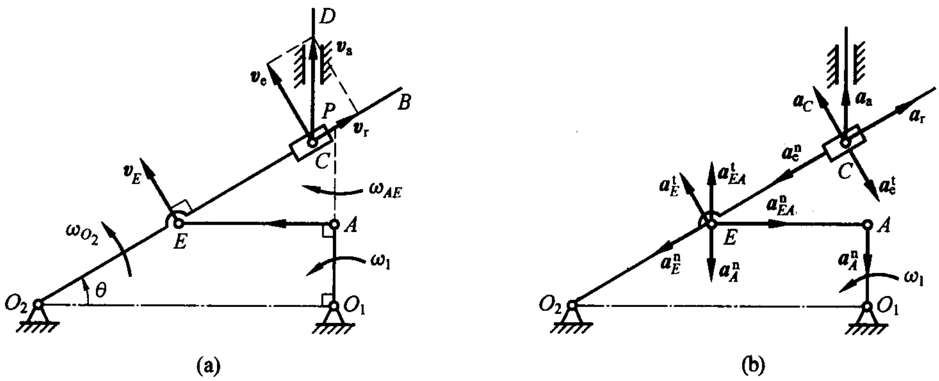
$$v_A=O_1A\cdot\omega_1=100\ \text{cm/s}$$

则 AE 杆的角速度为 $\qquad \omega_{AE}=\dfrac{v_A}{AP}=5\sqrt{3}\ \text{rad/s}$

由速度瞬心法或速度投影定理得 $\qquad v_E=200\ \text{cm/s}$

则 O_2B 杆的角速度为 $\qquad \omega_{O_2}=\dfrac{v_E}{O_2E}=10\ \text{rad/s}$

转动方向如图(a)所示。



题四解答图

把动系建于 O_2B 杆上，动点为滑块 C，由

$$\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$$

解得滑杆 CD 的速度为 $\qquad v_{CD}=v_a=\dfrac{800}{3}\sqrt{3}\ \text{cm/s}$

选点 A 为基点，如图(b)所示，由

$$\boldsymbol{a}_E^t+\boldsymbol{a}_E^n=\boldsymbol{a}_A^n+\boldsymbol{a}_{EA}^t+\boldsymbol{a}_{EA}^n$$

式中 $\qquad a_E^n=O_2E\cdot\omega_2^2=2\ 000\ \text{cm/s}^2,\quad a_{EA}^n=EA\cdot\omega_{AE}^2=1\ 500\ \text{cm/s}^2$

沿 EA 方向投影得 $\qquad -a_E^t\cos 60^\circ-a_E^n\cos 30^\circ=a_{EA}^n$

解得 $\qquad a_E^t=-(3\ 000+2\ 000\sqrt{3})\ \text{cm/s}^2$

则 O_2B 杆的角加速度为

$$\alpha_{O_2}=\frac{a_E^t}{O_2E}=-(150+100\sqrt{3})=-323.2\ \text{rad/s}^2\text{(顺时针)}$$

把动系建于 O_2B 杆上，动点为滑块 C，如图(b)所示，由

$$\boldsymbol{a}_a = a_e^n + \boldsymbol{a}_e^t + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C$$

式中 $$a_e^t = O_2C \cdot \alpha_{O_2} = (6\ 000 + 4\ 000\sqrt{3})\ \mathrm{cm/s^2}$$

科氏加速度 $$a_C = 2\omega_2 v_r = \frac{8\ 000}{3}\sqrt{3}\ \mathrm{cm/s^2}$$

垂直于 O_2C 投影有 $$a_a\cos 30° = -a_e^t + a_C$$

解得滑杆 CD 的加速度为

$$a_{CD} = -\frac{1}{3}(12\ 000\sqrt{3} + 8\ 000)\mathrm{cm/s^2} = -95.9\ \mathrm{m/s^2}(向下)$$

五、解：运动学分析为，杆 AB 为平移，速度 $v_A = v_B$，且

$$v_A = R\omega_A,\quad v_B = 2R\omega_B$$

如图(a)所示，用动能定理 $$T_1 = 0$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}mR^2\cdot\omega_A^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 2m\cdot(2R)^2\cdot\omega_B^2 = \frac{9}{4}mv_B^2$$

所有力做的功为 $$W = 3mgs\sin 30° = \frac{3}{2}mgs$$

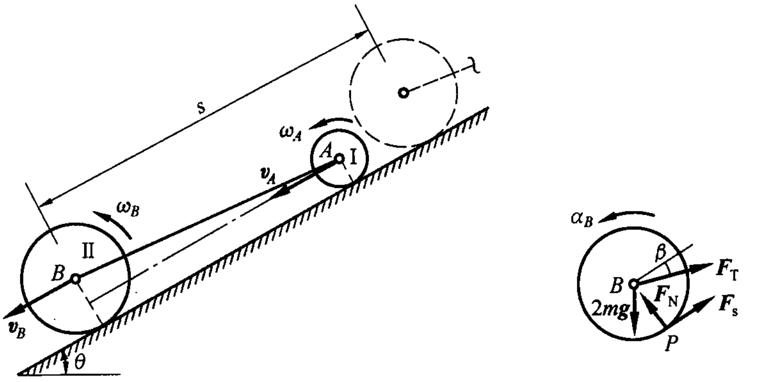
由动能定理 $T_2 - T_1 = W$，有

$$\frac{9}{4}mv_B^2 - 0 = \frac{3}{2}mgs \tag{1}$$

得轮Ⅱ轮心 B 的速度为 $$v_B = \sqrt{\frac{2}{3}gs}$$

把式(1)对时间求一阶导数有 $$\frac{9}{2}v_Ba_B = \frac{3}{2}gv_B$$

得轮Ⅱ轮心 B 的加速度为 $$a_B = \frac{1}{3}g$$



(a)　(b)

题五解答图

取轮Ⅱ，分析如图(b)所示，由对质心的动量矩定理 $J_B\alpha_B = \sum M_B$ 有

$$\frac{1}{2}\cdot 2m\,(2R)^2\cdot\alpha_B = F_s\cdot 2R$$

解得斜面对轮Ⅱ的摩擦力为

$$F_s=\frac{1}{3}mg$$

由对速度瞬心的动量矩定理 $J_P\alpha_B=\sum M_P$ 有

$$\frac{3}{2}\cdot 2m\,(2R)^2\cdot\alpha_B=2mg\sin 30°\cdot 2R-F_T\cos\beta\cdot 2R$$

解得
$$F_T=0$$

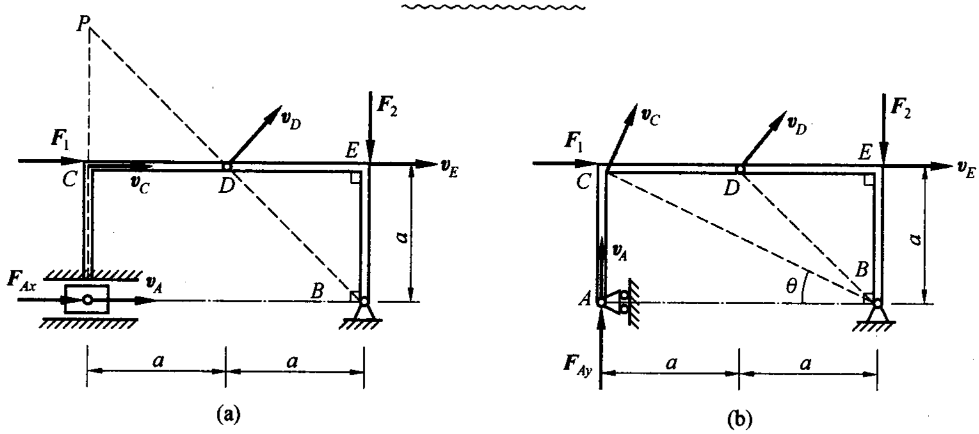
而
$$F_N=2mg\cos 30°=\sqrt{3}\,mg$$

六、解:解除 A 处水平向约束,如图(a)所示,由虚速度法,给点 A 一虚速度 $\boldsymbol{v}_A$,有

$$F_1\cdot v_C+F_{Ax}\cdot v_A=0 \tag{1}$$

运动学分析如图(a)所示,有 $v_A=2v_C$,代入方程(1)解得

$$F_{Ax}=-\frac{F_1}{2}(\leftarrow)$$



题六解答图

解除 A 处铅直向约束,如图(b)所示,由虚速度法,给点 A 一虚速度 $\boldsymbol{v}_A$,有

$$\boldsymbol{F}_1\cdot\boldsymbol{v}_C+F_{Ay}\cdot v_A=0$$

或
$$F_1\cdot v_C\sin\theta+F_{Ay}\cdot v_A=0 \tag{2}$$

构件 ACD 的速度瞬心位于点 B,由速度投影定理,有

$$v_C\cos\theta=v_A$$

代入方程(2)解得
$$F_{Ay}=-\frac{F_1}{2}(\downarrow)$$

七、解:首先计算系统的动能,为

$$T_\Delta=\frac{1}{2}\cdot 3m\cdot\dot{q}_1^2$$

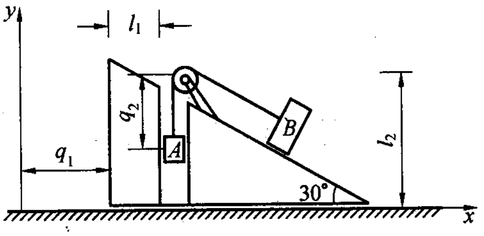
$$T_A=\frac{1}{2}m(\dot{x}_A^2+\dot{y}_A^2)$$

$$T_B=\frac{1}{2}m(\dot{x}_B^2+\dot{y}_B^2)$$

而 $x_A=q_1+l_1$,$y_A=l_2-q_2$,如图所示,设 AB 绳长为 l,且不可伸长,则

$$x_B=q_1+(l-q_2)\cos 30°,\quad y_B=l_2-(l-q_2)\sin 30°$$

则
$$T_A=\frac{1}{2}m(\dot{x}_A^2+\dot{y}_A^2)=\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)$$



题七解答图

$$T_B=\frac{1}{2}m(\dot{x}_B^2+\dot{y}_B^2)=\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2-\sqrt{3}\dot{q}_1\dot{q}_2+\dot{q}_2^2)$$

系统总的动能为

$$T=T_\Delta+T_A+T_B=\frac{5}{2}m\dot{q}_1^2+m\dot{q}_2^2-\frac{\sqrt{3}}{2}m\dot{q}_1\dot{q}_2$$

系统为保守系统，总势能为

$$V=3mgC+mgy_A+mgy_B$$

拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{5}{2}m\dot{q}_1^2+m\dot{q}_2^2-\frac{\sqrt{3}}{2}m\dot{q}_1\dot{q}_2-3mgC-mgy_A-mgy_B$$

由 $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_1}=0,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_2}=0$$

或计算系统的广义力，得

$$Q_1=0,\quad Q_2=\frac{1}{2}mg$$

由 $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}=Q_1,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_2}=Q_2$$

运算得 $$5\ddot{q}_1-\frac{\sqrt{3}}{2}\ddot{q}_2=0,\quad 2\ddot{q}_2-\frac{\sqrt{3}}{2}\ddot{q}_1=\frac{1}{2}g$$

解得 $$\ddot{q}_1=\frac{\sqrt{3}}{37}g,\quad \ddot{q}_2=\frac{10}{37}g$$

考虑到初始条件 $t=0$ 时，$\dot{q}_1=0$，$\dot{q}_2=0$，则三角块与物块的运动方程为

$$q_1=\frac{\sqrt{3}}{74}gt^2+C_1,\quad q_2=\frac{5}{37}gt^2+C_2$$

哈尔滨工业大学2012年(春)期末
理　论　力　学　试　题

一、判断是非题(共10题,每题1分。把答案填入括号内。)

1. 某力系的力多边形自行封闭,则该力系必为平衡力系。（　　）

2. 某力系的力多边形自行封闭,则该力系简化的最后结果可能是一个力偶。（　　）

3. 一力和一力偶的任意组合为一力螺旋。（　　）

4. 做平面运动的刚体,某瞬时其角速度与角加速度都为零,则此瞬时刚体上各点的速度与加速度均相等。（　　）

5. 做平面运动的刚体,某瞬时其角速度为零,则此刚体上各点的速度与加速度均相等。（　　）

6. 做平面运动的刚体,某瞬时其角速度与角加速度都为零,则不能肯定此刚体一定为平移。（　　）

7. 在质点系的动量定理中,质点系的动量 $\boldsymbol{p}$ 和外力主矢 $\sum \boldsymbol{F}_i^e$ 的方向相同。（　　）

8. 质点系质心的速度为零,质点系对任一固定点的动量矩都一样。（　　）

9. 不论质点系做何种运动,其惯性力系的主矢均等于 $\boldsymbol{F}_{IR}=-m\boldsymbol{a}_C$,因和质心的加速度反向,所以应一律画在质心上。（　　）

10. 刚体定轴转动时,消除轴承附加动约束力的条件是,转轴为中心惯性主轴。（　　）

二、选择题(共6题,每题2分)

1. 一刚体上只作用有两个力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$,且 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=0$,则此刚体(　　)。

A. 一定平衡　　B. 一定不平衡　　C. 平衡与否不能确定

2. 一刚体上只作用有两个力偶,其矩为 $\boldsymbol{M}_1$ 和 $\boldsymbol{M}_2$,且 $\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{M}_2=0$,则此刚体(　　)。

A. 一定平衡　　B. 一定不平衡　　C. 平衡与否不能确定。

3. 点 M 做曲线运动,某瞬时其速度为 $v=4$ m/s,切向加速度为 $a_t=-2$ m/s^2,经1秒钟后点的速度用 v_1 表示,则(　　)。

A. $v_1=4$ m/s　　B. $v_1=2$ m/s　　C. $v_1=3$ m/s　　D. v_1 不能确定

4. 科氏加速度的计算公式是 $\boldsymbol{a}_C=2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$,则(　　)。

A. 在动系为任意运动的情况下,均有科氏加速度

B. 在动系为定轴转动或平面运动(不含平移)的情况下,才有科氏加速度

C. 在动系为定轴转动的情况下,科氏加速度一定不等于零

D. 科氏加速度的大小均等于 $2\omega v_r$

5. 在考虑空气阻力的正常情况下,飞行员跳伞落地时,(　　)。

A. 跳伞时离地面的高度越高,落地时的速度就越大

B. 仍有加速度

C. 速度大的一般年轻人承受不了

D. 没有加速度,速度与跳伞时离地面的高度无关

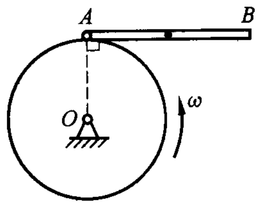
6. 在一平面运动刚体上，作用一常力偶，其矩为 $M=4\ 000\ \mathrm{N\cdot m}$，作用时间持续了 0.5 s(秒)，则此力偶对刚体的冲量是(　　)。

A. $I=2\ 000\ \mathrm{N\cdot ms}$　B. $I=2\ 000\ \mathrm{N\cdot s}$　C. $I=200\ \mathrm{N\cdot s}$　D. $I=0$

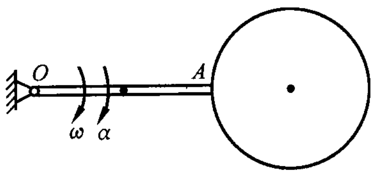
三、填空题(每空 2 分，共 10 分)

1. 均质圆盘质量为 m，半径为 R，均质杆 AB 质量为 m，长为 $2R$，在 A 端与圆盘焊(固)接在一起。系统的角速度为 ω。则该系统的动量大小为________，对轴 O 的动量矩为________。

2. 均质杆 OA 质量为 m，长度为 $2R$，在其端点 A 焊(固)接一质量为 m，半径为 R 的均质圆盘，系统绕轴 O 转动的角速度为 ω，角加速度为 α。把其惯性力向点 O 处简化，则其切向惯性力 $F_{\mathrm{IR}}^{\mathrm{t}}$ 大小为________，法向惯性力 $F_{\mathrm{IR}}^{\mathrm{n}}$ 大小为________，惯性力系主矩 M_{IO} 大小为________。



题 1 图



题 2 图

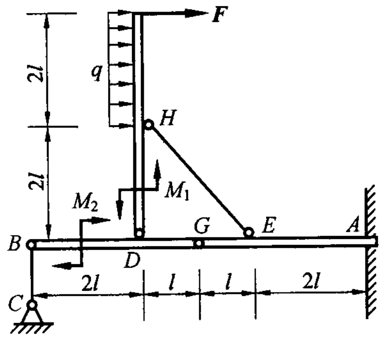
四、计算题(20 分)

不计图示平面结构各构件自重，作用荷载与尺寸如图所示。水平集中力 $F=5\ \mathrm{kN}$，水平均布力 $q=2\ \mathrm{kN/m}$，力偶矩 $M_1=M_2=4\ \mathrm{kN\cdot m}$，$l=1\ \mathrm{m}$。求 BC 杆受力和固定端 A 处的约束力。(此题被收入第 8 版，为 2.46 题)

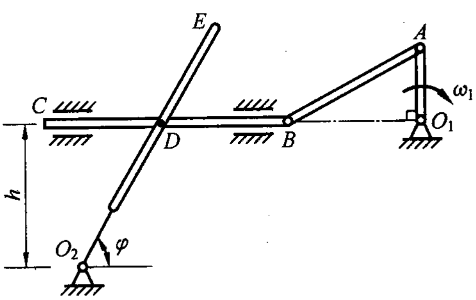
五、计算题(20 分)

图示平面机构中，O_1A 杆长为 10 cm，以匀角速度 $\omega_1=8\ \mathrm{rad/s}$ 绕轴 O_1 转动。AB 杆长为 20 cm，$h=20\ \mathrm{cm}$。在 BC 杆上焊(固)接一销子，套在 O_2E 杆上狭长直槽内，使杆 O_2E 绕轴 O_2 转动。

求：当 $\varphi=60^\circ$ 瞬时，杆 O_2E 的角速度 ω_2 和角加速度 α_2。



题四图



题五图

六、计算题(20 分)

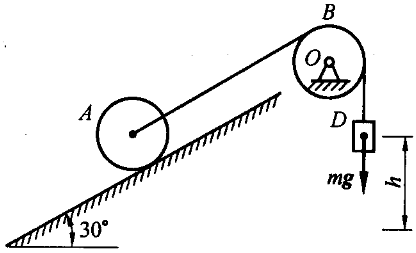
图示系统中，两均质轮 A，B 质量均为 m，半径均为 R，轮 A 沿倾角为30°的斜面做纯滚动(不计滚动摩阻)，轮 B 绕轴 O 定轴转动。物块 D 的质量也为 m，由不计自重的绳子连接

如图。系统初始静止。

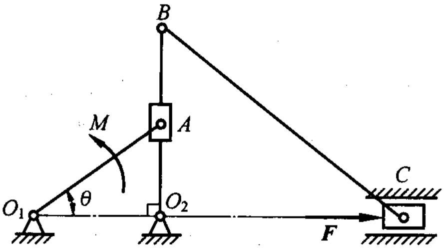
求物块 D 下降高度为 h 时的速度、加速度，两段绳子的拉力，轴承 O 处的约束力，斜面对轮 A 的摩擦力。

七、计算题(8 分)

不计图示平面机构自重，不计各处摩擦，$O_1A=l$，$O_2A=AB$，在滑块 C 上作用有水平力 F。用虚位移原理求机构在图示位置平衡时的力偶矩 M。(用其他方法做不给分)



题六图



题七图

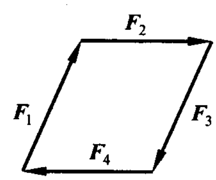
哈尔滨工业大学 2012 年(春)期末理论力学试题解答

一、1. ×；2. √；3. ×；4. √；5. ×；6. √；7. ×；8. √；9. ×；10. √

1. **提示**：如右图所示，图中 4 个力大小相等且作用线平行，其力多边形自行封闭，该力系为一力偶系，不平衡。

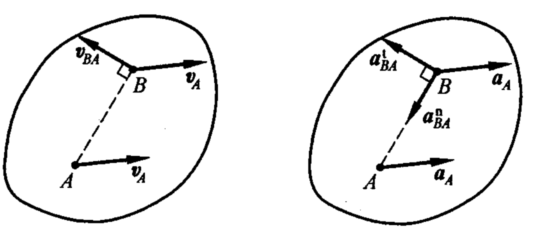
2. **提示**：如右图所示，此力系其力多边形自行封闭，该力系为一力偶系，最后结果是一个力偶。

3. **提示**：只有一力的作用线与一力偶所在平面垂直时，才构成力螺旋。



题 1 提示图

4. **提示**：如图所示，做平面运动的刚体，某瞬时其角速度与角加速度都为零，由求速度的基点法公式 $\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{v}_{BA}$，式中 $v_{BA}=AB\cdot\omega=0$，求加速度的基点法公式 $\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{a}_{BA}^{t}+\boldsymbol{a}_{BA}^{n}$，式中 $a_{BA}^{t}=AB\cdot\alpha=0$，$a_{BA}^{n}=AB\cdot\omega^2=0$，有 $\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_A$，$\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_A$，即此瞬时刚体上各点的速度与加速度均相等。



题 4 提示图

5. **提示**：如图所示，做平面运动的刚体，某瞬时其角速度为零，由求速度的基点法公式 $\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{v}_{BA}$，式中 $v_{BA}=AB\cdot\omega=0$，有 $\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_A$，则此刚体上各点的速度均相等。但由求加速度的基点法公式 $\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{a}_{BA}^{t}+\boldsymbol{a}_{BA}^{n}$，式中 $a_{BA}^{t}=AB\cdot\alpha$，$a_{BA}^{n}=AB\cdot\omega^2$，某瞬时其角速度为零，有 $\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{a}_{BA}^{t}$，则此刚体上各点的加速度不相等。

6. **提示**：做平面运动的刚体，某瞬时其角速度与角加速度都为零，由题 4 的提示，有 $\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_A$，$\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_A$，但只是此瞬时。而刚体平移是其角速度与角加速度都为零，是在一段时间内，不是某瞬时。此时刚体的运动可能是瞬时平移，不能肯定此刚体一定为平移。

7. **提示**：质点系的动量定理为$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\sum\boldsymbol{F}_i^e$，是质点系的动量 $\boldsymbol{p}$ 对时间的一阶导数和外力主矢$\sum\boldsymbol{F}_i^e$ 的方向相同。

8. **提示**：由计算动量矩的公式 $\boldsymbol{L}_O=\boldsymbol{L}_C+\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}_C$，可知当质点系质心的速度为零时，质点系对任一固定点的动量矩都一样。

9. **提示**：惯性力系的主矢等于 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{IR}}=-m\boldsymbol{a}_C$，是指其大小与方向与简化中心无关，但作用点与简化中心有关。对常见的刚体平移、定轴转动、平面运动这三种运动，为计算方便，对刚体平移与平面运动，惯性力系的主矢加在质心上。而对刚体定轴转动，则一般加在转轴上某点，不能一律画在质心上。

10. **提示**：刚体定轴转动时，消除轴承附加动约束力的条件是，转轴为中心惯性主轴，这是消除轴承附加动约束力的条件。若改为转轴为惯性主轴则不对。

二、1. C；2. A；3. D；4. B；5. D；6. D

1. **提示**：一刚体上只作用有两个力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$，若这两个力共线，且 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=0$，则此刚体平衡；若这两个力不共线，且 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=0$，则为一力偶，刚体不能平衡，所以平衡与否不能确定。

2. **提示**：由力偶系的平衡条件（方程）$\sum\boldsymbol{M}_i=0$，一刚体上只作用有两个力偶，其矩为 $\boldsymbol{M}_1$ 和 $\boldsymbol{M}_2$，且 $\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{M}_2=0$，则此刚体 一定平衡。

3. **提示**：点 M 做曲线运动时，其速度的一般计算公式为 $v=\int_{v_0}^{v}a_{\mathrm{t}}\mathrm{d}t$，只有当 $a_{\mathrm{t}}=C$，即加速度为常量时，有 $v=v_0+a_{\mathrm{t}}t$。而题给条件是某瞬时其速度为 $v=4\ \mathrm{m/s}$，切向加速度为 $a_{\mathrm{t}}=-2\ \mathrm{m/s^2}$，没说明此加速度为常量，所以不能用公式 $v=v_0+a_{\mathrm{t}}t$ 计算速度 v_1，v_1 不能确定。

4. **提示**：科氏加速度的计算公式是 $\boldsymbol{a}_C=2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$，式中 ω_{e} 为动系的角速度，所以在动系为定轴转动或平面运动（不含平移）的情况下，才有科氏加速度。动系为任意运动时，若无角速度，则没有科氏加速度。在动系为定轴转动的情况下，若 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}$ 与 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$ 平行或者其他情况，科氏加速度可以等于零。科氏加速度的计算公式是 $\boldsymbol{a}_C=2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$，只有在 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}$ 与 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$ 垂直时，科氏加速度的大小才等于 $2\omega v_{\mathrm{r}}$。

5. **提示**：在考虑空气阻力无风的情况下，飞行员跳伞刚开始时，其速度增加，但空气阻力也随之增加。经过一段时间，其重力与阻力会相等，此时速度达到最大，已无加速度。在飞行员跳伞过程中，空气阻力的一般表达式为 $F_{\mathrm{R}}=cA\rho v^2$，式中：$c$ 为阻力系数，A 为垂直于速度方向的最大截面积，ρ 为介质密度。可推得最大速度，即极限速度为 $v_{极限}=\sqrt{\dfrac{mg}{cA\rho}}$，与高度无关。此极限值与飞行员重量和参数 c，A，ρ 有关，实际值并不大，一般年轻人可以承受。

6. **提示**：冲量的计算公式为 $\boldsymbol{I}=\int_0^t\boldsymbol{F}\mathrm{d}t$，而力偶没有合力，任何力偶的冲量均为零。

三、1. $p=\sqrt{2}\,mR\omega$，$L_O=\dfrac{17}{6}mR^2\omega$

2. $F_{\mathrm{IR}}^{\mathrm{t}}=4mR\alpha$，$F_{\mathrm{IR}}^{\mathrm{n}}=4mR\omega^2$，$M_{\mathrm{IO}}=\dfrac{65}{6}mR^2\alpha$

提示:此二题均为计算题,按相应定义与公式计算即可。

四、解:先取 DH 杆,其受力图如图(a)所示,由

$$\sum M_D=0,\quad F_{HE}\cos 45^\circ\cdot 2l+M_1-F\cdot 4l-2ql\cdot 3l=0$$

解得
$$F_{HE}=14\sqrt{2}\ \text{kN}$$

$$\sum F_x=0,\quad F_{Dx}-F_{HE}\cos 45^\circ+F+2ql=0$$

解得
$$F_{Dx}=5\ \text{kN}$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{Dy}+F_{HE}\sin 45^\circ=0$$

解得
$$F_{Dy}=-14\ \text{kN}$$

取 BDG 杆,其受力图如图(b)所示,由

$$\sum M_G=0,-F_{BC}\cdot 3l-M_2+F'_{Dy}\cdot l=0$$

解得
$$F_{BC}=-6\ \text{kN(拉)}$$

最后取整体,其受力图如图(c)所示,由

$$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}+2ql+F=0$$

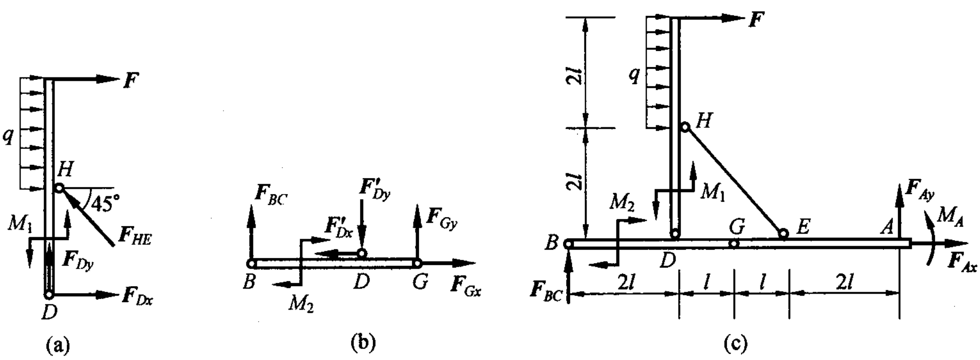
解得
$$F_{Ax}=-9\ \text{kN}$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{Ay}+F_{BC}=0$$

解得
$$F_{Ay}=6\ \text{kN}$$

$$\sum M_A=0,\quad M_A-F_{BC}\cdot 6l-F\cdot 4l-2ql\cdot 3l=0$$

解得
$$M_A=-4\ \text{kN}\cdot\text{m}$$



题四解答图

五、解:AB 杆为瞬时平移,$v_A=O_1A\cdot\omega_1=80\ \text{cm/s}$,$v_B=v_A$,把动系建于 O_2E 杆上,动点选为销子 D,有 $\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$,且 $v_B=v_A=v_a$,如图(a)所示,则

$$v_e=v_a\sin 60^\circ=40\sqrt{3}\ \text{cm/s}$$

解得杆 O_2E 的角速度为

$$\omega_2=\frac{v_e}{O_2D}=3\ \text{rad/s}$$

选点 A 为基点,$a_A^n=O_1A\cdot\omega_1^2=640\ \text{cm/s}^2$,由 $\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_A^n+\boldsymbol{a}_{BA}^t$,如图(b)所示沿 BA 方向投影,有

$$a_B\cos 30^\circ=-a_A^n\cos 60^\circ$$

解得
$$a_B=-\frac{640}{\sqrt{3}}\ \text{cm/s}^2$$

把动系建于 O_2E 杆上，动点选为销子 D，如图(b)所示，由

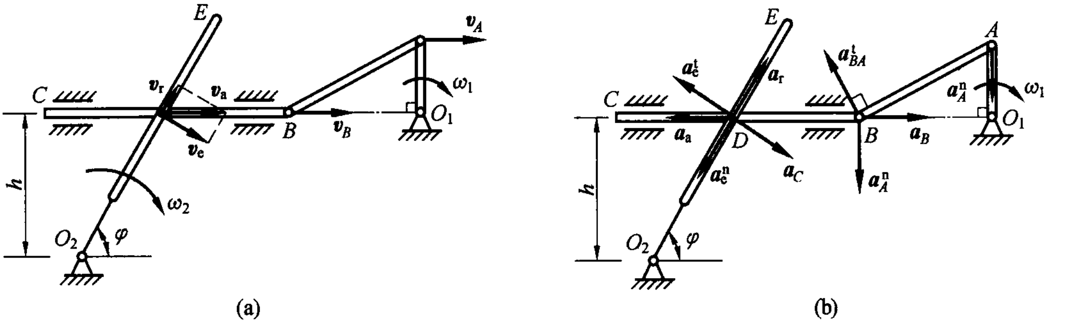
$$\boldsymbol{a}_a=\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_e^t+\boldsymbol{a}_e^n+\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_C$$

式中 $a_C=2\omega_e v_r=240\ \text{cm/s}^2$，垂直于 O_2E 投影有

$$a_a\cos 30°=a_e^t-a_C,\quad a_e^t=560\ \text{cm/s}^2$$

解得杆 O_2E 的角加速度为

$$\alpha_2=\frac{a_e^t}{O_2D}=14\sqrt{3}\ \text{r/s}^2\text{（逆时针）}$$



题五解答图

六、解： 取整体，运动学关系如图(a)所示，有 $R\omega_B=v$，$R\omega_A=v$，用动能定理，有

$$T_1=0$$

$$T_2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\omega^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}mR^2\cdot\omega^2=\frac{3}{2}mv^2$$

所有力做的功为 $W=mgh-\frac{1}{2}mgh=\frac{1}{2}mgh$，由

$$T_2-T_1=W$$

有

$$\frac{3}{2}mv^2-0=\frac{1}{2}mgh \tag{1}$$

解得物块 D 下降高度为 h 时的速度为

$$v=\frac{\sqrt{3gh}}{3}$$

把式(1)对时间求一阶导数有　$3mva=\frac{1}{2}mgv$

解得物块 D 下降高度为 h 时的加速度为　$a=\frac{g}{6}$

取物块 D，如图(b)所示，有　$ma=mg-F_{T1}$

解得 BD 段绳子的拉力为　$F_{T1}=\frac{5}{6}mg$

取轮 O，如图(c)所示，由 $J_O\alpha=\sum M_O$，即

$$\frac{1}{2}mR^2\alpha_B=F'_{T1}R-F_{T2}R$$

解得　$F_{T2}=\frac{3}{4}mg$

由质心运动定理 $ma_{Cx}=\sum F_x$，$ma_{Cy}=\sum F_y$，即

$$F_{Ox}-F_{T2}\cos 30°=0$$

$$F_{Oy}-F_{T2}\sin 30°-F'_{T1}-mg=0$$

解得轴承 O 处的约束力为

$$F_{Ox}=\frac{3\sqrt{3}}{8}mg,\quad F_{Oy}=\frac{53}{24}mg$$

取轮 A，如图(d)所示，由对质心的动量矩定理

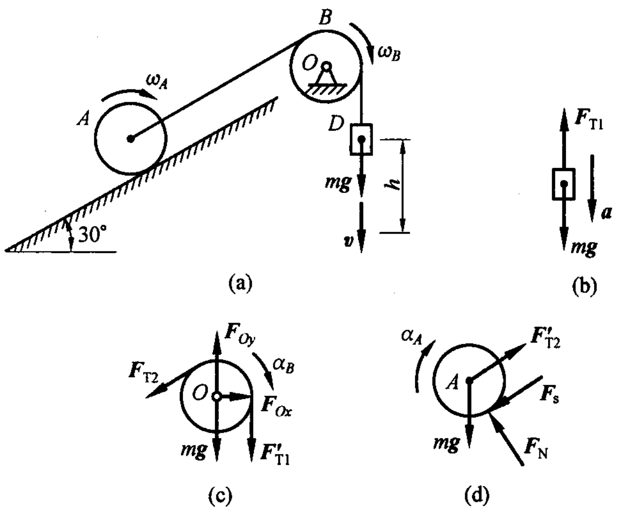
$$J_C\alpha=\sum M_C$$

即

$$\frac{1}{2}mR^2\alpha_A=F_sR$$

解得斜面对轮 A 的摩擦力为

$$F_s=\frac{1}{12}mg$$



题六解答图

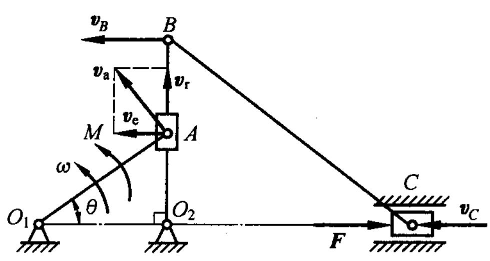
七、解：用虚速度法，设 O_1A 有一虚角速度 ω，把动系建于 O_2B 杆上，则运动学关系如图所示，$v_a=l\omega$，虚速度法方程为

$$M\cdot\omega-F\cdot v_C=0 \tag{1}$$

虚速度间的关系为 $\qquad v_e=v_a\sin\theta=l\omega\sin\theta$

而 $v_B=2v_e=2l\omega\sin\theta$，代入方程(1)解得

$$M=2Fl\sin\theta$$



题七解答图

哈尔滨工业大学 2012 年(秋)期末
理 论 力 学 试 题

一、是非判断题(10 分)

1. 任意力系向某点简化,因主矢等于每一分力的矢量和,所以主矢一定是该力系的合力。 ( )

2. 两接触面粗糙且存在正压力,则摩擦力必定不等于零。 ( )

3. 列汇交力系的平衡方程时,所选坐标轴必须互相垂直。 ( )

4. 刚体定轴转动就是刚体的定轴转动,其不是刚体的平面运动。 ( )

5. 刚体平移时,其各点的轨迹是空间曲线,此刚体的运动是刚体的平面运动。 ( )

6. 速度瞬心的速度为零,其加速度可能为零,也可能不为零。 ( )

7. 因可以对任意点 O 计算动量矩 $\boldsymbol{L}_O$,所以也可以对任意点 O 使用动量矩定理 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}=\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^e)$。 ( )

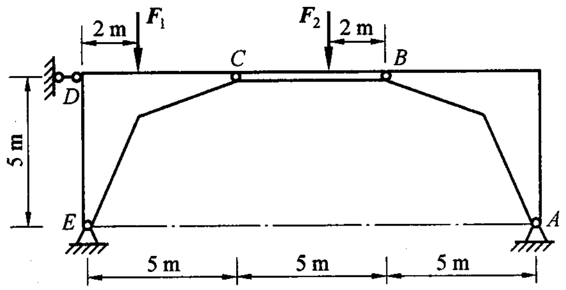
8. 虚位移原理说的是,对处于平衡状态的任意质点系,其平衡条件是 $\sum \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$,即所有主动力在所给虚位移中所做虚功之和等于零。

9. 包含刚体,对任意质点系,其惯性力系简化的主矢均为 $\boldsymbol{F}_{IR}=-m\boldsymbol{a}_C$,其作用点与简化中心的位置有关。 ( )

10. 任意刚体上的任意一点都存在有惯性主轴。 ( )

二、计算题(20 分)

不计图示各构件自重,铅直集中力 $F_1=300\sqrt{2}$ kN,$F_2=500\sqrt{2}$ kN,尺寸如图。求:支座 D、E 处约束力。



题二图

三、计算题(20 分)

图示机构中,齿轮Ⅰ固定不动,齿轮Ⅱ由 OA 杆带动而运动。两齿轮的半径均为 R,主动件 OA 杆以匀角速度 ω 绕轴 O 转动。构件 DB 与齿轮Ⅱ固接为一个刚体,$AB=\sqrt{3}R$,杆 BG 可在套筒 E 内自由滑动。图示瞬时,OA 杆水平,AB 处于铅直位置,角 $\varphi=30°$。求:图示位置时,齿轮Ⅱ的角速度 ω_A 和角加速度 α_A;BG 杆的角速度 ω_{BG} 和角加速度 α_{BG}。

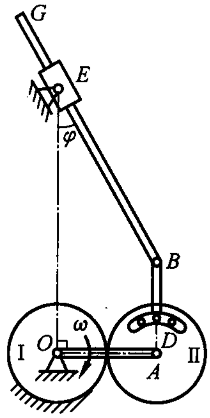
四、计算题(25 分)

图示均质杆长为 $2R$，质量为 m，均质圆盘半径为 R，质量也为 m，与杆固接在一起。在点 A 用一绳悬挂。

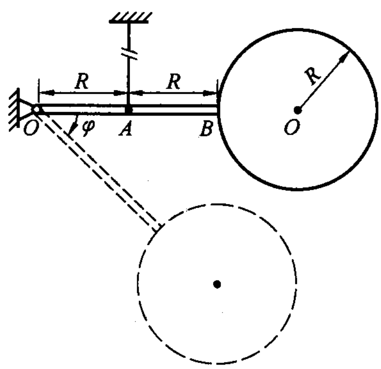
求：1. 突然剪断绳子时，此刚体的角速度 ω_1 和角加速度 α_1，轴 O 处的约束力；

2. 运动至图示任意 φ 角时，此刚体的角速度 ω_2 和角加速度 α_2；

3. 在任意 φ 角时，刚体惯性力系的简化结果大小。



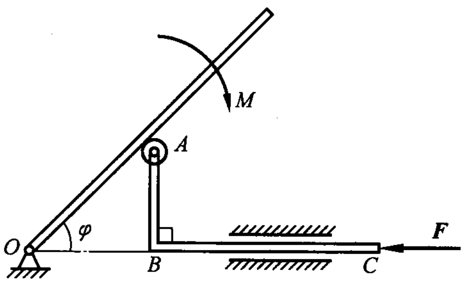
题三图



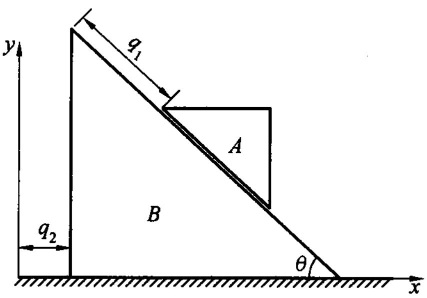
题四图

五、计算题(10 分)

不计图示结构各构件自重，不计小滚轮 A 的大小，AB 长度为 R，水平力 $\boldsymbol{F}$ 为已知，角 $\varphi=45°$，系统处于平衡状态。用虚位移原理求系统平衡时的力偶矩 M。(用其他方法做不给分)



题五图



题六图

六、计算题(15 分)

图示小三角块 A 的质量 $m_1=2m$，大三角块 B 的质量为 m，角 $\theta=45°$，各接触处光滑，用图示的 q_1，q_2 为广义坐标，用拉格朗日方程求大、小三角块的加速度。(用其他方法做不给分)

哈尔滨工业大学 2012 年(秋)期末理论力学试题解答

一、1. ×；2. ×；3. ×；4. ×；5. ×；6. ×；7. ×；8. ×；9. √；10. √

1. **提示**：任意力系向某点简化，一般得一主矢与主矩，若主矩等于零，则主矢一定是该力系的合力。

2. **提示**:两接触面粗糙且存在正压力,若没有滑动趋势,则摩擦力等于零。

3. **提示**:平面或空间汇交力系的合力为一个力,即一个矢量,此矢量为零,只要所选的轴不平行,此矢量投影必定为零。所以,列汇交力系的平衡方程时,所选坐标轴不一定互相垂直。

4. **提示**:刚体定轴转动完全符合刚体平面运动的定义,所以其一定是刚体的平面运动。

5. **提示**:刚体平移时,若各点的轨迹是直线或平面曲线,是刚体的平面运动;若轨迹是空间曲线,此刚体的运动不是刚体的平面运动。

6. **提示**:速度瞬心为一点(或一轴),其速度为零,若此点(或此轴)的加速度也为零,则此点(轴)不动,为刚体的定轴转动,所以速度瞬心的加速度不为零。

7. **提示**:可以对任意点 O 计算动量矩 $\boldsymbol{L}_O$,但动量矩定理$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}=\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{e}})$,只有对固定点、质心与某些动点才成立。对任意点 A 的动量矩定理的形式为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_A}{\mathrm{d}t}=\sum \boldsymbol{M}_A(\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{e}})-\boldsymbol{r}_{CA}\times m\boldsymbol{a}_A$$

8. **提示**:此题错在"对处于平衡状态的任意质点系"这句话,应为"对处于平衡状态的处于理想约束的任意质点系",因为虚位移原理$\sum \boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$,是在理想约束条件下推出的。

9. **提示**:力系简化的主矢,其大小与方向与简化中心无关,但作用点与简化中心有关,惯性力简化也是如此。惯性力系简化的主矢大小与方向均为 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{IR}}=-m\boldsymbol{a}_C$,但其作用点与简化中心的位置有关。

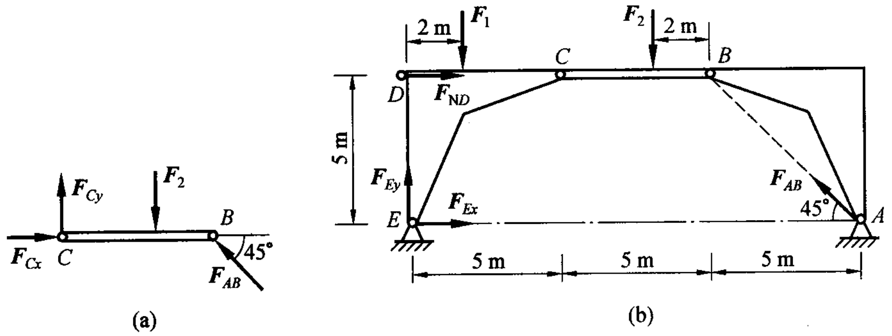
10. **提示**:"任意刚体上的任意一点都存在有惯性主轴",这一点在许多教材里没有讲到,有点超过正常讲课范围。

二、解:先取 BC 构件,其受力图如图(a)所示,由

$$\sum M_C=0,\quad F_{AB}\sin 45°\cdot 5-F_2\cdot 3=0$$

解得

$$F_{AB}=600\ \mathrm{kN}$$



题二解答图

然后取整体,其受力图如图(b)所示,由

$\sum M_E=0$,　$F_{RA}\sin 45°\cdot 15-F_2\cdot 8-F_1\cdot 2-F_{ND}\cdot 5=0$,　解得$F_{ND}=-20\sqrt{2}\ \mathrm{kN}$

$\sum F_x=0$,　$F_{Ex}+F_{ND}-F_{AB}\cos 45°=0$,　解得$F_{Ex}=320\sqrt{2}\ \mathrm{kN}$

$\sum F_y=0$,　$F_{Ey}-F_1-F_2+F_{AB}\sin 45°=0$,　解得$F_{Ey}=500\sqrt{2}\ \mathrm{kN}$

三、解:$v_A=2R\omega$,构件 ADB 做平面运动,其速度瞬心为两轮接触点 P,如图(a)所示,则图示位置时,齿轮Ⅱ的角速度 ω_A 为

$$\omega_A=\frac{v_A}{R}=2\omega$$

因 OA 杆为匀速转动，点 A 无切向加速度，所以构件 ADB 的角速度 $\omega_A=2\omega$ 为常数，因此，图示位置时，齿轮Ⅱ的角加速度 α_A 为

$$\alpha_A=0$$

把动系建于套筒 E 上，动点选为 BG 杆上的点 B，则速度分析如图(a)所示，由 $\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$，有 $\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_B$，则

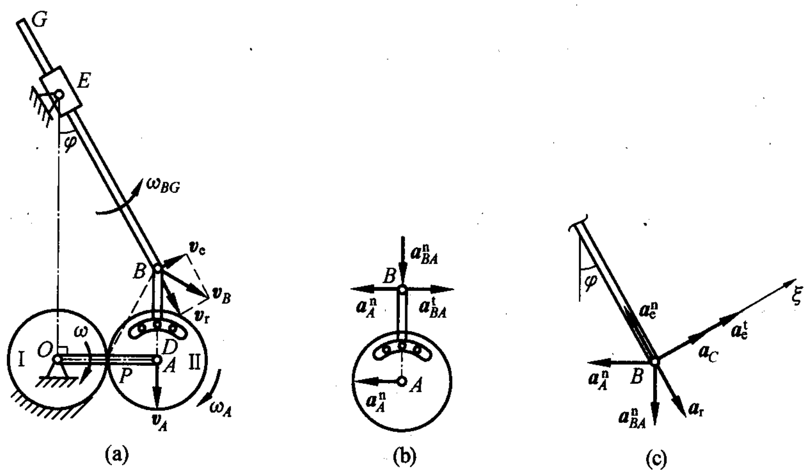
$$v_B=PB\cdot\omega_A=2R\cdot 2\omega=4R\omega$$

则
$$v_e=v_a\sin\varphi=2R\omega,\quad v_r=v_a\cos\varphi=2\sqrt{3}R\omega$$

得图示位置时，BG 杆的角速度 ω_{BG} 为

$$\omega_{BG}=\frac{v_e}{EB}=\frac{\omega}{2}\text{（逆时针）}$$

选点 A 为基点，$a_A^n=2R\omega^2$，求点 B 的加速度，由 $\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_A^n+\boldsymbol{a}_{BA}^n+\boldsymbol{a}_{BA}^t$，如图(b)所示，式中 $a_{BA}^n=AB\cdot\omega_A^2=4\sqrt{3}R\omega^2$，$a_{BA}^t=AB\cdot\alpha_A=0$。



题三解答图

把动系建于套筒 E 上，动点选为 BG 杆上的点 B，则加速度分析如图(c)所示，由

$$\boldsymbol{a}_a=\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_e^n+\boldsymbol{a}_e^t+\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_C$$

式中
$$a_C=2\omega_{BG}v_r=2\cdot\frac{\omega}{2}\cdot 2\sqrt{3}R\omega=2\sqrt{3}R\omega^2$$

沿 ξ 轴投影有
$$-a_A^n\cos 30^\circ-a_{BA}^n\sin 30^\circ=a_e^t+a_C$$

解得
$$a_e^t=-5\sqrt{3}R\omega^2$$

则 BG 杆角加速度 α_{BG} 为

$$\alpha_{BG}=\frac{a_e^t}{BE}=-\frac{5\sqrt{3}}{4}\omega^2\quad\text{（顺时针）}$$

四、解：1. 突然剪断绳子时，此刚体的角速度 $\omega_1=0$，因刚体做定轴转动，由刚体定轴转动微分方程，$J_O\alpha=\sum M_O$，式中

$$J_O=\frac{1}{3}m\cdot 4R^2+\frac{1}{2}mR^2+m\cdot 9R^2=\frac{65}{6}mR^2$$

有
$$\frac{65}{5}mR^2\alpha_1=4mgR$$

解得突然剪断绳子时，此刚体的角加速度 α_1 为

$$\alpha_1=\frac{24}{65}\frac{g}{R}$$

此时刚体质心 B 的加速度为 $a_{Cx}=0$，$a_{Cy}=a_{By}=2R\alpha_1=\frac{48}{65}g$，如图(a)所示，由质心运动定理，有

$$\sum ma_{Cx}=\sum F_x,\quad F_{Ox}=0$$

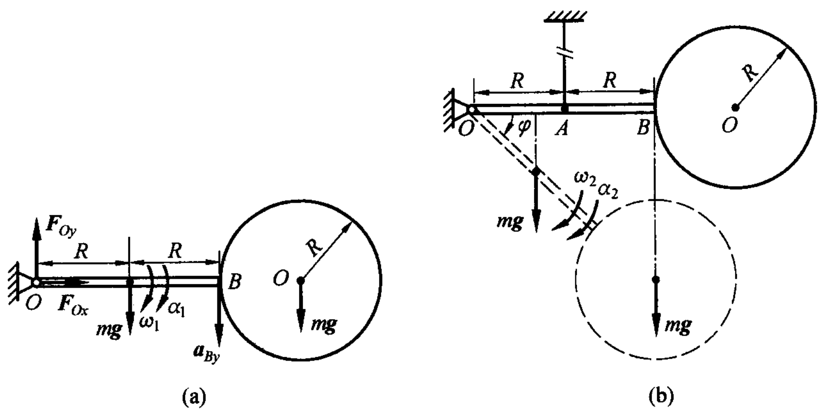
$$\sum ma_{Cy}=\sum F_y,\quad -2m\cdot\frac{48}{65}g=F_{Oy}-2mg$$

解得突然剪断绳子时，轴 O 处的约束力为

$$F_{Ox}=0,\quad F_{Oy}=\frac{34}{65}mg$$

2. 用动能定理
$$T_1=0$$

$$T_2=\frac{1}{2}J_O\omega^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{65}{6}mR^2\omega_2^2$$



题四解答图

所有力做的功为，如图(b)所示：

$$W=mgR\sin\varphi+mg\cdot 3R\sin\varphi$$

由 $T_2-T_1=W$ 有

$$\frac{65}{12}mR^2\omega_2^2-0=4mgR\sin\varphi \tag{1}$$

解得系统运动至图示任意 φ 角时，此刚体的角速度 ω_2 为

$$\omega_2=\sqrt{\frac{48}{65}\frac{g}{R}\sin\varphi}$$

把式(1)对时间求一阶导数，有

$$\frac{65}{6}mR^2\omega_2\alpha_2=4mgR\omega_2\cos\varphi$$

解得系统运动至图示任意 φ 角时，此刚体的角加速度 α_2 为

$$\alpha_2=\frac{24}{65}\frac{g}{R}\cos\varphi$$

3. 系统在任意 φ 角时，其质心的切向与法向加速度分别为

$$a_C^{\mathrm{t}}=2R\alpha_2=\frac{48}{65}g\cos\varphi,\quad a_C^{\mathrm{n}}=2R\omega_2^2=\frac{96}{65}g\sin\varphi$$

即在任意 φ 角时，刚体惯性力系的简化结果大小为

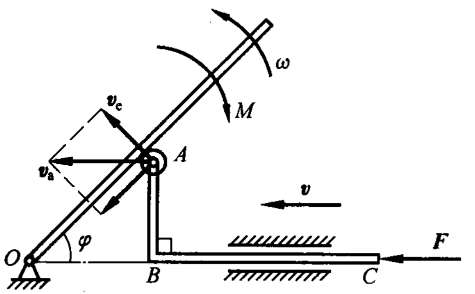
$$F_{\mathrm{IR}}^{\mathrm{t}}=2m\cdot a_C^{\mathrm{t}}=\frac{96}{65}mg\cos\varphi$$

$$F_{\mathrm{IR}}^{\mathrm{n}}=2m\cdot a_C^{\mathrm{n}}=\frac{192}{65}mg\sin\varphi$$

$$M_{\mathrm{IO}}=J_O\alpha_2=4mgR\cos\varphi$$

五、解：用虚速度法，设给 ABC 杆以虚速度 $\boldsymbol{v}$，如图所示，则 OA 杆有一虚角速度 ω，虚速度法方程为

$$Fv-M\omega=0 \tag{1}$$



题五解答图

运动学分析如图所示，有

$$v_e=v\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}v$$

$$\omega=\frac{v_e}{OA}=\frac{v}{2R}$$

代入方程(1)有

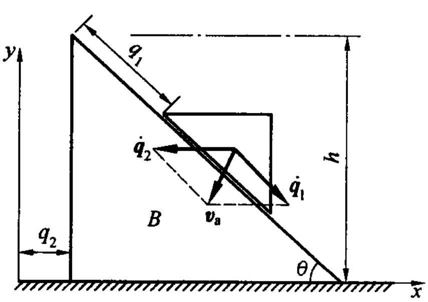
$$Fv-M\cdot\frac{v}{2R}=0$$

解得

$$M=2FR$$

六、解：运动学分析如图所示，有

$$v_a^2=\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2-2\dot{q}_1\dot{q}_2\cos 45^\circ=\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2-\sqrt{2}\dot{q}_1\dot{q}_2$$



题六解答图

系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}\cdot 2m\cdot(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2-\sqrt{2}\dot{q}_1\dot{q}_2)+\frac{1}{2}m\dot{q}_2^2$$

系统的势能为

$$V=2mg(h-q_1\cos 45^\circ)$$

拉格朗日函数为

$$L=T-V=m\dot{q}_1^2+\frac{3}{2}m\dot{q}_2^2-\sqrt{2}\dot{q}_1\dot{q}_2-2mg\left(h-\frac{\sqrt{2}}{2}q_1\right)$$

由拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_1}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_2}=0$$

有
$$2m\ddot{q}_1-\sqrt{2}m\ddot{q}_2-\sqrt{2}mg=0,\quad 3m\ddot{q}_2-\sqrt{2}m\ddot{q}_1=0$$

解得
$$\ddot{q}_1=\frac{3\sqrt{2}}{4}g,\quad \ddot{q}_2=\frac{g}{2}$$

哈尔滨工业大学2013年(春)期末
理　论　力　学　试　题

一、填空题(每空2分,共22分)

1. 图示四面体的三条棱 OA,OB,OC 相互垂直,且长度相同,均为 a,沿每条棱均作用有大小相等的力 $\boldsymbol{F}$。

把该力系向点 O 简化,其主矢为__________;

主矢为__________;

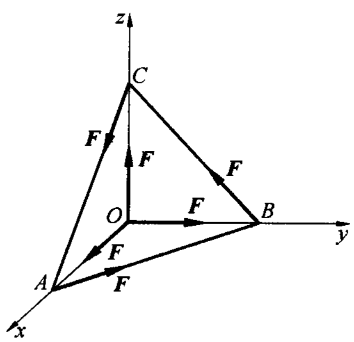
该力系简化的最终结果是________。

2. 图示均质物块重为 $\boldsymbol{W}$,斜面倾角 $\theta=30°$,物块与斜面间的静滑动摩擦因数 $f_s=0.8$。

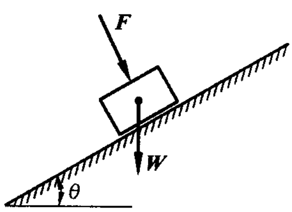
当垂直于斜面的力 $\boldsymbol{F}$ 大小为100 N时,静摩擦力的大小为________;

当垂直于斜面的力 $\boldsymbol{F}$ 大小为50 k时,静摩擦力的大小为________;

当垂直于斜面的力 $\boldsymbol{F}$ 大小为20 N时,静摩擦力的大小为________;



题1图



题2图

3. 图示非均质圆轮质量为 m,半径为 R,其质心 C 距圆轮几何中心 O 距离 $e=\dfrac{R}{2}$,圆轮对质心的转动惯量 $J_C=\dfrac{3}{2}mR^2$,其上受有矩为 M 的力偶作用。圆轮在水平路面上纯滚动,其角速度为 ω,角加速度为 α。

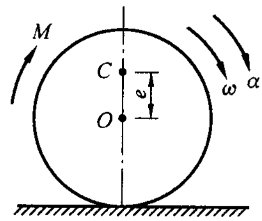
求圆轮运动至图示 O,C 在同一铅直线上时,圆轮的动量 $p=$________;

对轮心 O 的动量矩 $L_O=$________;

圆轮的动能 $T=$________;

路面对圆轮的法向约束力 $F_N=$________;

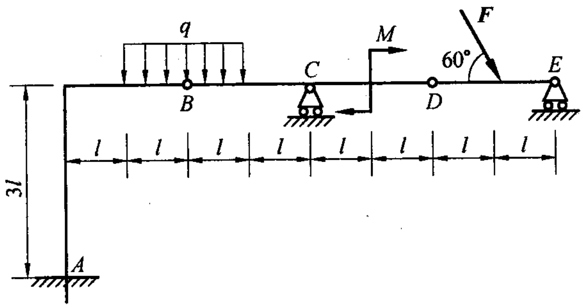
路面对圆轮的摩擦力 $F_s=$________。



题3图

二、计算题(20分)

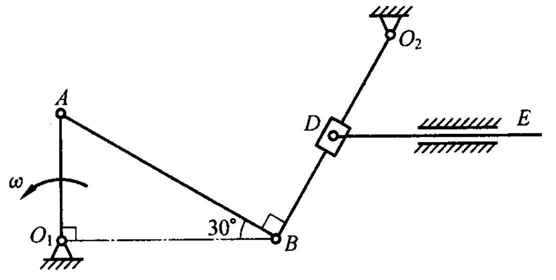
不计图示平面结构各构件自重,作用荷载与尺寸如图所示。集中力 $F=10$ kN,铅直均布力 $q=5$ kN/m,力偶矩 $M=30$ kN·m,$l=1$ m。求 A,C,E 处的约束力。



题二图

三、计算题(20 分)

图示平面机构中,O_1A 杆长为 R,以匀角速度 ω 绕轴 O_1 转动。杆长 $AB=O_2B=2R$。图示瞬时 $O_2D=DB$。求图示瞬时,DE 杆的速度和加速度。



题三图

四、计算题(20 分)

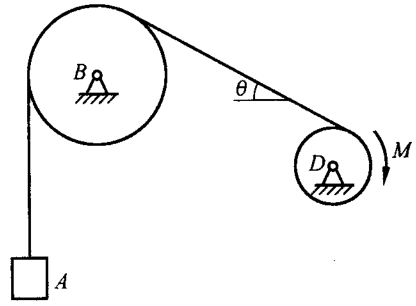
图示平面系统中,重物 A 的质量为 $2m$,定滑轮的半径分别为 R 与 $\dfrac{R}{2}$,角 $\theta=30°$,系统初始静止。

(1) 不计两定滑轮的质量,重物 A 以匀加速度 a 上升时,求绳索的拉力与驱动力偶矩 M;

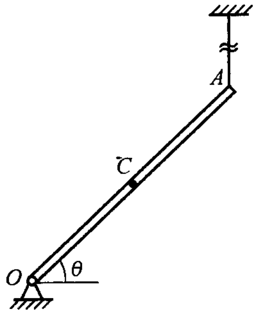
(2)两均质定滑轮的质量均为 m,力偶矩 M 为常力偶矩,且 $M=4mgR$。求重物 A 上升距离为 h 时,重物 A 的速度,加速度;支座 D 处的约束力。

五、计算题(9 分)

均质杆质量为 m,长度为 l,角 $\theta=45°$,由绳悬挂在图示位置。若突然把绳剪断,用动静法求此时杆的角加速度,轴 O 处的约束力。(用其他方法做不给分)



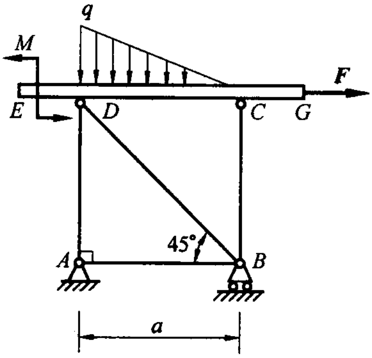
题四图



题五图

六、计算题(9 分)

不计图示平面结构自重,不计各处摩擦,在 G 处作用有水平力 $\boldsymbol{F}$,铅直均布力 q、力偶矩 M 为已知。用虚位移原理求 BD 杆的约束力。(用其他方法做不给分)



题六图

哈尔滨工业大学 2013 年(春)期末理论力学试题解答

一、1、主矢为 $\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}}=F(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$,主矩为 $\boldsymbol{M}_O=\frac{\sqrt{2}}{2}Fa(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$,最终结果为力螺旋。

2. 静摩擦力的大小均为$\frac{W}{2}$。

3. 动量 $p=\frac{3}{2}mR\omega(\rightarrow)$,对轮心 O 的动量矩 $L_O=\frac{9}{4}mR^2\omega$,动能 $T=\frac{15}{8}mR^2\omega^2$,路面对圆轮的法向约束力 $F_{\mathrm{N}}=mg-\frac{1}{2}mR\omega^2$,路面对圆轮的摩擦力 $F_{\mathrm{s}}=\frac{3}{2}mR\alpha(\rightarrow)$,或

$$F_{\mathrm{s}}=mR\alpha-\frac{2M}{3R}$$

1. **提示**:空间任意力系简化基本计算题,分别计算所有力在 x,y,z 轴的投影为

$$F_{\mathrm{R}x}=\sum F_{ix}=F,\quad F_{\mathrm{R}y}=\sum F_{iy}=F,\quad F_{\mathrm{R}z}=\sum F_{iz}=F$$

所有力对 x,y,z 轴的矩为

$$M_{Ox}=\sum M_x(\boldsymbol{F}_i)=\frac{\sqrt{2}}{2}Fa,\quad M_{Oy}=\sum M_y(\boldsymbol{F}_i)=\frac{\sqrt{2}}{2}Fa,\quad M_{Oz}=\sum M_z(\boldsymbol{F}_i)=\frac{\sqrt{2}}{2}Fa$$

可得主矢与主矩。因主矢与主矩均不为零,且平行,所以简化最终结果为力螺旋。

2. **提示**:因斜面倾角小于摩擦角,即 $\theta<\arctan f_s$,物块自锁,所以不管垂直于斜面的力 $\boldsymbol{F}$ 为多大,其摩擦力均为重力 W 沿斜面的分力。

3. **解答**:轮与路面接触点为速度瞬心,其质心的速度为 $v_C=\frac{3}{2}R\omega$,由动量计算公式 $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}_C$ 可得动量。

由动量矩的计算公式 $\boldsymbol{L}_O=\boldsymbol{L}_C+\boldsymbol{r}_C\times m\boldsymbol{v}_C$ 计算动量矩,有

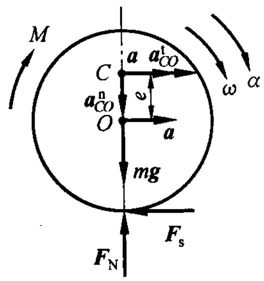
$$L_O=\frac{3}{2}mR^2\cdot\omega+\frac{R}{2}\cdot m\cdot\frac{3}{2}R\omega=\frac{9}{4}mR^2\omega$$

由动能的计算公式，有

$$T=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega^2=\frac{1}{2}m\cdot\left(\frac{3}{2}R\omega\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}mR^2\cdot\omega^2=\frac{15}{8}mR^2\omega^2$$

如图所示，选轮心 O 为基点，求质心 C 的加速度，有

$$\boldsymbol{a}_C=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}_{CO}^{t}+\boldsymbol{a}_{CO}^{n}$$



题 3 提示图

式中　$a_{CO}^{t}=OC\cdot\alpha=\frac{R}{2}\alpha$，　$a_{CO}^{n}=OC\cdot\omega^2=\frac{R}{2}\omega^2$

则质心的加速度为

$$a_{Cx}=\frac{3}{2}R\alpha,\quad a_{Cy}=\frac{R}{2}\omega^2$$

由质心运动定理，有

$$ma_{Cx}=\sum F_x,\quad \frac{3}{2}mR\alpha=-F_s$$

$$ma_{Cy}=\sum F_y,\quad \frac{1}{2}mR\omega^2=mg-F_N$$

解得　$F_s=\frac{3}{2}mR\alpha(\rightarrow)$，　$F_N=mg-\frac{1}{2}mR\omega^2$

或者由对质心的动量矩定理，$J_C\alpha=\sum M_C$，有

$$\frac{3}{2}mR^2\alpha=M+\frac{3}{2}R\cdot F_s$$

解得　$F_s=mR\alpha-\frac{2M}{3R}$

二、解：先取 DE 杆，其受力图如图(a)所示，由

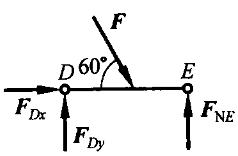
$$\sum M_D=0,\quad F_{NE}\cdot 2l-F\sin 60^\circ\cdot l=0$$

解得　$F_{NE}=\frac{5}{2}\sqrt{3}\ \text{kN}=4.33\ \text{kN}$

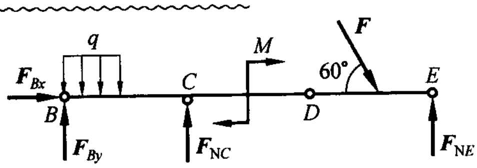
取 $BCDE$ 杆，其受力图如图(b)所示，由

$$\sum M_B=0,\quad F_{NE}\cdot 6l-F\sin 60^\circ\cdot 5l-M+F'_{NC}\cdot 2l-ql\cdot\frac{l}{2}=0$$

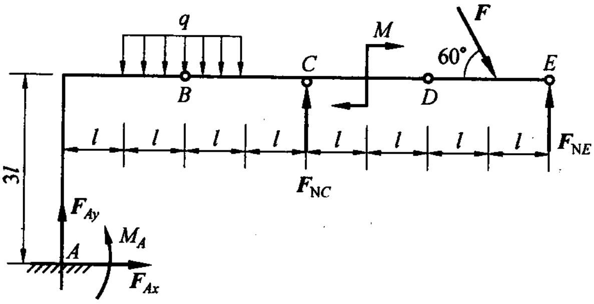
解得　$F_{NC}=(\frac{65}{4}+5\sqrt{3})=24.91\ \text{kN}$



(a)



(b)



(c)

题二解答图

最后取整体,其受力图如图(c)所示,由

$$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}+F\cos 60°=0$$

解得 $F_{Ax}=-5\ \mathrm{kN}$

$$\sum F_y=0,\quad F_{Ay}-q\cdot 2l+F_{NC}-F\sin 60°+F_{NE}=0$$

解得 $F_{Ay}=-10.58\ \mathrm{kN}$

$$\sum M_A=0,\quad M_A-q\cdot 2l\cdot 2l+F_{NC}\cdot 4l-M-F\sin 60°\cdot 6l-F\cos 60°\cdot 3l+F_{NE}\cdot 8l=0$$

解得 $M_A=-8.66\ \mathrm{kN\cdot m}$

三、解:点 A 的速度 $v_A=O_1A\cdot\omega=R\omega$,$AB$ 杆做平面运动其速度瞬心为点 P,如图(a)所示,则 AB 杆的角速度:

$$\omega_{AB}=\frac{v_A}{AP}=\frac{R\omega}{4R}=\frac{\omega}{4}$$

则点 B 的速度为

$$v_B=BP\cdot\omega_{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}R\omega$$

杆 O_2B 的角速度为

$$\omega_{O_2}=\frac{v_B}{O_2B}=\frac{\sqrt{3}}{4}\omega$$

把动系建于 O_2B 杆上,动点选为套筒 D,有 $\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$,且 $v_a=v_{DE}$,如图(a)所示,则

$$v_e=O_2D\cdot\omega_{O_2}=\frac{\sqrt{3}}{4}R\omega$$

得

$$v_a=\frac{v_e}{\cos 30°}=\frac{1}{2}R\omega$$

即杆 DE 的速度为 $v_{DE}=v_a=\frac{1}{2}R\omega(\leftarrow)$

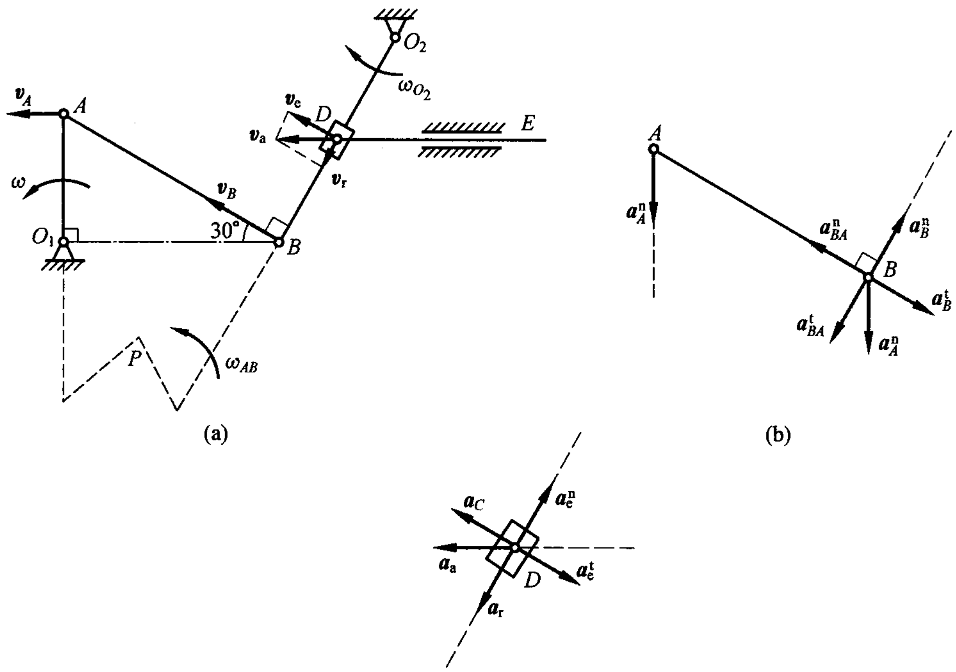
选点 A 为基点,$a_A^n=O_1A\cdot\omega^2=R\omega^2$,由 $\boldsymbol{a}_B^n+\boldsymbol{a}_B^t=\boldsymbol{a}_A^n+\boldsymbol{a}_{BA}^t+\boldsymbol{a}_{BA}^n$,如图(b)所示,式中

$$a_{BA}^n=AB\cdot\omega_{AB}^2=\frac{1}{8}R\omega^2$$

沿 BA 方向投影,有

$$a_B^t=a_A^n\cos 60°-a_{BA}^n=\frac{3}{8}R\omega^2$$

解得杆 O_2B 的角加速度为



(a)　(b)

(c)

题三解答图

$$\alpha_{O_2}=\frac{a_e^t}{O_2B}=\frac{3}{16}\omega^2$$

把动系建于 O_2B 杆上，动点选为套筒 D，如图(c)所示，由

$$\boldsymbol{a}_a=\boldsymbol{a}_{DE}=\boldsymbol{a}_e^t+\boldsymbol{a}_e^n+\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_C$$

式中

$$a_C=2\omega_e v_r=2\omega_{O_2}v_r=\frac{\sqrt{3}}{8}R\omega^2$$

$$a_e^t=O_2D\cdot\alpha_{O_2}=\frac{3}{16}R\omega^2$$

垂直于 O_2B 投影有

$$a_a\cos 30^\circ=a_C-a_e^t$$

解得杆 DE 的加速度为

$$a_{DE}=a_a=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\sqrt{3}\right)R\omega 2=0.033\ 5R\omega^2(\leftarrow)$$

四、解：(1)取物块 A，如图(a)所示，由牛顿第二定律有

$$2ma=F_{T1}-mg$$

解得绳索的拉力为

$$F_{T1}=mg+2ma$$

取轮 D，如图(b)所示，因不计定滑轮质量，有 $F_{T2}=F_{T1}$ 且 $J_D=0$，由刚体绕定轴转动微分方程

$$J_D\alpha=\sum M_D$$

有

$$0=M-F_{T2}\cdot\frac{R}{2}$$

得驱动力偶矩 M 为

$$M=m(g+a)R$$

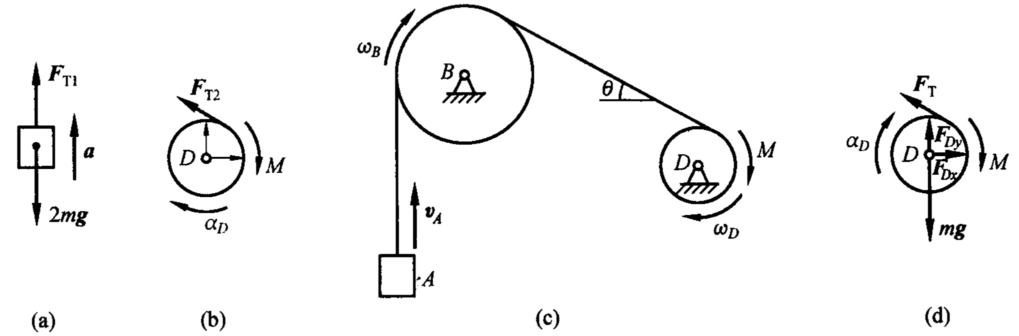
(2)取整体，运动学关系如图(c)所示，有

$$R\omega_B = v_A, \quad \frac{R}{2}\omega_D = v_A$$

用动能定理，有 $T_1 = 0$

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot v_A^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mR^2 \cdot \omega_B^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}m \cdot \left(\frac{R}{2}\omega\right)^2$$

$$= \frac{3}{2}mv_A^2$$



题三解答图

所有力做的功为 $W = M\varphi - 2mgh$，而 $h = \frac{R}{2}\varphi$，得

$$W = 6mgh$$

由 $$T_2 - T_1 = W$$

有 $$\frac{3}{2}mv_A^2 - 0 = 6mgh \tag{1}$$

解得物块 A 上升高度为 h 时的速度为

$$v_A = 2\sqrt{gh}$$

把式(1)对时间求一阶导数有

$$3mv_A a_A = 6mgv_A$$

解得物块 A 上升高度为 h 时的加速度为 $a = 2g$

取轮 D，如图(d)所示，由刚体绕定轴转动微分方程 $J_D\alpha = \sum M_D$，即

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{R}{2}\right)^2\alpha_D = M - F_T \cdot \frac{R}{2}$$

解得 $$F_T = 7mg$$

由质心运动定理 $ma_{Cx} = \sum F_x$，$ma_{Cy} = \sum F_y$，即

$$F_{Dx} - F_T\cos 30° = 0$$

$$F_{Dy} + F_T\sin 30° - mg = 0$$

解得轴承 D 处的约束力为

$$F_{Dx} = \frac{7\sqrt{3}}{2}mg, \quad F_{Dy} = -2.5mg$$

五、解：突然把绳剪断瞬时，杆的角速度为零，角加速度如图所示，且质心的加速度

$$a_C^t = \frac{l}{2}\alpha$$

加惯性力，切向惯性力 $F_{IR}^{t}=ma_C^{t}=\frac{1}{2}ml\alpha$，惯性力主矩

$$M_{IO}=J_O\alpha=\frac{1}{3}ml^2\alpha$$

均如图所示，由

$$\sum M_O=0,\quad M_{IO}-mg\cdot\frac{l}{2}\cos 45°=0$$

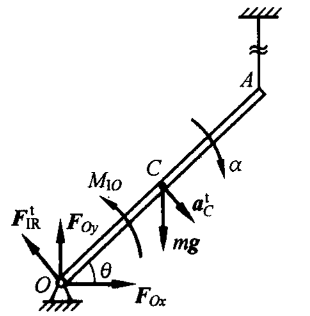
解得此时杆的角加速度为　$\alpha=\frac{3\sqrt{2}}{4}\frac{g}{l}$

由　$\sum F_x=0,\quad F_{Ox}-F_{IR}^{t}\cos 45°=0$

$\sum F_y=0,\quad F_{Oy}-mg+F_{IR}^{t}\sin 45°=0$

解得此时轴 O 处的约束力为

$$F_{Ox}=\frac{3}{8}mg,\quad F_{Oy}=\frac{5}{8}mg$$



题五解答图

六、解：去掉杆 DB，暴露出杆 DB 的内力 $\boldsymbol{F}_{DB}$，把结构变为机构，如图所示。用虚速度法，设 C 点有一虚速度 $\boldsymbol{v}_C$，如图所示。构件 $EDCG$ 为平移，其上各点速度相同，则虚速度法方程为

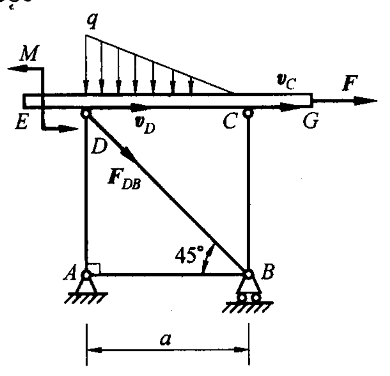
$$F_{DB}\cos 45°\cdot v_D+F\cdot v_C=0$$

虚速度间的关系为

$$v_D=v_C$$

解得 BD 杆受力为

$$F_{DB}=-\sqrt{2}F（压）$$



题六解答图

哈尔滨工业大学2013年(秋)期末
理　论　力　学　试　题

一、判断是非题(每小题1分,共10分)

1. 力矩和力偶矩都是对物体转动效果的度量,所以力矩和力偶矩完全相同。（　）

2. 力的平移定理指的是:力可以任意平行移动,不需任何条件。（　）

3. 平面汇交力系的平衡方程,只能是两个投影方程。（　）

4. 对整体受力分析后,若整体未知量的个数大于独立平衡方程的个数,此系统即为超静定系统。（　）

5. 一空间力系中各力作用线分别汇交于两个固定点,则该力系独立平衡方程的个数最多为6个。（　）

6. 动系角速度向量和相对速度平行时,科氏加速度等于零。（　）

7. 车轮沿水平路面纯滚动时,不管轮心运动情况如何,车轮和路面接触点的加速度方向均指向轮心。（　）

8. 任意质点系动量与动量矩的改变均与外力有关,而与内力无关。（　）

9. 对任意质点系,其惯性力系简化的主矢大小与方向,与简化中心位置无关。（　）

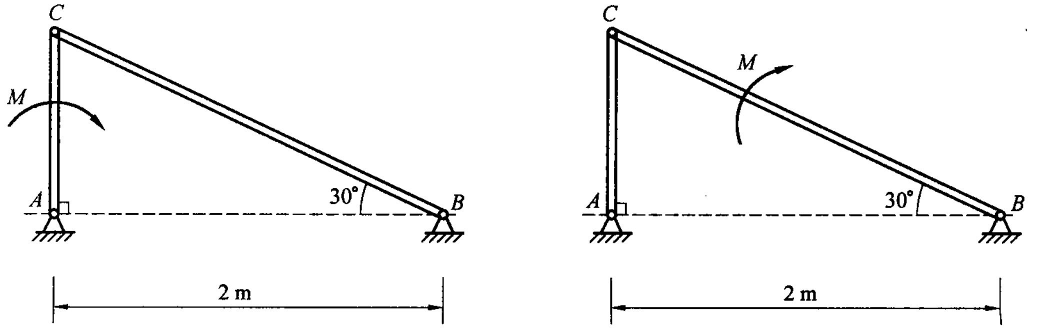
10. 虚位移是假想的无限小位移,其与时间以及运动的初始条件无关。（　）

二、填空题(每空2分,共22分)

1. 不计图示平面系统各构件自重,尺寸与角度如图所示,力偶矩 $M=10\ \mathrm{kN\cdot m}$。

当力偶 M 作用于 AC 杆上时,A 处约束力的大小为______;

当力偶 M 作用于 BC 杆上时,A 处约束力的大小为______。



题1图

2. 如图所示物块重为 P,放在粗糙水平面上,物块与水平面间的摩擦角为 $\varphi_f=20°$,力 F 的大小等于 P。

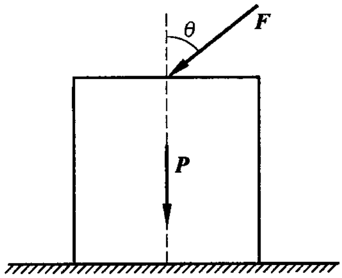
若角 $\theta=50°$时,物块是否保持静止______;

若角 $\theta=30°$时,物块是否保持静止______。

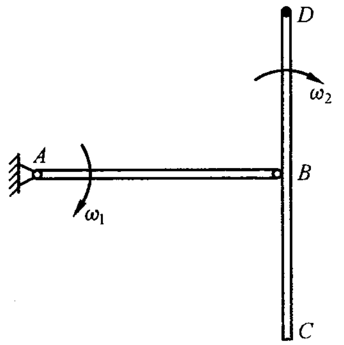
3. 如图所示平面机构，杆 AB 以角速度 $\omega_1=3$ rad/s 绕轴 A 转动，杆长为 40 cm。杆 CD 长为 60 cm，B 为杆 CD 的中点，杆 CD 以相对 AB 杆的角速度 $\omega_2=1$ rad/s 绕轴 B 转动，图示瞬时 $AB\perp CD$。把动系建于杆 AB 上，动点选为杆 CD 上 D 点，则

此时动点 D 的牵连速度大小为______；

此时动点 D 的相对速度大小为______。



题 2 图



题 3 图

4. 图示为一等边三角形构架，边长均为 l，不计 OA、OB 杆的质量，均质 AB 杆的质量为 m，此构架以角速度 ω 和角加速度 α 绕轴 O 转动。把此杆的惯性力系向轴 O 处简化，则

切向惯性力主矢大小为______；

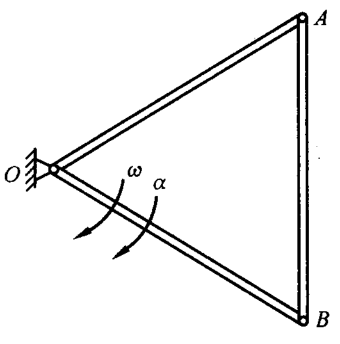
法向惯性力主矢大小为______；

惯性力系主矩大小为______。

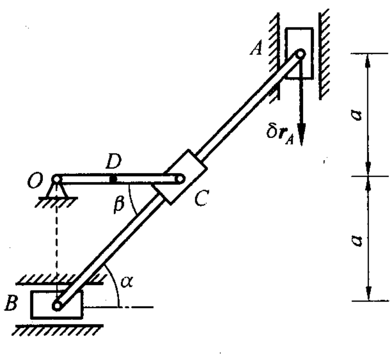
5. 图示平面机构，角度 $\alpha=\beta=45°$，尺寸 a 如图所示。若点 A 的虚位移为 $\delta\boldsymbol{r}_A$，则

点 B 的虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_B$ 大小为______；

OC 杆上中点 D 的虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_D$ 大小为______。



题 4 图



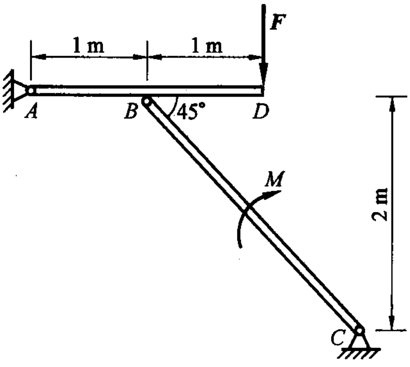
题 5 图

三、计算题(18 分)

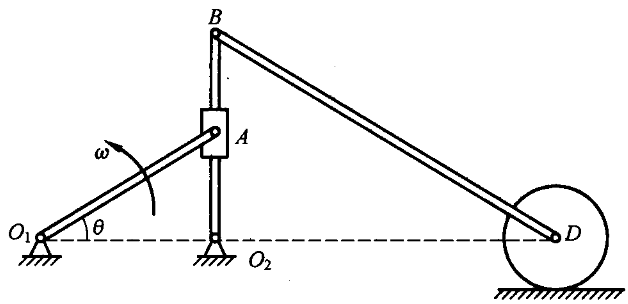
不计图示平面结构各构件自重，尺寸如图所示，铅直力 $F=40$ kN，力偶矩 $M=20$ kN·m，求支座 A,C 处的约束力。

四、计算题(20 分)

图示平面机构，O_1A 杆以匀角速度 ω 绕轴 O_1 转动，尺寸为 $O_1A=O_2B=l$，$BD=2l$，轮 D 的半径 $r=\dfrac{l}{4}$。当 $\theta=30°$时，求 BD 杆的角速度和角加速度；轮 D 的角速度和角加速度。



题三图



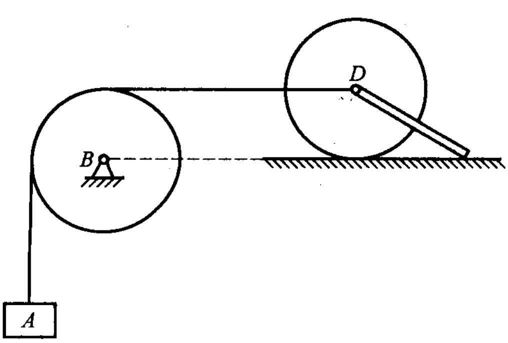
题四图

五、计算题(20 分)

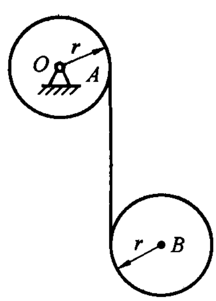
图示平面系统,质量为 m 的重物 A 由不可伸长的绳索经定滑轮 B 带动轮 D 做纯滚动,两轮均可视为均质圆盘,质量均为 m,半径均为 R,均质细长杆 DE 长为 $2R$,质量也为 m,D 端与轮心铰接,E 端与地面间无摩擦,系统初始静止。求重物 A 下降任意高度 h 时,重物的速度和加速度,两轮间绳索的拉力,地面对杆端 E 的约束力。

六、计算题(10 分)

图示系统中,两均质圆柱的质量均为 m,半径均为 r,由不计质量不可伸长的细绳连接如图,系统初始静止,运动过程中,绳为铅直。要求用拉格朗日方程求两轮的角加速度。(用其他方法做不给分)



题五图



题六图

哈尔滨工业大学 2013 年(秋)期末理论力学试题解答

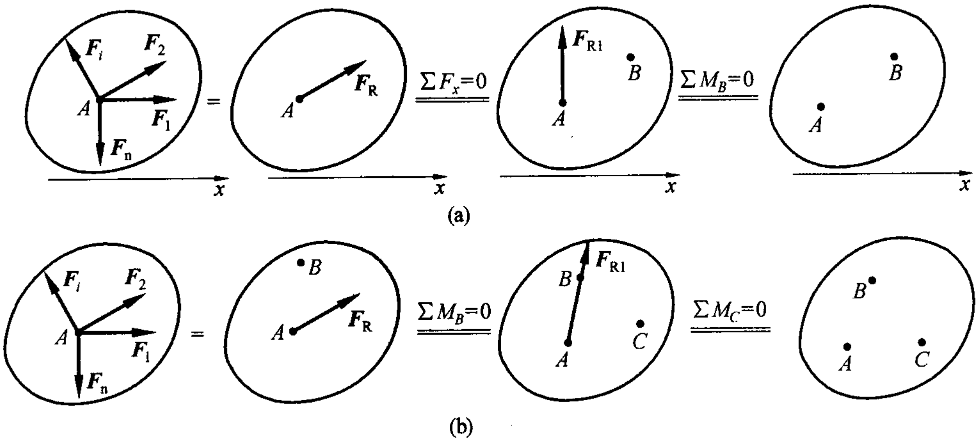
一、1. ×；2. ×；3. ×；4. ×；5. ×；6. √；7. √；8. √；9. √；10. √

1. **提示**：力矩和力偶矩都是对物体转动效果的度量，但力矩使物体转动的效果与矩心位置有关，而力偶矩使物体转动的效果与矩心位置无关。

2. **提示**：力可以在同一刚体上任意平行移动，还需加一力偶矩。

3. **提示**：如图(a)所示，一平面汇交力系，其汇交点为 A，合成为一力 $\boldsymbol{F}_R$，若满足平衡方程 $\sum F_x=0$，力系不平衡，则只可能为图示的 $\boldsymbol{F}_{R1}$。若力系再满足方程 $\sum M_B=0$，且 A，B 两点连线与投影轴不垂直，如图所示，则力系平衡。所以，平面汇交力系的平衡方程可以是一个投影方程，一个力矩方程。

平面汇交力系的平衡方程，还可以是两个力矩方程，但 A，B，C 三点不能共线，如图(b)所示。



题 3 提示图

4. **提示**：要把每一个构件全拆开，分析未知量与独立平衡方程的数目，不能只从整体考虑。

5. **提示**：一空间力系中各力作用线分别汇交于两个固定点，则该力系独立平衡方程的个数最多为 5 个，因为对过这两个固定点的轴的力矩方程已无法求解未知量，即此方程无效。

6. **提示**：因科氏加速度 $\boldsymbol{a}_C=2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$，当动系角速度向量 $\boldsymbol{\omega}_e$ 和相对速度 $\boldsymbol{v}_r$ 平行时，其夹角为 0°，由矢量叉乘的定义，知此时科氏加速度等于零。

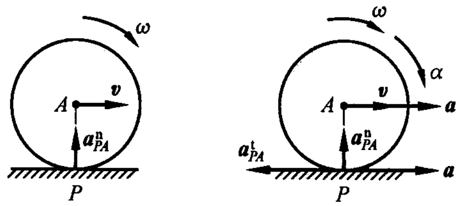
7. **提示**：车轮沿水平路面纯滚动时，若为匀速转动，如图(a)所示，由求加速度的基点法，选轮心 A 为基点，有

$$\boldsymbol{a}_P=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{a}_{PA}^{t}+\boldsymbol{a}_{PA}^{n}$$

式中，$a_A=0$，$a_{PA}^{t}=R\alpha=0$，即轮心只有指向轮心的加速度 $\boldsymbol{a}_{PA}^{n}$。

车轮沿水平路面纯滚动时，若轮心有加速度，如图(b)所示，由求加速度的基点法，选轮心 A 为基点，有

$$\boldsymbol{a}_P=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{a}_{PA}^{t}+\boldsymbol{a}_{PA}^{n}$$



题 7 提示图

式中，$a_A=a=R\alpha$，$a_{PA}^{t}=R\alpha=a$，则轮心只有指向轮心的加速度 $\boldsymbol{a}_{PA}^{n}$。

所以，不管轮心运动情况如何，车轮和路面接触点的加速度方向均指向轮心。

8. **提示**：由质点系的动量定理$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\sum \boldsymbol{F}_i^{e}$ 与动量矩定理$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}=\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{e})$，等式右边均指的是外力的主矢与主矩，所以任意质点系动量与动量矩的改变均与外力有关，而与内力无关。

9. **提示**：对任意质点系，其惯性力系简化的主矢大小与方向，与简化中心位置无关，作用点与简化中心有关。

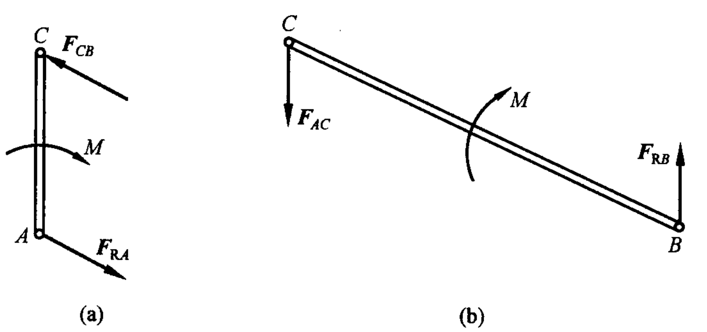
10. **提示**：由虚位移的定义可知。

二、1. 10 kN，5 kN

解答：当力偶 M 作用于 AC 杆上时，BC 杆为二力杆，AC 杆的受力图如图(a)所示，由力偶系的平衡方程，有

$$\sum M_i=0,\quad F_{RA}\cos 30°\times AC-M=0$$

求得 A 处约束力的大小为 10 kN。



题 1 解答图

当力偶 M 作用于 BC 杆上时，AC 杆为二力杆，BC 杆的受力图如图(b)所示，由力偶系的平衡方程，有

$$\sum M_i=0,\quad F_{AC}\times 2-M=0$$

求得 A 处约束力的大小为 5 kN。

2. 否，是

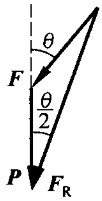
解答：如图所示，力 $\boldsymbol{F}$ 与力 $\boldsymbol{P}$ 的合力为 $\boldsymbol{F}_R$，其与铅直线的夹角为$\frac{\theta}{2}$。若角 $\theta=50°$时，大于摩擦角 $\varphi_f=20°$，物块不自锁，不能保持静止；若角 $\theta=30°$时，小于摩擦角 $\varphi_f=20°$，物块自锁，物块保持静止。

3. 150 cm/s，　30 cm/s

解答：把动系建于杆 AB 上，动点选为杆 CD 上 D 点，则此时动点 D 的牵连速度大小为

$$v_e = AD \cdot \omega_1 = 150\ \text{cm/s}$$

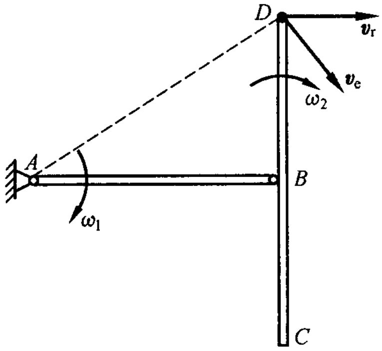
如图所示。



题 2 解答图

此时动点 D 的相对速度大小为

$$v_r = BD \cdot \omega_2 = 30\ \text{cm/s}$$



题 3 解答图

4. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}ml\alpha$，　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}ml\omega^2$，　$\dfrac{5}{6}ml^2\alpha$

解答：如图所示，其质心的加速度分别为

$$a_C^t = OC \cdot \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}l\alpha$$

$$a_C^n = OC \cdot \omega^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}l\omega^2$$

而　　$$J_O = \frac{1}{12}ml^2 + m \cdot (OC)^2 = \frac{5}{6}ml^2$$

所以，其切向惯性力主矢大小为 $F_{IR}^t = ma_C^t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}ml\alpha$；法向惯性力主矢大小为 $F_{IR}^n = ma_C^n = \dfrac{\sqrt{3}}{2}ml\omega^2$；惯性力系主矩大小为 $M_{IO} = J_O\alpha = \dfrac{5}{6}ml^2\alpha$。

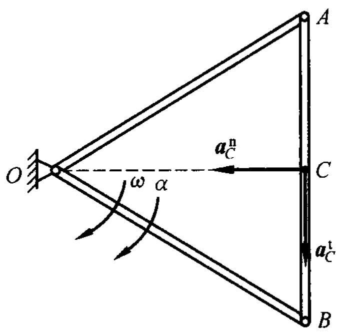
5. δr_A，　0

解答：如图所示，由虚位移之间的关系，有

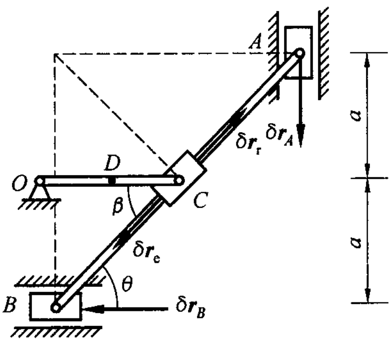
$$\delta r_B \cos 45^\circ = \delta r_A \cos 45^\circ$$

得 $\delta r_B = \delta r_A$，或者借助速度瞬心法也可得 $\delta r_B = \delta r_A$。

借助速度瞬心法，可得牵连位移 δr_e 与相对位移 δr_r 如图所示，可知点 C 的虚位移为零，从而，OC 杆上中点 D 的虚位移 δr_D 大小为零。



题 4 解答图



题 5 解答图

三、**解**：先取 AD 杆，其受力图如图(a)所示，由

$$\sum M_B = 0,\quad -F_{Ay} \cdot 1 - F \cdot 1 = 0$$

解得　　$$F_{Ay} = -40\ \text{kN}$$

然后取整体，其受力图如图(b)所示，由

$$\sum M_C=0,\quad -F_{Ay}\cdot 3-F_{Ax}\cdot 2+F\cdot 1-M=0$$

解得

$$F_{Ax}=70\ \text{kN}$$

由

$$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}+F_{Cx}=0$$

解得

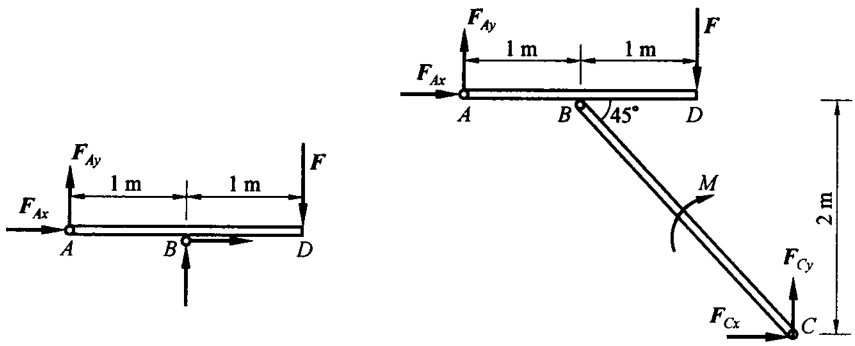
$$F_{Cx}=-70\ \text{kN}$$

由

$$\sum F_y=0,\quad F_{Ay}+F_{Cy}-F=0$$

解得

$$F_{Cy}=80\ \text{kN}$$



(a) (b)

题三解答图

四、解：把动系建于 O_2B 杆上，动点选为套筒 A，速度分析图如图(a)所示，由

$$\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$$

式中，$v_a=l\omega$，则 $v_e=v_a\cos 60°=\dfrac{1}{2}l\omega$，同时有

$$v_r=v_a\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}l\omega$$

则 O_2B 杆的角速度为

$$\omega_D=\frac{v_e}{O_2A}=\omega$$

点 B 的速度为 $v_B=l\omega$，BD 杆为瞬时平移，有

$$v_B=v_D$$

解得 BD 杆的角速度与轮的角速度为

$$\omega_{BD}=0,\quad \omega_D=\frac{v_D}{r}=4\omega$$

求加速度，把动系建于 O_2B 杆上，动点选为套筒 A，加速度分析图如图(b)所示，由

$$\boldsymbol{a}_a^n=\boldsymbol{a}_e^t+\boldsymbol{a}_e^n+\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_C \tag{1}$$

式中

$$a_a^n=l\omega^2,\quad a_C=2\omega_2 v_r=2\omega\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}l\omega=\sqrt{3}\,l\omega^2$$

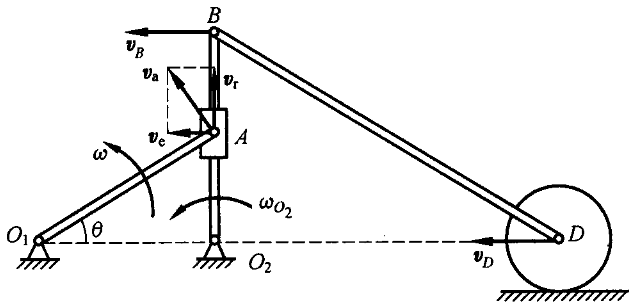
把式(1)沿 ξ 轴投影，有

$$a_a^n\cos 30°=-a_e^t+a_C$$

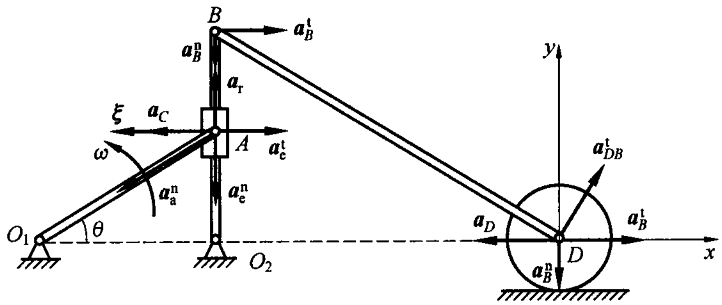
解得

$$a_e^t=\frac{\sqrt{3}}{2}l\omega^2$$

此时 B 点的加速度为



(a)



(b)

题四解答图

$$a_B^n = O_2B \cdot \omega_{O_2}^2 = l\omega^2, \quad a_B^t = 2a_e^t = \sqrt{3}\, l\omega^2$$

选点 B 为基点，有

$$\boldsymbol{a}_D = \boldsymbol{a}_B^t + \boldsymbol{a}_B^n + \boldsymbol{a}_{DB}^t \tag{2}$$

把式(2)沿 y 轴投影有　　$0 = a_{DB}^t \cos 30^\circ - a_B^n$

解得　　$a_{DB}^t = \dfrac{a_B^n}{\cos 30^\circ} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} l\omega^2$

则 BD 杆的角加速度大小为　　$\alpha_{BD} = \dfrac{a_{DB}^t}{2l} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\omega^2$

转向为逆时针转向。

把式(2)沿 x 轴投影，有

$$-a_D = a_B^t + a_{DB}^t \sin 30^\circ = \sqrt{3}\, l\omega^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} l\omega^2 = \frac{4\sqrt{3}}{3} l\omega^2$$

则轮的角加速度大小为　　$\alpha_D = \dfrac{a_D}{r} = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}\omega^2$

转向为顺时针转向。

五、解：取整体，运动分析如图(a)所示，有 $R\omega_B = v_A$，$R\omega_D = v_A$，用动能定理

$$T_1 = 0$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} mR^2 \cdot \omega_B^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} mR^2 \cdot \omega_D^2 + \frac{1}{2} m v_D^2 = 2 m v_A^2$$

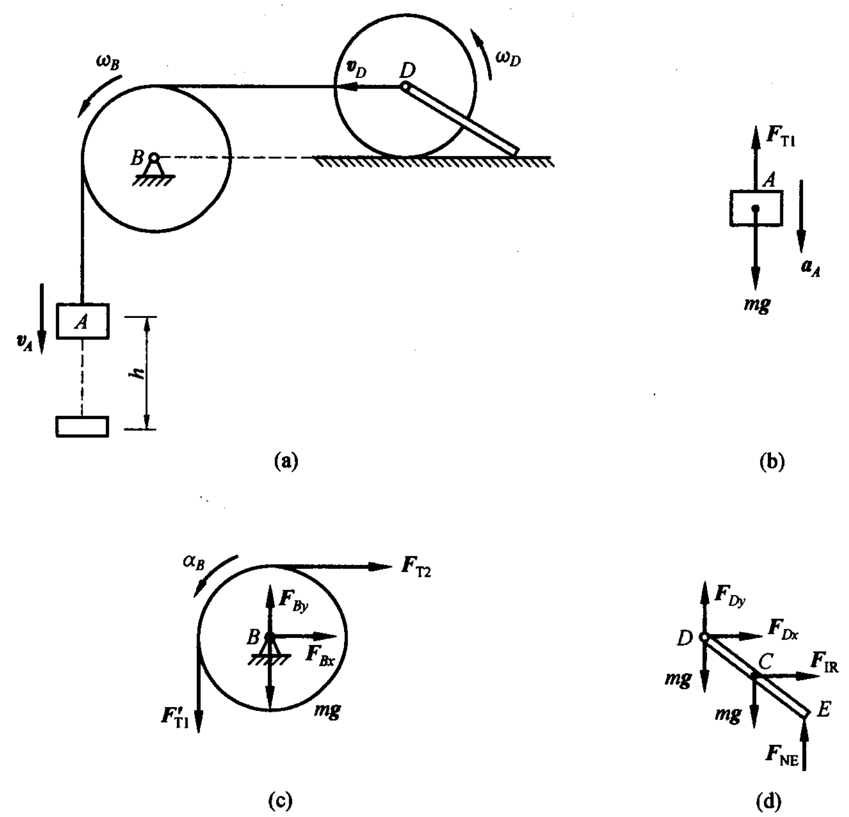
所有力做的功为　　$W = mgh$

由动能定理 $T_2-T_1=W$ 有

$$2mv_A^2-0=mgh$$

把此式对时间求一阶导数有

$$4mv_Aa_A=mgv_A$$



题五解答图

解得重物 A 下降任意高度 h 的速度与加速度为

$$\underset{\sim\sim\sim}{v_A=\sqrt{\frac{gh}{2}}},\quad \underset{\sim\sim\sim}{a_A=\frac{g}{4}}$$

取物块，如图(b)所示，由

$$ma_A=mg-F_{T1}$$

解得 $$F_{T1}=\frac{3}{4}mg$$

取轮 B，如图(c)所示，由刚体绕定轴转动微分方程，有

$$\frac{1}{2}mR^2\cdot\alpha_B=F'_{T1}\cdot R-F'_{T2}\cdot R$$

解得两轮间绳索的拉力为 $\quad F_{T2}=\frac{5}{8}mg$

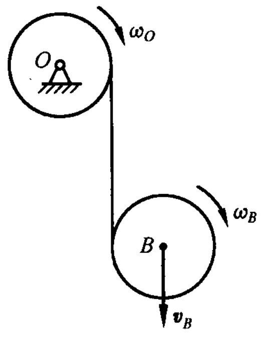
取 DE 杆，如图(d)所示，加惯性力 $\quad F_{IR}=ma_D=ma_A=\frac{1}{4}mg$

由 $\quad M_D=0\quad F_{NE}\cdot 2R\cos 30^\circ-mg\cdot R\cos 30^\circ+F_{IR}\cdot R\sin 30^\circ=0$

解得地面对杆端 E 的约束力为

$$F_{NE}=(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{24})mg$$

六、解：该系统具有两个自由度，选轮 O 的转角 φ_1 与轮 B 的转角 φ_2 为广义坐标，则运动学关系为



题六解答图

$$v_B=r\omega_O+r\omega_B=r(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2)$$

系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\cdot\dot{\varphi}_1^2+\frac{1}{2}m\,(r\dot{\varphi}_1+r\dot{\varphi}_2)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\cdot\dot{\varphi}_2$$

$$=\frac{1}{4}mr^2\dot{\varphi}_1^2+\frac{1}{2}m\,(r\dot{\varphi}_1+r\dot{\varphi}_2)^2+\frac{1}{4}mr^2\dot{\varphi}_2^2$$

系统为保守系统，其势能为

$$V=-mg(r\varphi_1+r\varphi_2+h)$$

拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{4}mr^2\dot{\varphi}_1^2+\frac{1}{2}m\,(r\dot{\varphi}_1+r\dot{\varphi}_2)^2+\frac{1}{4}mr^2\dot{\varphi}_2^2+mg(r\varphi_1+r\varphi_2+h)$$

由拉格朗日方程　$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial\varphi_1}=0,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial\varphi_2}=0$

运算后有

$$\frac{1}{2}mr^2\ddot{\varphi}_1+mr^2(\ddot{\varphi}_1+\ddot{\varphi}_2)-mgr=0$$

$$\frac{1}{2}mr^2\ddot{\varphi}_2+mr^2(\ddot{\varphi}_1+\ddot{\varphi}_2)-mgr=0$$

解得两轮的角加速度为　$\alpha_1=\ddot{\varphi}_1=\frac{2g}{5r},\quad \alpha_2=\ddot{\varphi}_2=\frac{2g}{5r}$

哈尔滨工业大学2014年(春)期末
理　论　力　学　试　题

一、是非判断题(每题1分,共10分)

1.在刚体上作用多个力偶,各力偶矩矢均位于同一平面内,且不共线,则此力偶系必为平面力偶系。　(　　)

2.平面任意力系有3个独立的平衡方程,这3个平衡方程可以完全是力的投影方程,可以不用力矩方程。　(　　)

3.空间平行力系简化的最后结果可以是力螺旋。　(　　)

4.称法向约束力与摩擦力的合力为全约束力,全约束力与法线间的夹角为摩擦角。　(　　)

5.牵连运动是动系相对静系的运动,所以牵连速度与加速度一定是动系相对静系的速度与加速度。　(　　)

6.刚体平面运动时,其角速度与角加速度与基点的选取有关。　(　　)

7.质点系对某点的动量矩守恒,则对过该点的轴的动量矩不一定守恒。　(　　)

8.某质点系的动能很大,则该质点系的动量也必定很大。　(　　)

9.质点系的虚位移与质点系所受的力有关。　(　　)

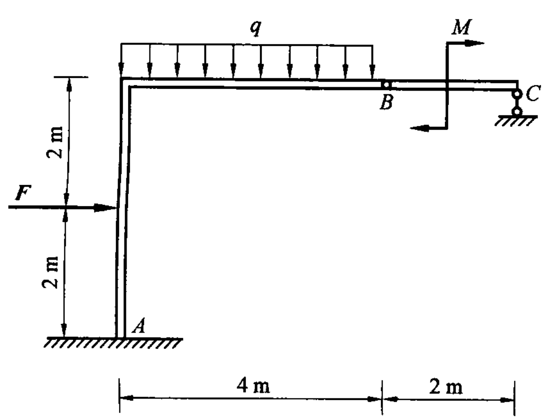
10.广义力也是力,所以广义力的量纲必为力的量纲。　(　　)

二、计算题(20分)

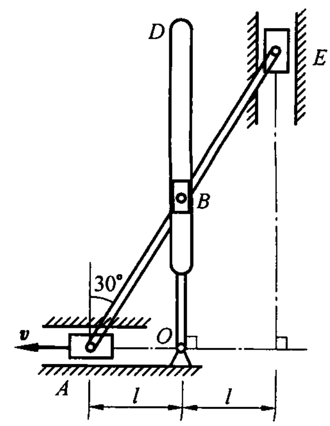
不计图示平面结构各构件自重,均布力 $q=2$ kN/m,力偶矩 $M=8$ kN/m,水平力 $F=6$ kN,尺寸如图所示。A 处为固定端,求 A 处与 C 处的约束力。

三、计算题(20分)

图示平面机构中,滑块 A 为主动件,其以匀速 $\boldsymbol{v}$ 向左运动。滑块 B 可在杆 OD 的滑槽内滑动,杆 AE 长为 $4l$。求在图示位置时,杆 AE 的角速度和角加速度,杆 OD 的角速度和角加速度。



题二图



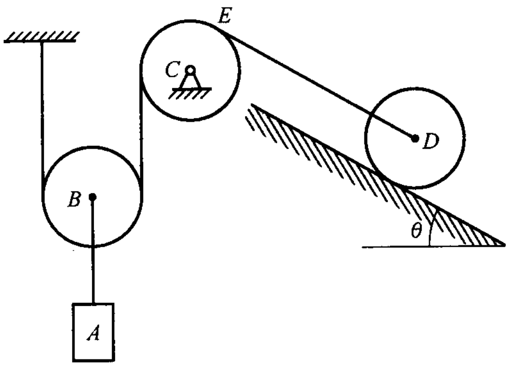
题三图

四、计算题(20 分)

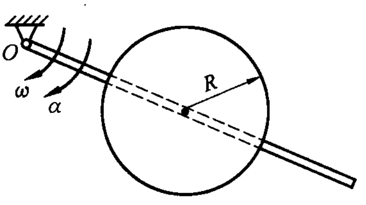
三个均质轮质量均为 m,半径均为 R,物块 A 的质量也为 m,不计绳重。系统由静止开始运动,轮 D 纯滚动,绳的倾斜段 ED 和角度 $\theta=30°$的斜坡平行。求物块 A 下落高度为 h 时的速度,加速度,ED 段绳的拉力,轮 D 所受的摩擦力。

五、计算题(6 分)

均质杆长为 $4R$,质量为 m,质量为 m 半径为 R 的均质圆盘与此杆固(焊)接在一起,圆盘的质心位于杆的正中间。系统的角速度为 ω,角加速度为 α。求惯性力系简化的主矢和主矩,在图中标出其位置与方向。



题四图



题五图

六、计算题(9 分)

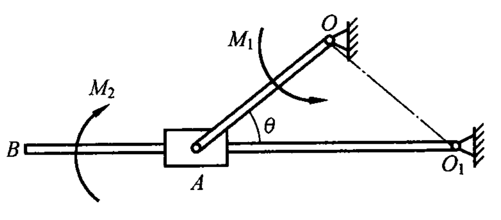
不计图示平面机构各构件自重,$OO_1=OA=l$,在矩为 M_1 与 M_2 的力偶作用下,系统在图示位置平衡,用虚位移原理求平衡时力偶矩 M_1 与 M_2 之间的关系。

(用其他方法做不给分)

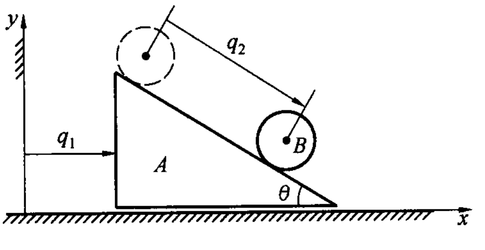
七、计算题(15 分)

图示三棱柱 A 的质量为 m_1,放在光滑水平面上,质量为 m_2、半径为 R 的均质圆柱 B 沿三棱柱的斜面做纯滚动。角 $\theta=30°$,$m_2=2m_1$。系统初始静止,用图示广义坐标,用拉格朗日方程求运动过程中三棱柱的加速度。

(用其他方法做不给分)



题六图



题七图

哈尔滨工业大学 2014 年(春)期末理论力学试题解答

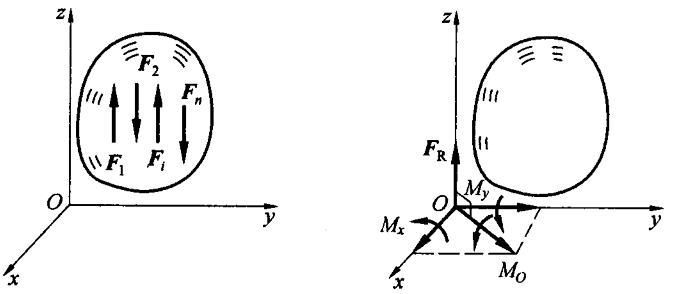
一、1. ×;2. ×;3. ×;4. ×;5. ×;6. ×;7. ×;8. ×;9. ×;10. ×

1. **提示**:在刚体上作用多个力偶,若各力偶矩矢均垂直于同一平面内,为平面力偶系。

若各力偶矩矢均位于同一平面内，且不共线，则此力偶系为空间力偶系。

2. **提示**：平面任意力系有 3 个独立的平衡方程，这 3 个平衡方程可以完全是力矩方程，可以不用投影方程。但这 3 个平衡方程不能完全是力的投影方程，因为平面任意力系平衡的充分必要条件是其主矢与主矩均为零，而主矩为一力偶系，力偶中的力在任意轴投影均为零，投影方程不能说明主矩为零，所以必须有一力矩方程。

3. **提示**：空间平行力系简化的最后结果不可能是力螺旋。因简化为力螺旋的条件是主矢与主矩平行或除90°外的任意角，而如图所示，空间平行力系简化的中间结果是主矢与主矩垂直，所以空间平行力系简化的最后结果不可能是力螺旋。



题 3 提示图

4. **提示**：处于临界平衡状态时，全约束力与法线间的夹角为摩擦角，非临界平衡状态时，不是。

5. **提示**：牵连速度与加速度是动点和动系重合的动系上一点，称之为牵连点或重合点，相对静系的速度与加速度。

6. **提示**：刚体平面运动时，其线速度与线加速度与基点的选择有关，基点不同，则基点的线速度与线加速度一般不同，而其角速度与角加速度与基点的选取无关。

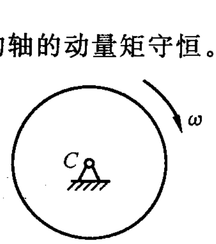
7. **提示**：质点系对某点的动量矩守恒，则对过该点的轴的动量矩也一定守恒。由

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}=\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{e})=0$$

有 $\boldsymbol{L}_O=\overline{C}$，而 $\boldsymbol{L}_O=L_x\boldsymbol{i}+L_y\boldsymbol{j}+L_z\boldsymbol{k}$，由对点的矩与对过该点的轴的矩的关系，可知对该点的轴的动量矩也一定守恒。

或因对点的力矩为零，则对过该点的轴的力矩为零，所以对过该点的轴的动量矩守恒。

8. **提示**：某质点系的动能很大，则该质点系的动量不一定很大。如图所示均质圆盘，无论其质量与转速多大，其动量总为零。



题 8 提示图

9. **提示**：由虚位移的定义可知，质点系的虚位移与质点系所受的力无关。

10. **提示**：广义力也是力，广义力的量纲可以是力的量纲，但不一定是力的量纲。广义力的定义为

$$Q_k=\sum_{i=1}^{n}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}+F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_k}+F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)$$

当$\frac{\partial x_i}{\partial q_k},\frac{\partial y_i}{\partial q_k},\frac{\partial z_i}{\partial q_k}$无量纲时，广义力 Q_k 是力的量纲，但当$\frac{\partial x_i}{\partial q_k},\frac{\partial y_i}{\partial q_k},\frac{\partial z_i}{\partial q_k}$有量纲时，则广义力 Q_k 不是力的量纲。

二、解：先取 BC 杆，其受力图如图(a)所示，为一力偶系，由

$$\sum M_i=0,\quad F_{NC}\times 2-M=0$$

解得

$$F_{NC}=F_{RB}=4\ \text{kN}$$

然后取构件 AB，其受力图如图(b)所示，由

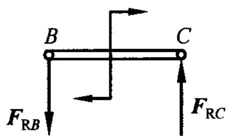
$$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}+F=0$$

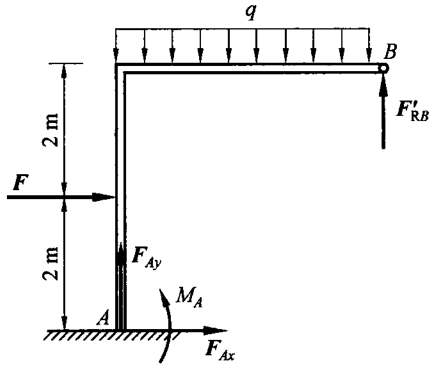
$$\sum F_y=0,\quad F_{Ay}+F'_{RB}-4q=0$$

$$\sum M_A=0,\quad M_A-F\times 2-4q\times 2+4F'_{RB}=0$$

分别解得

$$F_{Ax}=-6\ \text{kN},\quad F_{Ay}=4\ \text{kN},\quad M_A=12\ \text{kN}\cdot\text{m}$$





题二解答图

三、解：杆 AE 为平面运动，其速度瞬心如图(a)所示，则

则
$$\omega_{AE}=\frac{v_A}{AP}=\frac{v}{2\sqrt{3}\,l}=\frac{\sqrt{3}\,v}{6l}$$

即杆 AE 的角速度为
$$\omega_{AE}=\frac{\sqrt{3}\,v}{6l}$$

把动系建于杆 ODB 上，选滑块 B 为动点，由

$$\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$$

式中
$$v_a=BP\cdot\omega_{AE}=\frac{\sqrt{3}}{3}v$$

则
$$v_e=v_a\cos 30^\circ=\frac{v}{2}$$

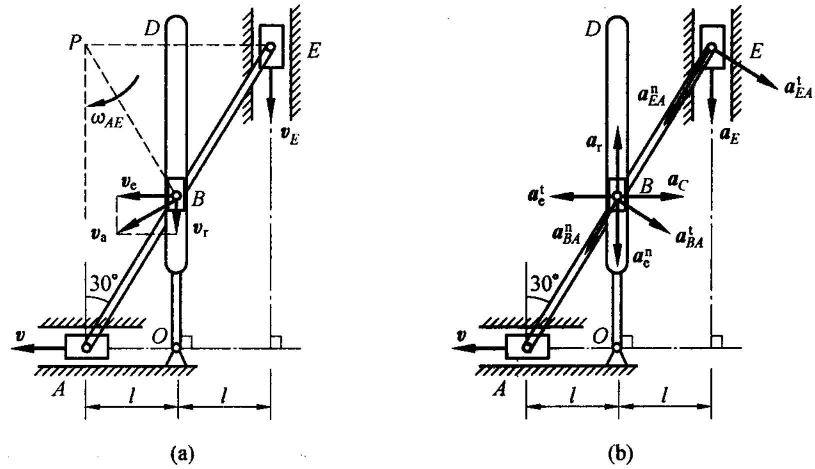
同时有
$$v_r=v_a\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{3}\,v}{6}$$

则杆 OD 的角速度为
$$\omega_{OD}=\frac{v_e}{OB}=\frac{\sqrt{3}\,v}{6l}\text{(逆时针)}$$

选点 A 为基点，$a_A=0$，求点 E 的加速度，如图(b)所示，有

$$\boldsymbol{a}_E=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{a}_{EA}^{n}+\boldsymbol{a}_{EA}^{t}=\boldsymbol{a}_{EA}^{n}+\boldsymbol{a}_{EA}^{t}\tag{1}$$

式中
$$a_{EA}^{n}=4l\cdot\omega_{AE}^2=\frac{v^2}{3l}$$



题三解答图

把式(1)沿水平方向投影，有

$$0=a_{EA}^{t}\cos 30^\circ-a_{EA}^{n}\sin 30^\circ$$

解得

$$a_{EA}^{t}=\frac{v^2}{3\sqrt{3}\,l}$$

则杆 AE 的角加速度为

$$\alpha_{AE}=\frac{a_{EA}^{t}}{4l}=\frac{\sqrt{3}\,v^2}{36l^2}\text{(顺时针)}$$

把动系建于杆 ODB 上，选滑块 B 为动点，如图(b)所示，由

$$\boldsymbol{a}_a=\boldsymbol{a}_{BA}^{n}+\boldsymbol{a}_{BA}^{t}=\boldsymbol{a}_e^{n}+\boldsymbol{a}_e^{t}+\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_C \tag{2}$$

式中 $a_{BA}^{n}=2l\cdot\omega_{AE}^{2}=\dfrac{v^2}{6l}$， $a_{BA}^{t}=2l\cdot\alpha_{AE}=\dfrac{\sqrt{3}\,v^2}{18l}$， $a_C=2\omega_{OD}\cdot v_r=\dfrac{v^2}{6l}$

把式(2)沿水平方向投影，有

$$a_{BA}^{t}\cos 30^\circ-a_{BA}^{n}\sin 30^\circ=-a_e^{t}+a_C$$

解得

$$a_e^{t}=\frac{v^2}{6l}$$

则杆 OD 的角加速度为 $$\alpha_{OD}=\frac{a_e^{t}}{OB}=\frac{\sqrt{3}\,v^2}{18l^2}\text{(逆时针)}$$

四、解：运动学关系为

$$\omega_B=\frac{v_A}{R},\quad \omega_C=\frac{2v_A}{R},\quad \omega_D=\frac{2v_A}{R}$$

如图(a)所示。用动能定理，有 $T_1=0$，轮 B 的动能为

$$T_B=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}mR^2\cdot\omega_B^2=\frac{3}{4}mv_A^2$$

轮 C 的动能为 $$T_C=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\cdot\omega_E^2=mv_A^2$$

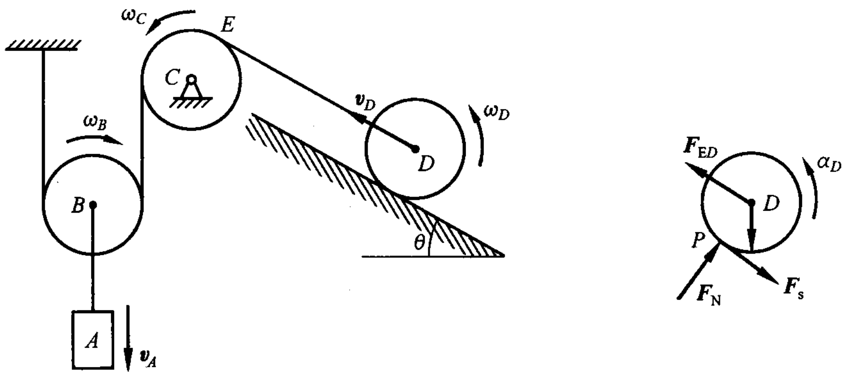
轮 D 的动能为 $$T_D=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}mR^2\cdot\omega_D^2=3mv_A^2$$

则整体的动能为

$$T_2=\frac{1}{2}mv_A^2+T_B+T_C+T_D=\frac{21}{4}mv_A^2$$

所有力做的功为

$$W=mgh+mgh-mg\cdot 2h\sin 30^\circ=mgh$$



(a)　(b)

题四解答图

由动能定理 $T_2-T_1=W$，有

$$\frac{21}{4}mv_A^2-0=mgh \tag{1}$$

得物块 A 下落高度为 h 时的速度为

$$\underline{v_A=\sqrt{\frac{4}{21}gh}}$$

把式(1)对时间求一阶导数，有 $\frac{21}{2}v_Aa_A=gv_A$

得物块 A 下落高度为 h 时的加速度为 $\underline{a_A=\frac{2}{21}g}$

取轮 D，如图(b)所示，由对速度瞬心的动量矩定理 $J_P\alpha=\sum M_P$，有

$$\frac{3}{2}mR^2\alpha_D=F_{ED}R-mg\sin 30^\circ R$$

解得 ED 段绳的拉力为 $\underline{F_{ED}=\frac{33}{42}mg}$

由对质心的动量矩定理 $J_D\alpha=\sum M_D$，有

$$\frac{1}{2}mR^2\alpha_D=F_sR$$

解得轮 D 所受得摩擦力为 $\underline{F_s=\frac{2}{21}mg}$

五、解：如图所示，系统质心的加速度为

$$a_C^n=2R\omega^2,\quad a_C^t=2R\alpha$$

则惯性力简化的主矢大小为

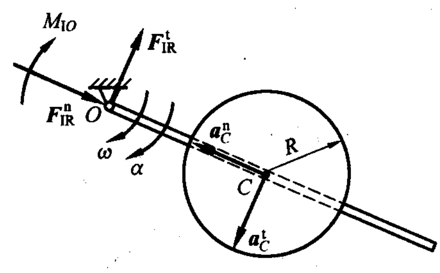
$$\underline{F_{IR}^n=4mR\omega^2},\quad \underline{F_{IR}^t=4mR\alpha}$$

方向如图所示。而

$$J_O=\frac{1}{3}\cdot m\cdot 16R^2+\frac{1}{2}mR^2+m\cdot 4R^2=\frac{59}{6}mR^2$$

则惯性力简化的主矩大小为 $\quad M_{IO}=\frac{59}{6}mR^2$

方向如图所示。



题五解答图

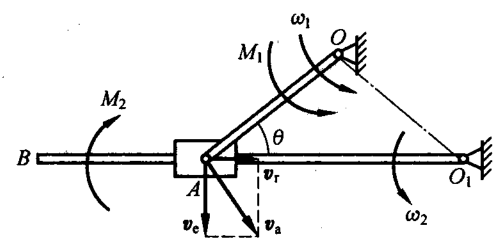
六、解：用虚速度法，设 OA 杆有一虚角速度 ω_1，如图所示，把动系建于杆 O_1B 上，选滑块 A 为动点，如图所示，则

$$v_a=l\omega_1,\quad v_e=v_a\cos\theta$$

$$\omega_2=\frac{v_e}{O_1A}=\frac{v_e}{2l\cos\theta}=\frac{\omega_1}{2}$$

由虚速度法方程 $\quad M_1\omega_1-M_2\omega_2=0$

解得 $\quad M_2=2M_1$



题六解答图

七、解：如图所示，可看出运动学关系为

$$v_a^2=v_B^2=\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2-2\dot{q}_1\dot{q}_2\cos\theta$$

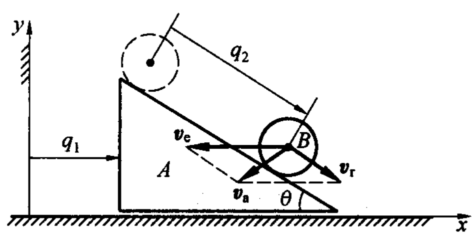
$$r\omega=v_r=\dot{q}_2$$

则系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}m_2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2-2\dot{q}_1\dot{q}_2\cos\theta)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m_2r^2\omega^2$$

$$=\frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}m_2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2-2\dot{q}_1\dot{q}_2\cos\theta)+\frac{1}{4}m_2\dot{q}_2^2$$

系统为保守系统，其势能为 $\quad V=m_2g(h-q_2\sin\theta)$



题七解答图

则拉格朗日函数为 $\quad L=T-V$

由拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_1}=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_2}=0$$

有

$$m_1\ddot{q}_1+m_2\ddot{q}_1-m_2\ddot{q}_2\cos\theta=0$$

$$\frac{3}{2}m_2\ddot{q}_2-m_2\ddot{q}_1\cos\theta-m_2g\sin\theta=0$$

联立解得三棱柱的加速度为

$$\ddot{q}_1=\frac{\sqrt{3}}{6}g$$

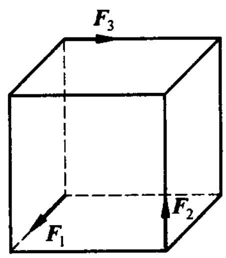
哈尔滨工业大学2014年(秋)期末
理　论　力　学　试　题

一、计算题(8分)

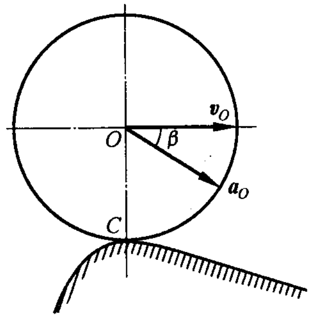
图示边长为 a 的正方体上沿三个不相交又不平行的棱上作用有三个大小相等的力 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3$,求力系简化的最终结果。

二、计算题(8分)

如图所示,半径为 R 的车轮沿曲面纯滚动,已知轮心 O 在某瞬时的速度 $\boldsymbol{v}_O$ 与加速度 $\boldsymbol{a}_O$,速度与加速度之间的夹角 β,求车轮的角加速度与速度瞬心点 C 的加速度。



题一图



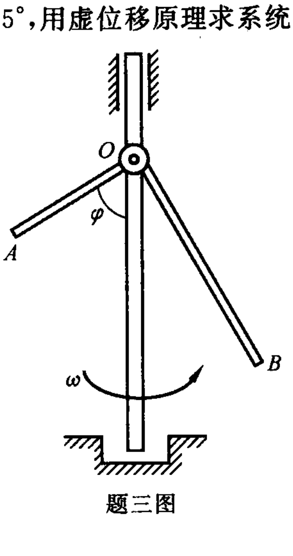
题二图

三、计算题(7分)

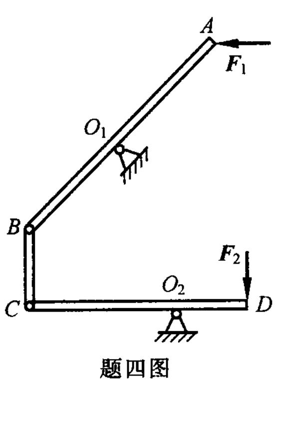
材料相同的两均质杆 OA 和 OB,长各为 $OA=a$,$OB=b$,互成直角固结在一起,其顶点 O 与铅直轴以铰链连接,此轴以等角速度 ω 转动。求杆 OA 与铅垂线的偏角 φ 与 ω 的关系。

四、计算题(7分)

图示系统中,$O_1A=O_1B=O_2C=l$,$BC=O_2D=\dfrac{l}{2}$,杆 CD 水平,杆 BC 铅垂,杆 AB 与水平线夹角为45°,用虚位移原理求系统平衡时力 F_1 与力 F_2 的关系。



题三图



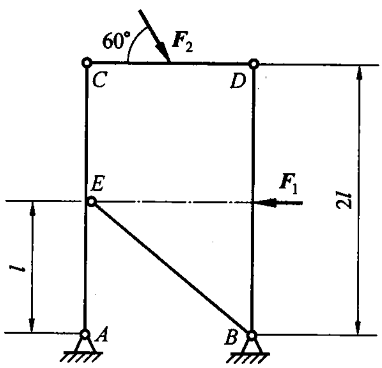
题四图

五、计算题(15 分)

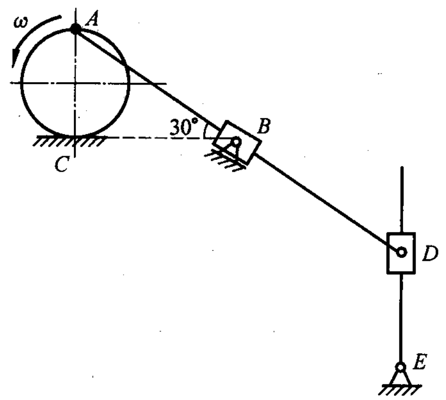
图示平面结构，各杆自重不计，A,B,C,D,E 处均为铰链连接。在杆 BD 中点作用力 $\boldsymbol{F}_1$，杆 CD 中点作用力 $\boldsymbol{F}_2$，$CD=l$。求杆 BE 受力。

六、计算题(20 分)

如图所示平面机构，圆盘半径为 R，以匀角速度 ω 做纯滚动，在点 A 通过铰链连接杆 ABD，杆 ABD 穿过套筒 B，于 D 点通过铰链连接套筒 D，套筒 D 穿过杆 DE。在图示位置，CA,DE 处于铅垂位置，$AB=BD,DE=2R$，杆 ABD 与水平线成角为30°。求此瞬时，杆 DE 的角速度与角加速度。



题五图



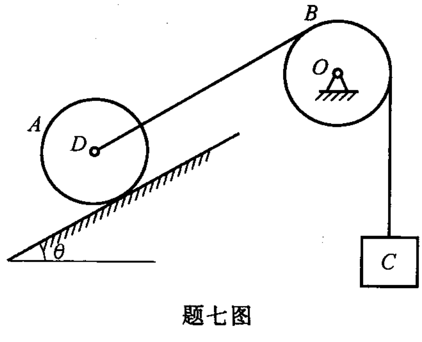
题六图

七、计算题(20 分)

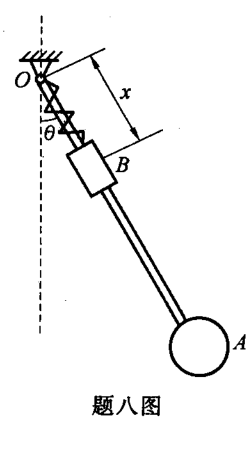
跨过定滑轮 B 的绳索，两端分别系在滚子 A 的中心 D 和物块 C 上，滚子 A 与定滑轮都可看成半径是 r，质量为 m 的均质圆盘，物块 C 的质量为$\frac{m}{2}$。滚子 A 在倾角为 $\theta(\theta\neq30°)$ 的斜面上做纯滚动。求：(1)滚子 A 质心的加速度；(2)绳索 AB 段的拉力；(3)轴承 O 处的约束力。

八、计算题(15 分)

如图所示，长为 l 的细长杆 OA，上端铰支在点 O，下端固结一质量为 m_1 的小球，另一质量为 m_2，系以弹簧的滑块 B，在重力与弹性力作用下，可沿细杆自由滑动，弹簧的刚度系数为 k，原长为 l_0，不计弹簧、细杆的质量及各处摩擦。用拉格朗日方程求细杆在铅垂面内摆动时，系统的运动微分方程。



题七图



题八图

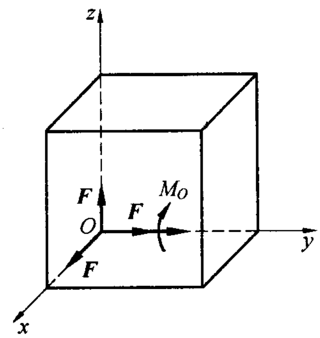
哈尔滨工业大学 2014 年(秋)期末理论力学试题解答

一、解:因 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3$ 大小相等,设 $F_1=F_2=F_3=F$,建如图所示坐标系,力系向点 O 简化得主矢为

$$\boldsymbol{F}'_R=F_1\boldsymbol{i}+F_2\boldsymbol{j}-+F_3\boldsymbol{k}=F(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$$

主矢为　　$\boldsymbol{M}_O=-F_2a\boldsymbol{j}=-Fa\boldsymbol{j}$

因主矢主矩均不为零,且不垂直,所以力系简化的最终结果为力螺旋。



题一解答图

二、解:因点 C 为速度瞬心,所以轮的角速度与角加速度为

$$\omega=\frac{v_O}{R},\quad \alpha=\frac{a_O^t}{R}=\frac{a_O\cos\beta}{R}$$

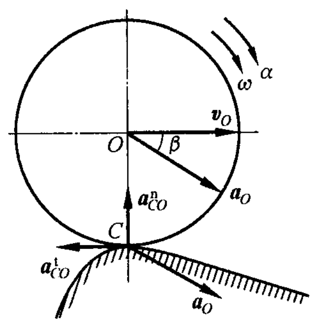
或因　$v_O=R\omega,\quad a_O^t=\frac{\mathrm{d}v_O}{\mathrm{d}t}=R\cdot\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=R\alpha$

又 $a_O^t=a_O\cos\beta=R\alpha$,所以有 $\alpha=\dfrac{a_O^t}{R}=\dfrac{a_O\cos\beta}{R}$

选轮心 O 为基点,如图所示,有

$$\boldsymbol{a}_C=\boldsymbol{a}_O+\boldsymbol{a}_{CO}^t+\boldsymbol{a}_{CO}^n \tag{1}$$

式中　$a_{CO}^t=R\alpha,\ a_{CO}^n=R\omega^2=\dfrac{v_O^2}{R}$



题二解答图

把式(1)沿水平方向投影,有

$$a_C^t=a_O\cos\beta-a_{CO}^t=0$$

沿铅直方向投影,有

$$a_C^n=-a_O\sin\beta+a_{CO}^n=\frac{v_O^2}{R}-a_O\sin\beta$$

因此,速度瞬心 C 的加速度为

$$a_C=a_C^n=\frac{v_O^2}{R}-a_O\sin\beta$$

三、解:用动静法求解。

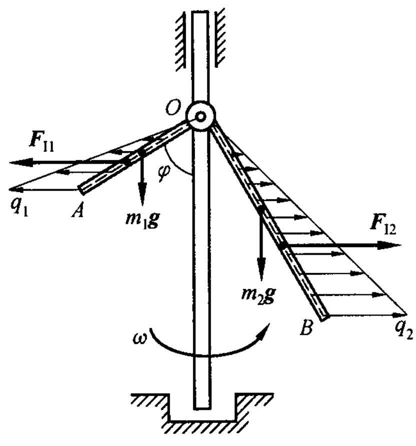
设杆单位长度的质量(即密度)为 ρ,则杆端 A 的惯性力 q_1 的大小为

$$q_1=\rho a_n^2=\rho a\sin\varphi\cdot\omega^2$$

杆端 B 的惯性力 q_2 的大小为

$$q_2=\rho a_n^2=\rho b\cos\varphi\cdot\omega^2$$

方向均如图所示。



题三解答图

OA 杆惯性力主矢 F_{I1} 的大小为

$$F_{I1}=\frac{1}{2}q_1a=\frac{1}{2}\rho a^2\omega^2\sin\varphi$$

OB 杆惯性力主矢 F_{I2} 的大小为 $F_{I2}=\frac{1}{2}q_2b=\frac{1}{2}\rho b^2\omega^2\cos\varphi$

方向均如图所示，因系统为匀速转动，所以惯性力主矩为零。

两杆的重量分别为 $m_1g=\rho ag,\quad m_2g=\rho bg$

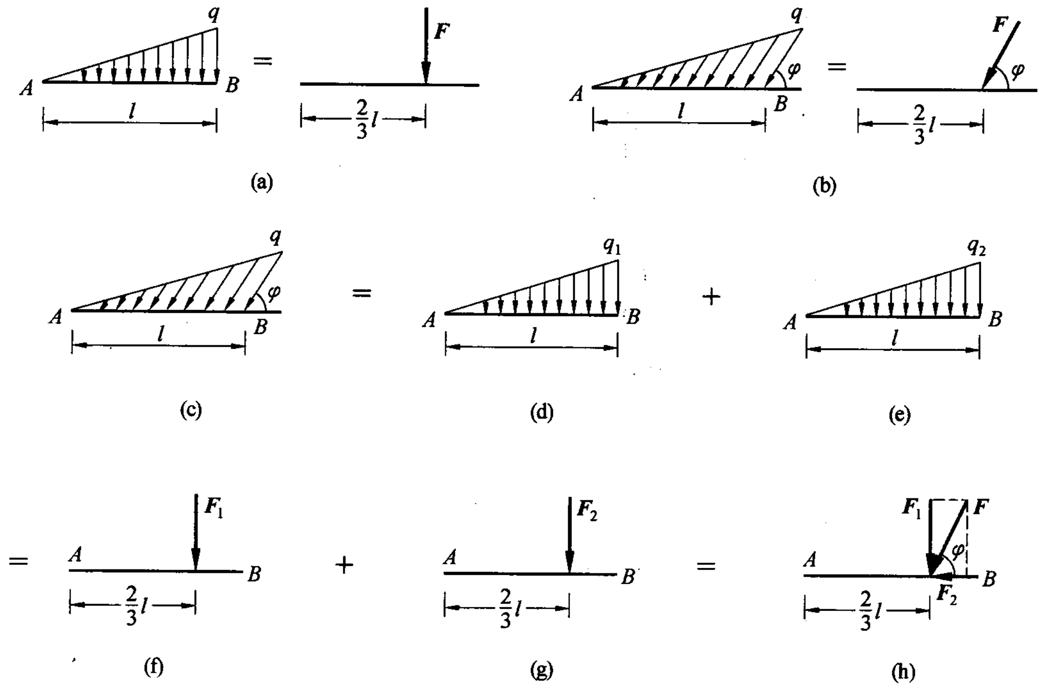
由平衡方程 $\sum M_O=0$，有

$$m_1g\cdot\frac{a}{2}\sin\varphi-F_{I1}\cdot\frac{2}{3}a\cos\varphi+F_{I2}\cdot\frac{2}{3}b\sin\varphi-m_2g\cdot\frac{b}{2}\cos\varphi=0$$

把 F_{I1} 与 F_{I2} 代入整理得

$$\omega^2=\frac{3g(b^2\cos\varphi-a^2\sin\varphi)}{(b^3-a^3)\sin 2\varphi}$$

对 OA 杆与 OB 杆也可用积分的方法求其惯性力对点 O 的矩，具体求解，略。



题三解答图

说明：对图(a)所示的三角形分布载荷，其合力的大小为 $F=\frac{1}{2}ql$，方向与作用线位置如图所示，一般教材有给出。对图(b)所示的斜三角形分布载荷，其合力的大小仍然为 $F=\frac{1}{2}ql$，方向与作用线位置如图(b)所示，其大小与作用线位置与图(a)相同，一般教材没有给出。现说明如下：

对图(c)所示载荷，可把其分解为垂直于 AB 的载荷，如图(d)所示，而沿着 AB 的载荷，可形象地画为图(e)所示情况，实际这些力的方向应为水平方向。对图(d)与图(e)所示分布载荷，均可按图(a)所示用集中载荷(合力)计算，其大小分别为

$$F_1=\frac{1}{2}q_1l=\frac{1}{2}ql\sin\varphi,\quad F_2=\frac{1}{2}q_2l=\frac{1}{2}ql\cos\varphi$$

作用在距 A 端$\frac{2}{3}l$处，如图(f)与图(g)所示。注意，图(e)与图(g)中力的实际方向为水平方向。这样，图(h)所示载荷就等效于图(c)所示载荷，由平行四边形法则，可求的合力如图(h)所示，其大小为

$$F=\sqrt{F_1^2+F_2^2}=\frac{1}{2}ql$$

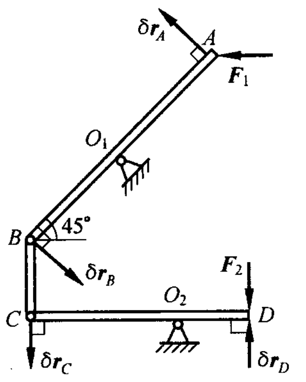
作用在距 A 端$\frac{2}{3}l$处，方向如图(h)所示。

四、解：设点 A 有虚位移 $\delta \boldsymbol{r}_A$，如图所示，则各点虚位移也如图所示，各虚位移之间的关系为

$$\delta r_B=\delta r_A,\quad \delta r_C=\delta r_B\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}\delta r_A$$

而　$$\delta r_C=2\delta r_D$$

则　$$\delta r_A=2\sqrt{2}\,\delta r_D \tag{1}$$



题四解答图

虚位移方程 $\delta W=\sum \boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$ 为

$$F_1\cdot\delta r_A\cos 45°-F_2\cdot\delta r_D=0$$

把虚位移之间的关系式(1)代入，解得

$$\underline{F_2=2F_1}$$

五、解：

第一种解法：

先取整体，受力图如图(a)所示，由

$$\sum M_B=0,\quad F_1\cdot l+F_2\sin 60°\cdot\frac{l}{2}-F_2\cos 60°\cdot 2l-F_{Ay}\cdot l=0$$

解得　$$F_{Ay}=F_1+(\frac{\sqrt{3}}{4}-1)F_2$$

然后取 CD 杆，受力图如图(b)所示，由

$$\sum M_D=0,\quad F_2\sin 60°\cdot\frac{l}{2}-F_{Cy}\cdot l=0$$

解得　$$F_{Cy}=\frac{\sqrt{3}}{4}F_2$$

最后取 AC 杆，其受力图如图(c)所示，由

$$\sum F_y=0,\quad F_{Ay}-F_{EB}\cos 45°-F'_{Cy}=0$$

解得杆 BE 所受的力为　$$\underline{F_{EB}=\sqrt{2}(F_1-F_2)}$$

第二种解法：

先取 BD 杆，其受力图如图(d)所示，由

$$\sum M_B=0,\quad F_1\cdot l+F'_{Dx}\cdot 2l=0$$

解得　$$F'_{Dx}=-\frac{1}{2}F_1$$

然后取 CD 杆，受力图如图(b)所示，由

$$\sum F_x=0,\quad F_{Cx}+F_2\cos 60°+F_{Dx}=0$$

解得
$$F_{Cx}=\frac{1}{2}(F_1-F_2)$$

最后取 AC 杆，其受力图如图(c)所示，由

$$\sum M_A=0\quad F'_{Cx}\cdot 2l-F_{EB}\sin 45^\circ\cdot l=0$$

解得
$$F_{EB}=\sqrt{2}(F_1-F_2)$$

第三种解法：

先取 CD 杆，受力图如图(b)所示，由

$$\sum M_D=0\qquad F_2\sin 60^\circ\cdot\frac{l}{2}-F_{Cy}\cdot l=0$$

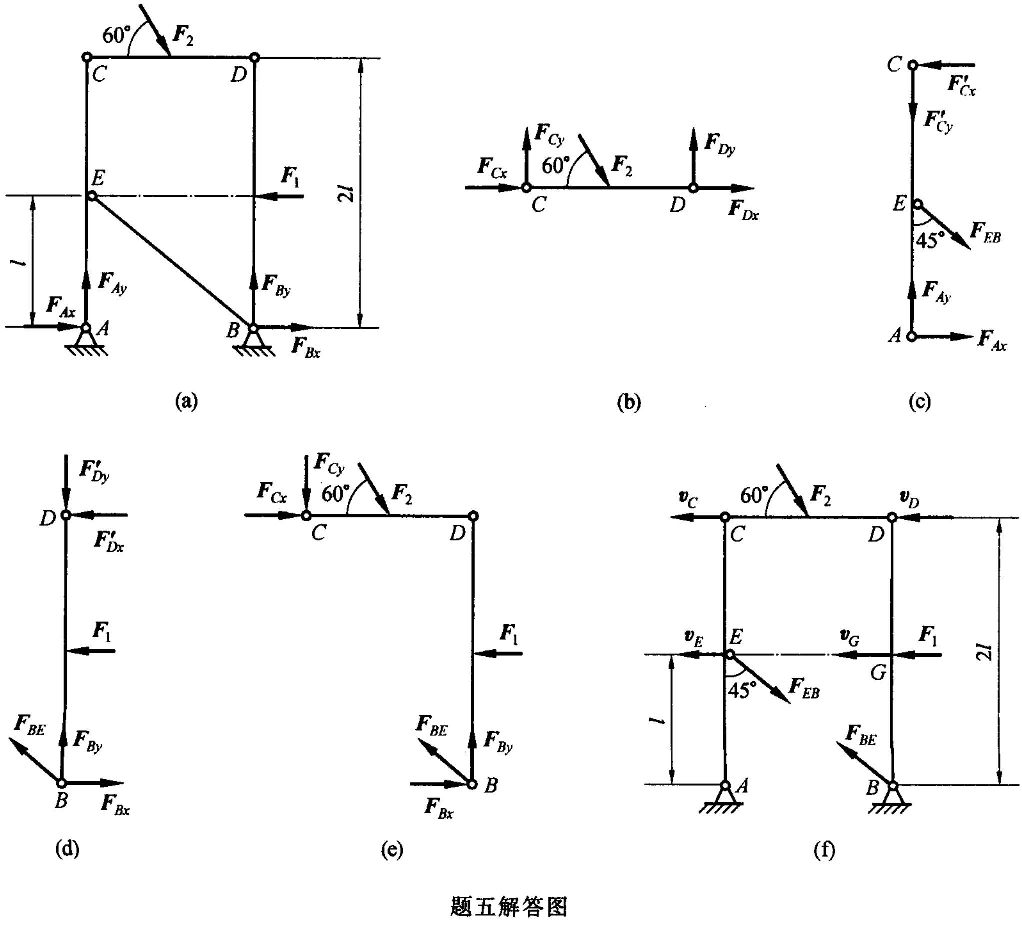
解得
$$F_{Cy}=\frac{\sqrt{3}}{4}F_2$$

然后取 CDB 系统，受力图如图(e)所示，由 $\sum M_B=0$，即

$$F_1\cdot l+F_2\sin 60^\circ\cdot\frac{l}{2}-F_2\cos 60^\circ\cdot 2l+F_{Cy}\cdot l-F_{Cx}\cdot 2l=0$$

解得
$$F_{Cx}=\frac{1}{2}(F_1-F_2)$$

最后取 AC 杆，其受力图如图(c)所示，由



题五解答图

$$\sum M_A=0 \quad F'_{Cx}\cdot 2l-F_{EB}\sin 45°\cdot l=0$$

解得
$$F_{EB}=\sqrt{2}(F_1-F_2)$$

第四种解法(最简单解法)：

用虚位移原理求解。

去掉杆 EB，变结构为机构，给点 G 以虚速度 $\boldsymbol{v}_G$，则杆 CD 为平移，速度 $\boldsymbol{v}_D$ 与 $\boldsymbol{v}_C$ 如图(f)所示，且

$$v_C=v_D=2v_G$$

则点 E 的虚速度 v_E 为

$$v_E=\frac{1}{2}v_C=v_G$$

虚速度法方程为

$$F_1\cdot v_G-F_2\cos 60°\cdot v_D-F_{EB}\cos 45°\cdot v_E=0$$

解得
$$F_{EB}=\sqrt{2}(F_1-F_2)$$

六、解：速度求解。

轮的速度瞬心为点 C，点 A 的速度为

$$v_A=2R\omega$$

杆 ABD 做平面运动，ABD 杆上点 B 的速度 $\boldsymbol{v}_B$ 沿杆 ABD，此为绝对速度，也是相对套筒 B 的速度，由 A，B 两点的速度得杆 ABD 的速度瞬心如图(a)所示，则

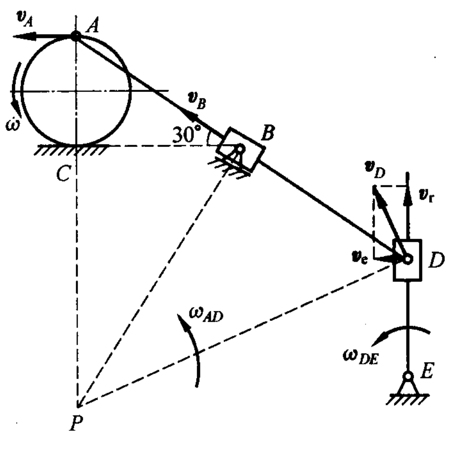
$$\omega_{AD}=\frac{v_A}{AP}=\frac{2R\omega}{8R}=\frac{1}{4}\omega$$

有
$$v_B=BP\cdot\omega_{AD}=\sqrt{3}R\omega$$

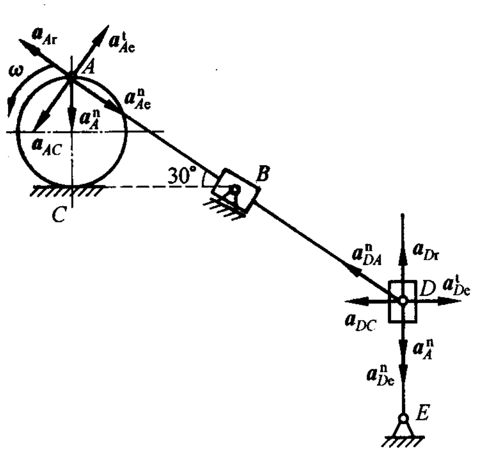
此速度也可由速度投影定理求得，此速度也是杆 ABD 相对套筒 B 的速度(杆 ABD 相对套筒 B 为平移)。

杆 ABD 上点 D 的速度为

$$v_D=DP\cdot\omega_{AD}=2R\omega$$



(a)



(b)

题六解答图

把动系建于 ED 杆上，动点选为套筒 D，由 $\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$，有 $\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_D$，则 $v_e=v_a\sin 30^\circ=v_D\sin 30^\circ=R\omega$，所以 DE 杆的角速度为

$$\omega_{DE}=\frac{v_e}{DE}=\frac{1}{2}\omega(\text{逆时针})$$

(2)加速度求解。

选轮心为基点，则点 A 的加速度为 $a_A=a_A^n=R\omega^2$，把动系建于套筒 B 上，动点选为轮上点 A，由

$$\boldsymbol{a}_a=\boldsymbol{a}_A^n=\boldsymbol{a}_{Ae}^n+\boldsymbol{a}_{Ae}^t+\boldsymbol{a}_{Ar}+\boldsymbol{a}_{AC} \tag{1}$$

如图(b)所示，此种情况下，套筒 B 与杆 ADB 的角速度相同，杆 ABD 相对套筒 B 为平移，所以杆 ABD 上点 B 的速度为杆 ABD 上各点相对套筒 B 的速度，所以式中

$$a_{AC}=2\omega_B v_{Ar}=2\omega_{AD}v_B=\frac{\sqrt{3}}{2}R\omega^2$$

把式(1)沿垂直于 ABD 方向投影，有

$$a_A^n\cos 30^\circ=a_{AC}-a_{Ae}^t$$

解得
$$a_{Ae}^t=0$$

得此时套筒 B 与杆 ABD 的角加速度

$$\alpha_B=\alpha_{AD}=\frac{a_{Ae}^t}{AB}=0$$

选点 A 为基点，求点 D 的加速度，如图(b)所示，有

$$\boldsymbol{a}_D=\boldsymbol{a}_A^n+\boldsymbol{a}_{DA}^n+\boldsymbol{a}_{DA}^t$$

式中
$$a_{DA}^t=AD\cdot\alpha_{AD}=0$$

$$a_{DA}^n=AD\cdot\omega_{AD}^2=\frac{1}{2}R\omega^2$$

把动系建于 ED 杆上，动点选为套筒 D，有

$$\boldsymbol{a}_{Da}=\boldsymbol{a}_D=\boldsymbol{a}_{De}^n+\boldsymbol{a}_{De}^t+\boldsymbol{a}_{Dr}+\boldsymbol{a}_{DC}$$

即
$$\boldsymbol{a}_D=\boldsymbol{a}_A^n+\boldsymbol{a}_{DA}^n=\boldsymbol{a}_{De}^n+\boldsymbol{a}_{De}^t+\boldsymbol{a}_{Dr}+\boldsymbol{a}_{DC} \tag{2}$$

如图(b)所示，式中 $a_{DC}=2\omega_{DE}v_r=\sqrt{3}R\omega^2$

把式(2)沿水平方向投影，有

$$-a_{DA}^n\cos 30^\circ=a_{De}^t-a_{DC}$$

解得
$$a_{De}^t=\frac{3\sqrt{3}}{4}R\omega^2$$

则 DE 杆的角加速度为 $\alpha_{DE}=\dfrac{a_{De}^t}{DE}=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\omega^2(\text{顺时针})$

七、解：取整体，运动分析如图(a)所示，有 $r\omega_D=v_D$，$r\omega_O=v_D$，$v_C=v_D$ 用动能定理，因题目没告知初始静止，设某时刻为初始位置，其动能为

$$T_1=C$$

物块 C 从此时刻下降任意高度 h 时为第二时刻，其动能为

$$T_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}mr^2\cdot\omega_D^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\cdot\omega_B^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{2}v_C^2=\frac{5}{4}mv_D^2$$

而所有力做的功为

$$W=\frac{m}{2}g\cdot h-mg\cdot h\sin\theta=(\frac{1}{2}mg-mg\sin\theta)h$$

若 $\theta=30°$，则 $W=0$，系统不运动。

由动能定理 $$T_2-T_1=W$$

有 $$\frac{5}{4}mv_D^2-C=(\frac{1}{2}mg-mg\sin\theta)h$$

对时间求一阶导数，有

$$\frac{5}{2}mv_Da_D=(\frac{1}{2}mg-mg\sin\theta)v_D$$

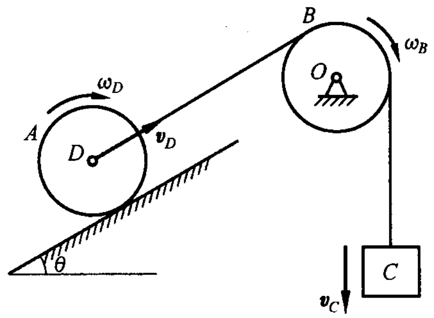
得滚子 A 质心的加速度为 $$a_D=\frac{1}{5}(1-2\sin\theta)g$$

为求 AB 段绳的拉力，取轮 D，如图(b)所示，由对速度瞬心 P 的动量矩定理

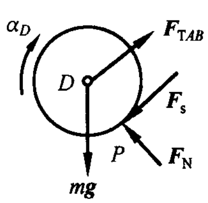
$$J_P\alpha=\sum M_P$$

有

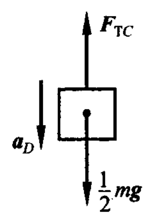
$$\frac{3}{2}mr^2\cdot\alpha_D=F_{TAB}\cdot r-mg\sin\theta\cdot r$$



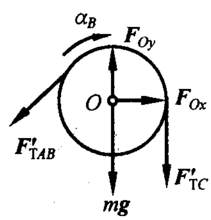
(a)



(b)



(c)



(d)

题七解答图

得绳 AB 段的拉力为

$$F_{TAB}=(\frac{3}{10}+\frac{2}{5}\sin\theta)mg$$

为求轴承 O 处的约束力，先取物块，如图(c)所示，有

$$\frac{1}{2}ma_D=\frac{1}{2}mg-F_{TC}$$

得 $$F_{TC}=\frac{2}{5}mg+\frac{1}{5}mg\sin\theta$$

最后取轮 O，如图(d)所示，由质心运动定理，有

$$ma_{Cx}=\sum F_x,\quad 0=F_{Ox}-F'_{TAB}\cos\theta$$

$$ma_{Cy}=\sum F_y,\quad 0=F_{Oy}-F'_{TAB}\sin\theta-mg-F'_{TC}$$

分别解得轴承 O 处的约束力为

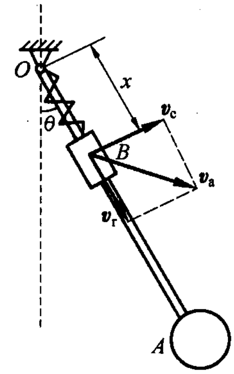
$$\underline{F_{Ox}=(\frac{3}{10}+\frac{2}{5}\sin\theta)mg\cos\theta}$$

$$\underline{F_{Oy}=(\frac{7}{5}+\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{2}{5}\sin2\theta)mg}$$

当然，也可不用图(b)，对图(d)用刚体绕定轴转动微分方程求绳 AB 段受力。

八、解：系统具有两个自由度，选图示 x 与 θ 为广义坐标，动系建于 OA 杆上，滑块 B 为动点，运动学分析如图所示，滑块 B 的绝对速度大小为

$$v_a^2=v_e^2+v_r^2=x^2\dot{\theta}^2+\dot{x}^2$$



题八解答图

系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m_1l^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m_2(x^2\dot{\theta}^2+\dot{x}^2)$$

系统为保守系统，其势能为

$$V=-m_1gl\cos\theta-m_2gx\cos\theta+\frac{1}{2}k(x-l_0)^2$$

则拉格朗日函数为

$$\begin{aligned}L&=T-V\\&=\frac{1}{2}m_1l^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m_2(x^2\dot{\theta}^2+\dot{x}^2)+m_1gl\cos\theta+m_2gx\cos\theta-\frac{1}{2}k(x-l_0)^2\end{aligned}$$

由拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}})-\frac{\partial L}{\partial x}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}})-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$$

运算后得系统的运动微分方程为

$$\underline{m_2\ddot{x}-m_2x\dot{\theta}^2-m_2g\cos\theta+k(x-l_0)=0}$$

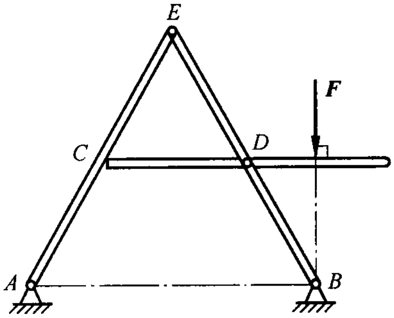
$$\underline{(m_1l^2+m_2x^2)\ddot{\theta}+2m_2x\dot{x}\dot{\theta}+m_1gl\sin\theta+m_2gx\sin\theta=0}$$

哈尔滨工业大学2015年(春)期末
理 论 力 学 试 题

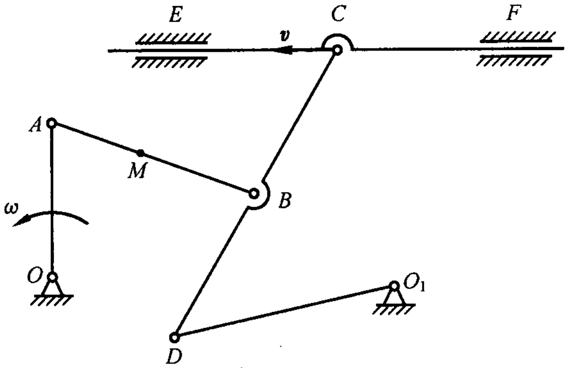
一、画图题(15分)

1. 不计图示各构件自重，C处为光滑接触。要求画出构件ACE的受力图，A,C,E处力不允许用分力表示，且要画出正确方向(即不能假设)。(6分)

2. 图示平面机构中，已知条件如图。要求在图中标出做平面运动构件的速度瞬心，画出AB杆、CBD杆、O_1D杆的角速度转向，点M的速度方向。(9分)



题1图

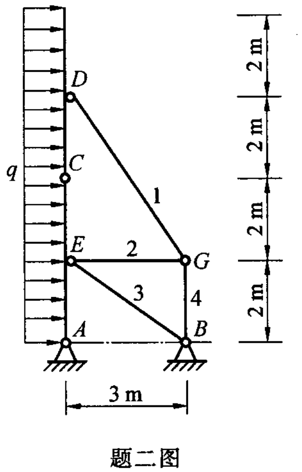


题2图

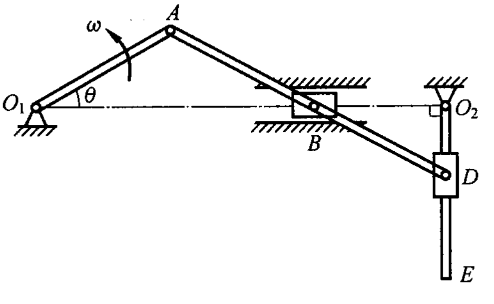
二、计算题(20分)

图示为一高为8 m的广告牌由AC与CD两块平板组成，并由4根杆支撑。不计各构件自重，作用在广告牌的风载为均匀分布，且垂直于广告牌，$q=3\ \text{kN/m}$。

求：4根杆所受力与A铰处受力。



题二图



题三图

三、计算题(20 分)

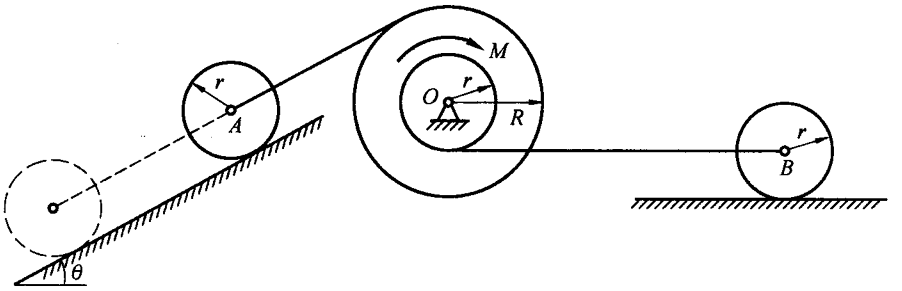
图示平面结构，主动件 O_1A 以匀角速度 ω 绕轴 O_1 转动，尺寸 $O_1A=AB=BD=r$，滑块 B 沿水平槽滑动，套筒 D 套在 O_2E 杆上，可沿此杆自由滑动。图示瞬时，$\theta=30°$。

求：图示瞬时，O_2E 杆的角速度与角加速度。

四、计算题(20 分)

图示平面系统从静止开始运动。质量为 m 的鼓轮绕轴 O 转动，对质心轴 O 的回转半径为 $\rho=2R$，其上作用一矩 $M=3mgR$ 的常值力偶。鼓轮上缠绕的绳子各连接一质量均为 m、半径均为 r 的均质轮 A 与 B，$R=2r$，两轮做纯滚动。斜面倾角 $\theta=30°$。

求：鼓轮转过任意 φ 角时的角速度与角加速度，两段绳子的拉力，两轮所受摩擦力。



题四图

五、计算题(15 分)

图示平面机构位于铅垂面内，OA 杆长为 R，AB 杆长为 $2R$，杆 AB 可在套筒 D 内任意滑动，在图示位置由静止释放。

1. 求：释放瞬时杆 AB 的角加速度。

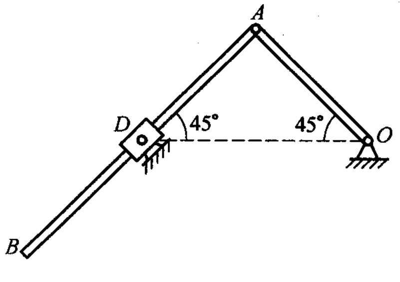
两杆均为均质杆，OA 杆的质量为 m，AB 杆的质量为 2 m，各处光滑。

2. 求：释放瞬时杆 OA 的角加速度，要求用动静法求解。

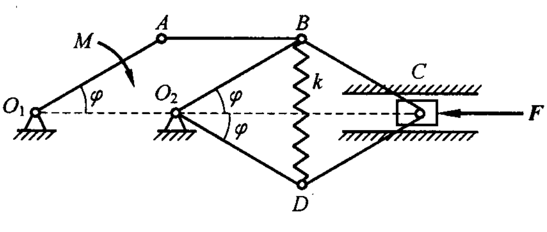
六、计算题(10 分)

图示平面机构在图示位置平衡，$\varphi=30°$，杆长 $O_1A=O_2B=O_2D=DC=CB=R$，不计图示平面机构各构件自重与各处摩擦，弹簧刚度系数为 k，原长为 $\frac{R}{2}$。在 O_1A 杆上作用一矩为 M 的力偶，滑块 C 上作用一水平力 $\boldsymbol{F}$。

要求用虚位移原理求机构平衡时，力偶矩 M 与力 F 的关系。(用其他方法做不给分)



题五图

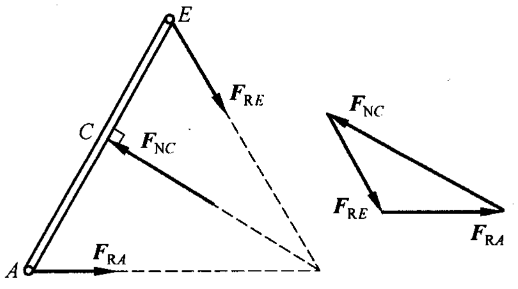


题六图

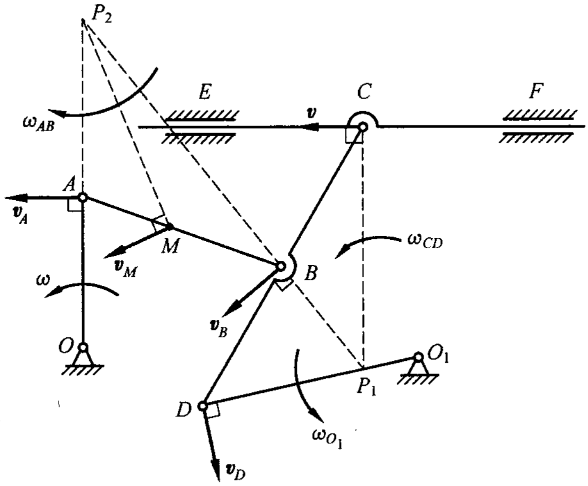
哈尔滨工业大学 2015 年(春)期末理论力学试题解答

一、1. **解**:由整体对点 B 的力矩方程 $\sum M_B=0$,可看出或求出 $F_{Ay}=0$,即约束 A 处只有水平方向约束力。然后取 ACE 杆,由 C 处为光滑接触,可知 C 处约束力 $\boldsymbol{F}_{NC}$ 方向如图所示,而 A 处约束力 $\boldsymbol{F}_{RA}$ 只沿水平方向,力 $\boldsymbol{F}_{NC}$ 与 $\boldsymbol{F}_{RA}$ 交于一点,由三力平衡汇交定理可知,E 处约束力也交于此点。画出封闭力三角形如图所示,由此可确定出各力的方向。

2. **解**:ECF 杆为平移,O_1D 杆为定轴转动,CBD 杆为平面运动,由点 C 的速度方向与点 D 的速度方位,可确定出 CBD 杆的速度瞬心如图所示,为点 P_1,其角速度为逆时针转向,从而确定出点 B 的速度方向。杆 AB 为平面运动,由点 A 的速度方向与点 B 的速度方向,可确定出 AB 杆的速度瞬心如图所示,为点 P_2,其角速度为顺时针转向,从而确定出点 M 的速度方向,如图所示。



题 1 解答图



题 2 解答图

二、**解**:先取 DC 杆,其受力图如图(a)所示,由

$$\sum M_C=0,\quad F_1\sin\theta\cdot 2-4q\cdot 2=0$$

$$\sin\theta=\frac{3}{5},\quad \cos\theta=\frac{4}{5}$$

解得 $$F_1=20\ \text{kN(压)}$$

$$\sum F_x=0,\quad F_{Cx}-F_1\sin\theta+4q=0$$

$$\sum F_y=0,\quad F_1\cos\theta-F_{Cy}=0$$

解得 $$F_{Cx}=0,\quad F_{Cy}=16\ \text{kN}$$

取点 G,受力图如图(b)所示

由 $$\sum F_x=0,\quad F_1\sin\theta-F_2=0$$

$$\sum F_y=0,\quad -F_1\cos\theta+F_4=0$$

解得 $$F_2=12\ \text{kN(拉)},\quad F_4=16\ \text{kN(压)}$$

取 AC 杆,其受力图如图(c)所示,由

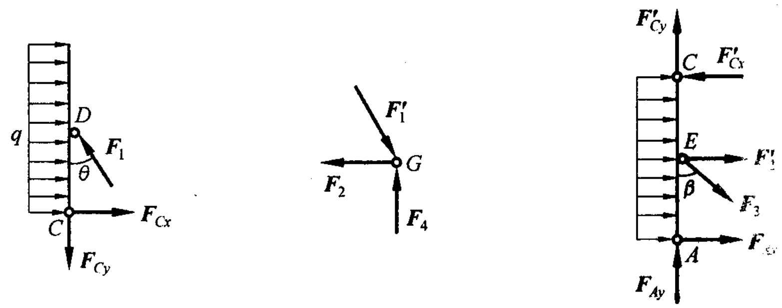
$$\sum M_A=0,\quad -F_2\cdot 2-4q\cdot 2-F_3\sin\beta\cdot 2=0$$

$$\sum F_x=0,\quad 4q+F'_2+F_3\sin\beta+F_{Ax}=0$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{Ay}+F'_{Cy}-F_3\cos\beta=0$$

式中
$$\sin\beta=\frac{3}{\sqrt{13}},\quad \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{13}}$$

解得
$$F_3=-28.84\ \text{kN(压)},\quad F_{Ax}=0,\quad F_{Ay}=-32\ \text{kN}$$



(a) (b) (c)

题二解答图

三、解:ABD 杆做平面运动,其速度瞬心如图(a)所示,则其角速度为

$$\omega_{ABD}=\frac{v_A}{AP}=\frac{r\omega}{r}=\omega$$

则 ABD 杆上点 D 的速度为

$$v_D=DP\cdot\omega_{ABD}=2r\cos 30^\circ\cdot\omega=\sqrt{3}r\omega$$

把动系建于 O_2E 杆上,动点选为套筒 D,由

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$

式中 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{v}_D$,如图(a)所示,求得牵连速度为

$$v_{\mathrm{e}}=v_D\cos 30^\circ=\frac{3}{2}r\omega$$

得 O_2E 杆的角速度为$\omega_{O_2}=\dfrac{v_{\mathrm{e}}}{O_2D}=3\omega$,转向为顺时针。

为求加速度,预先求得 $v_{\mathrm{r}}=v_D\sin 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}r\omega$

为求加速度,选点 A 为基点,先求点 B 的加速度,有

$$\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_A^{\mathrm{n}}+\boldsymbol{a}_{BA}^{\mathrm{n}}+\boldsymbol{a}_{BA}^{\mathrm{t}}\tag{1}$$

如图(b)所示,式中

$$a_A^{\mathrm{n}}=O_1A\cdot\omega^2=r\omega^2$$

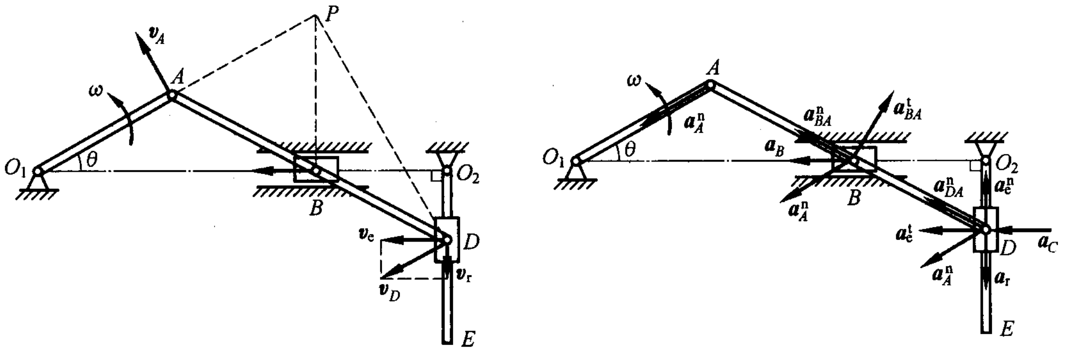
$$a_{BA}^{\mathrm{n}}=AB\cdot\omega_{ABD}^2=r\omega^2$$

把式(1)沿铅直方向投影,由图(b)

$$0=a_{BA}^{\mathrm{t}}\sin 60^\circ+a_{BA}^{\mathrm{n}}\sin 30^\circ-a_A^{\mathrm{n}}\sin 30^\circ$$

求得 $a_{BA}^{\mathrm{t}}=0$,得杆 ABD 的角加速度为 $\alpha_{ABD}=\dfrac{a_{BA}^{\mathrm{t}}}{AB}=0$

再选点 A 为基点,求点 D 的加速度,如图(b)所示,有



(b)

题三解答图

$$\boldsymbol{a}_D=\boldsymbol{a}_A^n+\boldsymbol{a}_{DA}^n+\boldsymbol{a}_{DA}^t \tag{2}$$

式中 $a_A^n=O_1A\cdot\omega^2=r\omega^2$，$a_{DA}^n=AD\cdot\omega_{ABD}^2=2r\omega^2$，$a_{DA}^t=0$。

把动系建于 O_2E 杆上，动点选为套筒 D，如图(b)所示，由

$$\boldsymbol{a}_a=\boldsymbol{a}_e^n+\boldsymbol{a}_e^t+\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_C \tag{3}$$

式中，$a_C=2\omega_{O_2}v_r=3\sqrt{3}r\omega^2$，又 $\boldsymbol{a}_D=\boldsymbol{a}_a$，有

$$\boldsymbol{a}_A^n+\boldsymbol{a}_{DA}^n=\boldsymbol{a}_e^n+\boldsymbol{a}_e^t+\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_C \tag{4}$$

把式(4)沿水平方向投影有

$$a_A^n\cos 30°+a_{DA}^n\cos 30°=a_e^t+a_C$$

求得 $a_e^t=-\frac{3}{2}\sqrt{3}r\omega^2$，则 O_2E 杆的角加速度为

$$\alpha_{O_2}=\frac{a_e^t}{O_2D}=-3\sqrt{3}\omega^2$$

转向为逆时针。

四、解：运动学分析如图(a)所示，$R\omega_O=v_A=r\omega_A$，$r\omega_O=v_B=r\omega_B$，有

$$\omega_A=2\omega_O,\quad \omega_B=\omega_O$$

因系统由静止开始运动，先用动能定理求鼓轮的角速度与角加速度，有

$$T_1=0$$

而

$$\begin{aligned}T_2&=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}mr^2\cdot\omega_A^2+\frac{1}{2}\cdot m\rho^2\cdot\omega_O^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}mr^2\cdot\omega_B^2\\&=3mr^2\omega_O^2+8mr^2\omega_O^2+\frac{3}{4}mr^2\omega_O^2\\&=\frac{47}{4}mr^2\omega_O^2\end{aligned}$$

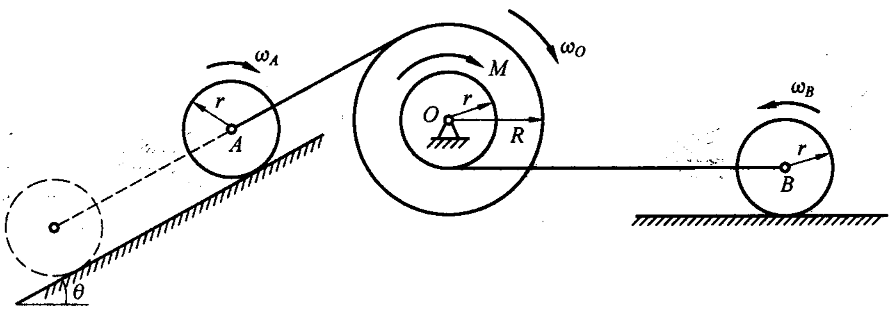
鼓轮转过任意 φ 角时，所有力做的功为

$$W=M\varphi-mg\sin\theta\cdot R\varphi=5mgr\varphi$$

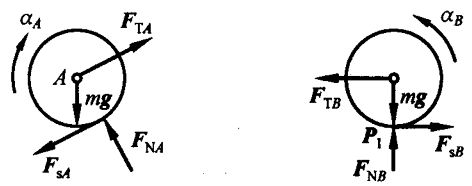
由动能定理 $T_2-T_1=W$，有

$$\frac{47}{4}mr^2\omega_O^2-0=5mgr\varphi \tag{1}$$

得鼓轮转过任意 φ 角时的角速度为



(a)



(b) (c)

题四解答图

$$\omega_O=\sqrt{\frac{20}{47}\frac{g}{r}\varphi}$$

把式(1)对时间求一阶导数有

$$\frac{47}{2}mr^2\omega_O\alpha_O=5mgr\omega_O$$

得鼓轮转过任意 φ 角时的角加速度为

$$\alpha_O=\frac{10}{47}\frac{g}{r}$$

为求轮 A 上的绳子的拉力与轮 A 所受摩擦力，取轮 A，如图(b)所示，由对速度瞬心的动量矩定理，有

$$\frac{3}{2}mr^2\cdot\alpha_A=F_{TA}\cdot r-mg\sin\theta\cdot r$$

而 $\alpha_A=2\alpha_O$，解得 $$F_{TA}=\frac{107}{94}mg$$

由对质心的动量矩定理，有 $$\frac{1}{2}mr^2\cdot\alpha_A=F_{sA}\cdot r$$

解得 $$F_{sA}=\frac{10}{47}mg$$

为求轮 B 上的绳子的拉力与轮 B 所受摩擦力，取轮 B，如图(c)所示，由对速度瞬心 P_1 的动量矩定理，有

$$\frac{3}{2}mr^2\cdot\alpha_B=F_{TB}\cdot r$$

而 $\alpha_B=\alpha_O$，解得 $$F_{TB}=\frac{15}{47}mg$$

由对质心的动量矩定理，有

$$\frac{1}{2}mr^2 \cdot \alpha_B = F_{sB} \cdot r$$

解得
$$F_{sB} = \frac{5}{47}mg$$

五、1. 解：因系统由静止释放，所以两杆的角速度均为零，套筒 D 的角速度也为零。OA 杆只有角加速度，所以点 A 有切向加速度

$$a_A^t = OA \cdot \alpha_{OA} = R\alpha_{OA}$$

把动系建于套筒 D 上，动点选为 AB 杆上点 A，如图(a)所示，由

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_A^t = \boldsymbol{a}_e^n + \boldsymbol{a}_e^t + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C$$

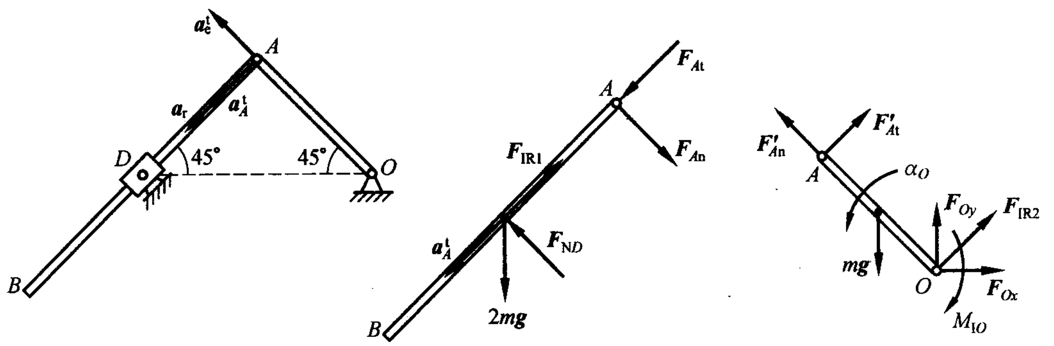
式中，$a_e^n = DA \cdot \omega_D^2 = 0$，$a_C = 2\omega_D v_r = 0$

有
$$\boldsymbol{a}_A^t = \boldsymbol{a}_e^t + \boldsymbol{a}_r \tag{1}$$

把此式沿 OA 方向投影得　　$a_e^t = 0$

即 $a_e^t = DA \cdot \alpha_D = 0$，得套筒的角加速度为零，也即释放瞬时，杆 AB 的角加速度为

$$\alpha_{AB} = 0$$



(a)　　　　(b)

题五解答图

2. **解：**由式(1)得 $a_A^t = a_r$，又由杆 AB 的角速度为零与角加速度也为零，可知杆 AB 上各点只有加速度 $a_r = a_A^t$。或者把动系建于套筒 D 上，动点选为 AB 杆上点 D，由

$$\boldsymbol{a}_{Da} = \boldsymbol{a}_{De}^n + \boldsymbol{a}_{De}^t + \boldsymbol{a}_{Dr} + \boldsymbol{a}_{DC}$$

式中，$a_{De}^n = 0$，$a_{De}^t = 0$，$a_{DC} = 2\omega_D v_r = 0$，得 $\boldsymbol{a}_{Da} = \boldsymbol{a}_{Dr}$，也即 AB 杆质心的加速度为

$$a_{Da} = a_{Dr} = a_r = a_A^t$$

用动静法，取 AB 杆，对 AB 杆加惯性力如图(b)所示，惯性力

$$F_{IR1} = 2ma_A^t = 2mR\alpha_{OA}$$

沿 AB 方向列平衡方程，有

$$\sum F_{AB} = 0,\quad F_{At} - F_{IR1} + 2mg\cos 45° = 0$$

解得
$$F_{At} = 2mR\alpha_{OA} - \sqrt{2}\,mg$$

用动静法，取 OA 杆，对 OA 杆加惯性力如图(c)所示，惯性力

$$F_{IR2} = ma_A^t = mR\alpha_{OA}$$

惯性力主矩为
$$M_{IO} = \frac{1}{3}mR^2\alpha_{OA}$$

由 $$\sum M_O=0,\quad mg\cdot\frac{R}{2}\cos 45^\circ-F'_{At}\cdot R-M_{IO}=0$$

把 $F_{At}=2mR\alpha_{OA}-\sqrt{2}\,mg$ 代入此式求解，得 OA 杆的角加速度为

$$\alpha_{OA}=\frac{15\sqrt{2g}}{28R}$$

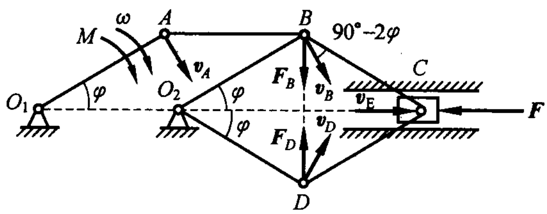
六、解:用虚速度法。设给 O_1A 杆一角速度 ω，则 $v_A=R\omega$，AB 杆为平移，速度 $v_B=v_A$ 点 C 有速度 v_C，如图所示。虚速度间的关系为

$$v_C\cos\varphi=v_B\cos(90^\circ-2\varphi)$$

即 $$v_C\cos\varphi=v_B\sin 2\varphi=2v_B\sin\varphi\cos\varphi$$

有 $$v_C=2v_B\sin\varphi$$

同理有 $v_C=2v_D\sin\varphi$，且 $v_B=v_D$。



题六解答图

去掉弹簧，弹簧在此位置的变形量为$\delta=\frac{R}{2}$，暴露出弹性力为 $F_B=F_D=k\delta=\frac{k}{2}R$，也如图所示。则虚速度法方程为

$$M\omega+F_B\cdot v_B\cos\varphi+F_D\cdot v_D\cos\varphi-F\cdot v_C=0$$

有 $$M\omega+2F_Bv_B\cos\varphi-F\cdot 2v_B\sin\varphi=0$$

即 $$M+2\cdot\frac{k}{2}R\cdot R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-FR=0$$

得机构平衡时，力偶矩 M 与力 F 的关系为

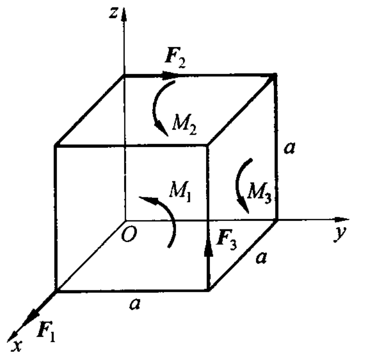
$$M+\frac{\sqrt{3}}{2}kR^2-FR=0$$

此题也可以把坐标原点建于 O_2 处，写出点 B,D,C 的坐标，用解析法求解，具体求解，略。

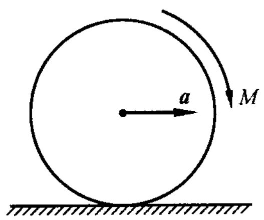
哈尔滨工业大学2015年(秋)期末
理 论 力 学 试 题

一、如图所示，在边长为 a 的正方体的三个棱边上分别作用有力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_3$，且 $F_1=F_2=F_3$，同时在三个面上各作用有力偶 M_1，M_2，M_3，力偶矩 $M_1=M_2=M_3=Fa$，求该力系向点 O 的简化结果，并问该力系最终能否简化成一个合力？为什么？(5分)

二、质量为 m，半径为 R 的均质圆轮，在力偶 M 作用下沿水平直线地面做纯滚动。求轮心的加速度 a 与圆轮所受摩擦力的大小与方向。(5分)



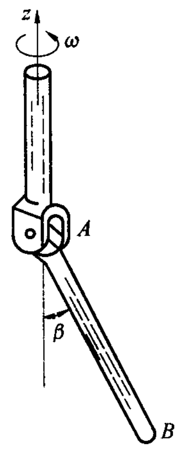
题一图



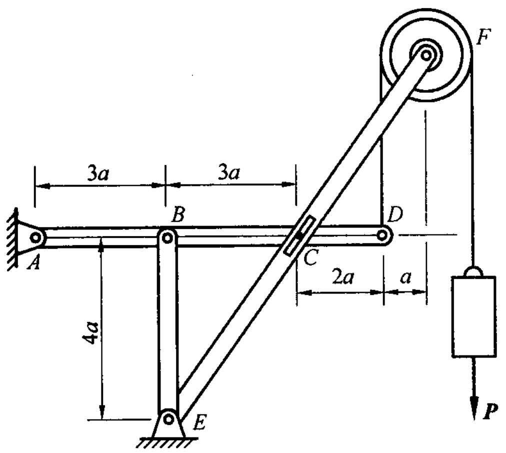
题二图

三、图示均质杆 AB 长为 l，质量为 m，以等角速度 ω 绕铅直轴转动。求杆与铅直线的交角 β。(5分)

四、图示平面结构，A，B，E，F 处为铰链连接，销钉 C 可以在 EF 杆上的滑槽内滑动，悬挂的重物的重量为 P，尺寸如图所示，不计各构件自重与摩擦。求铰链 A，B 处的约束力。(15分)



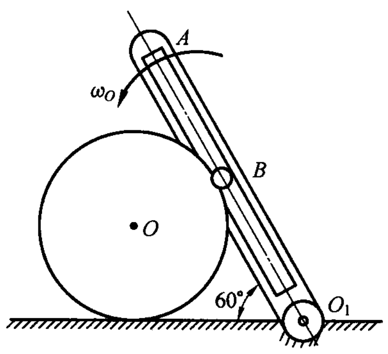
题三图



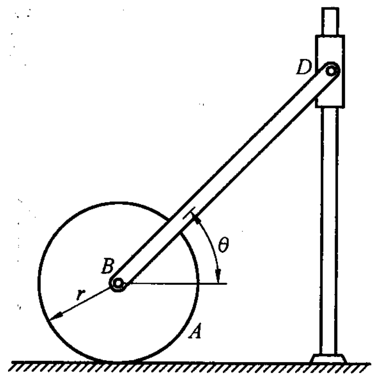
题四图

五、图示平面机构，摇杆 O_1A 以匀角速度 ω_O 绕轴 O_1 定轴转动，轮 O 在水平面上做纯滚动，轮缘上固结销钉 B，此销钉可在摇杆 O_1A 上的槽内滑动。轮的半径为 R，图示位置，O_1A 是轮的切线，摇杆与水平面的夹角为 60°。求此瞬时，轮中心 O 的速度与加速度。(20 分)

六、图示系统由均质圆盘 A 与均质细长杆 BD 及套筒 D 组成。圆盘 A 质量为 $2m$，半径为 r，沿水平面做纯滚动；BD 杆质量为 $2m$，长为 $4r$；套筒 D 质量为 m，尺寸忽略不计。系统由初始静止位置 $\theta=45°$开始释放，忽略套筒与立柱间的摩擦。求当到达位置 $\theta=0°$时，套筒 D 的速度与加速度，以及该瞬时圆盘 A 与地面间的摩擦力。(20 分)



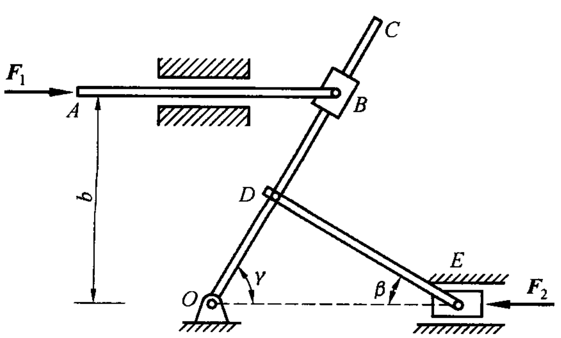
题五图



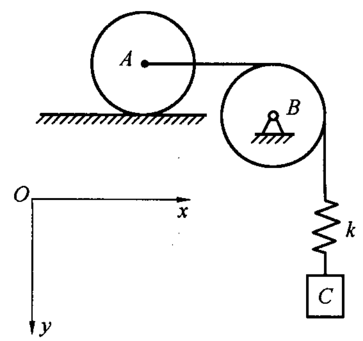
题六图

七、图示平面机构中，在 AB 杆与滑块 E 上分别作用有水平力 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$。套筒 B 与杆 AB 的端点铰接，并套在绕轴 O 转动的杆 OC 上，可沿该杆滑动。已知尺寸 b，在图示位置 $\gamma=60°$，$\beta=30°$，$OD=DB$。各构件自重不计，各接触处光滑。若系统在此位置平衡，用虚位移原理求力 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 间的关系。(其他方法不给分)(15 分)

八、图示系统在铅垂面内运动，其中均质圆柱体 A，B 质量均为 m_1，半径均为 r，圆柱体 A 在水平面上做纯滚动。在圆柱体 B 上跨过一不可伸长的绳索，绳索的一端系在圆柱体 A 的质心上，另一端与弹簧相连并悬挂一质量为 m_2 的重物 C，绳索与圆柱体之间无滑动，弹簧的刚度系数为 k。当 $x_A=y_C=0$ 时，弹簧恰为原长。要求以 x_A，y_C 为广义坐标，用拉格朗日方程建立系统的运动微分方程。(15 分)



题七图



题八图

哈尔滨工业大学 2015 年(秋)期末理论力学试题解答

一、解：在图示坐标系下，力系向点 O 简化的主矢为

$$\boldsymbol{F}'_{R}=F_1\boldsymbol{i}+F_2\boldsymbol{j}+F_3\boldsymbol{k}=F(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$$

力系对 x,y,z 轴的力矩为　$M_x=M_1=Fa,M_y=0,M_z=M_2=Fa$

所以主矩为　$\boldsymbol{M}_O=Fa\boldsymbol{i}+Fa\boldsymbol{k}=Fa(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})$

因此力系向点 O 简化的结果为

主矢　$\boldsymbol{F}'_{R}=F(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$

主矩　$\boldsymbol{M}_O=Fa(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})$

直接看出主矢主矩不垂直，或

$$\boldsymbol{F}'_{R}\cdot\boldsymbol{M}_O=2F^2a$$

即两矢量不垂直。

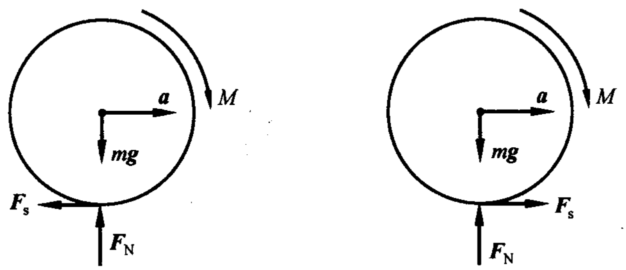
该力系不能简化为一合力；因主矢主矩均不为零，且不垂直。

二、解：轮做平面运动，设摩擦力如图(a)所示，由刚体平面运动微分方程

$$ma_{Cx}=\sum F_x,\quad J_C\alpha=\sum M_C$$

有　$ma=-F_s,\quad \dfrac{1}{2}mR^2\cdot\alpha=M+F_s\cdot R$

运动学关系为　$a=R\alpha$



(a)　　(b)

题二解答图

联立解得　$a=\dfrac{2M}{3mR},\quad F_s=-\dfrac{2M}{3R}(\rightarrow)$

再设摩擦力如图(b)所示，由刚体平面运动微分方程

$$ma_{Cx}=\sum F_x,\quad J_C\alpha=\sum M_C$$

有　$ma=F_s,\quad \dfrac{1}{2}mR^2\cdot\alpha=M-F_s\cdot R$

运动学关系为　$a=R\alpha$

联立解得　$a=\dfrac{2M}{3mR},\quad F_s=\dfrac{2M}{3R}(\rightarrow)$

三、解：杆为匀速转动，其惯性力系主矩为零，加惯性力，如图(a)所示，惯性力主矢的大小为

$$F_{IR}=ma_C=m\cdot\frac{l}{2}\sin\beta\cdot\omega^2$$

作用在距 A 为 $\frac{2}{3}l$ 处，方向如图(a)所示。

或者设杆单位长度的质量为 ρ，则杆端 B 点惯性力大小为

$$q=\rho\cdot l\sin\beta\cdot\omega^2$$

方向如图(a)所示，有 $F_{IR}=\frac{1}{2}ql=\frac{1}{2}ml\sin\beta\omega^2$，作用在距 A 为 $\frac{2}{3}l$ 处，方向如图(a)所示。

用动静法，由

$$\sum M_A=0,\quad F_{IR}\cdot\frac{2}{3}l\cos\beta-mg\cdot\frac{1}{2}l\sin\beta=0$$

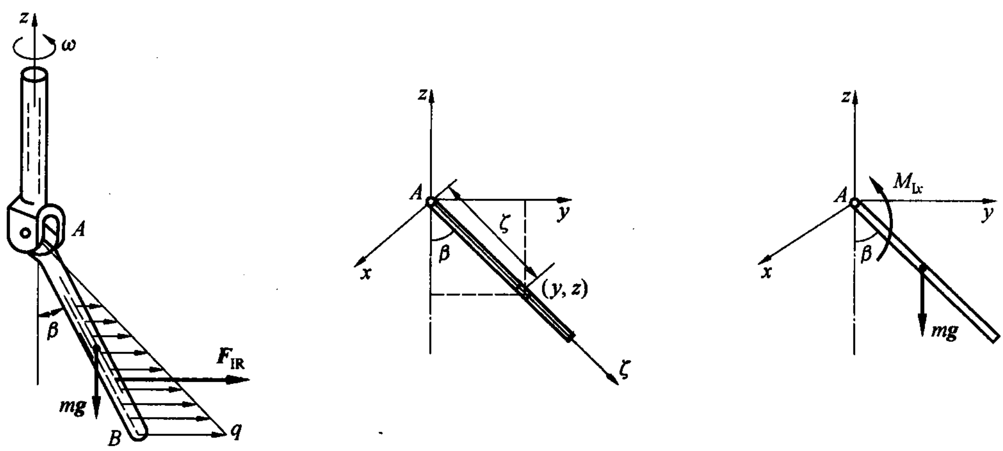
解得

$$\cos\beta=\frac{3g}{2l\omega^2}$$

或者用计算惯性矩的方法，公式为

$$M_{Ix}=J_{xz}\alpha-J_{yz}\omega^2,\quad M_{Iy}=J_{xz}\omega^2-J_{yz}\alpha$$

建如图(b)所示坐标系，杆在 yAz 平面内，沿杆建一 ξ 轴，在杆上取一小微元，其质量为



(a) (b) (c)

题 3 解答图

$$dm=\frac{m}{l}d\xi$$

而

$$x=0,\quad y=\xi\sin\beta,\quad z=-\xi\cos\beta$$

则

$$J_{xz}=\int_0^l xz\,dm=0$$

$$J_{yz}=\int_0^l yz\,dm=-\int_0^l\xi\sin\beta\cdot\xi\cos\beta\cdot\frac{m}{l}d\xi$$

$$=-\frac{1}{3}ml^2\sin\beta\cos\beta$$

有 $M_{Ix}=-J_{yz}\omega^2=\frac{1}{3}ml^2\sin\beta\cos\beta\cdot\omega^2$，$M_{Iy}=0$，用动静法，如图(c)所示，由

$$\sum M_A=0,\quad M_{Ix}-mg\cdot\frac{1}{2}l\sin\beta=0$$

解得
$$\cos\beta=\frac{3g}{2l\omega^2}$$

四、解：先取 EC 构件，其受力图如(a)图所示，由

$$\sum M_E=0,\quad F_{NC}\cdot 5a-2P\cdot 6a=0$$

解得
$$F_{NC}=\frac{12}{5}P$$

然后取构件 $ABCD$，其受力图如图(b)所示，由

$$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}+F'_{NC}\sin\theta=0$$

式中 $\sin\theta=\frac{4}{5}$，另 $\cos\theta=\frac{3}{5}$

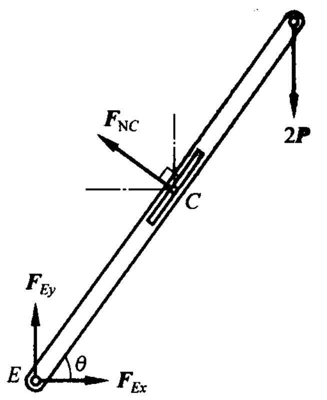
解得
$$F_{Ax}=-\frac{48}{25}P=-1.92P$$

由
$$\sum M_A=0$$
$$P\cdot 8a-F'_{NC}\cos\theta\cdot 6a+F_{BE}\cdot 3a=0$$

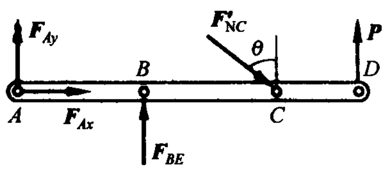
解得
$$F_{BE}=\frac{16}{75}P=0.213\ 3P(\text{压})$$

由
$$\sum F_y=0,\quad F_{Ay}+F_{BE}-F'_{NC}\cos\theta+P=0$$

解得
$$F_{Ay}=\frac{17}{75}P=0.226\ 6P$$



(a)



(b)

题四解答图

五、解：(1)求速度。轮的速度瞬心为点 P，则轮上销钉 B 的速度如图(a)所示。把动系建于杆 O_1A 上，动点选为轮上销钉 B，有 $\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$，则

$$v_e=O_1B\cdot\omega_O$$

尺寸 $O_1B=BP=2R\cos 30°=\sqrt{3}R$，则

$$v_a\cos 60°=v_e\text{，同时有 }v_r=v_a\cos 30°$$

解得
$$v_a=2\sqrt{3}R\omega_O$$
$$v_r=3R\omega_O$$

轮的角速度为

$$\omega=\frac{v_a}{BP}=2\omega_O$$

则轮心 O 的速度为

$$\underset{\sim\sim\sim}{v_O=2R\omega_O(\leftarrow)}$$

(2)求加速度。

先选轮的速度瞬心 P 为基点

$$a_P=R\omega^2=4R\omega_O^2$$

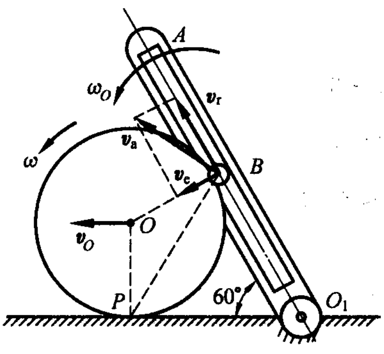
有 $$\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_P+\boldsymbol{a}_{BP}^{n}+\boldsymbol{a}_{BP}^{t} \tag{1}$$

如图(b)所示,式中

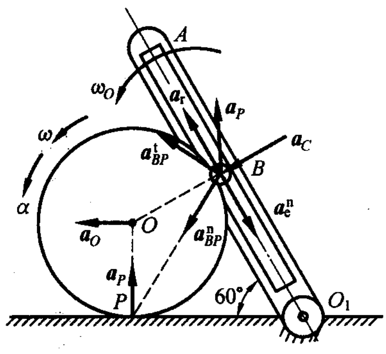
$$a_{BP}^{n}=BP\cdot\omega^2=4\sqrt{3}R\omega_O^2$$

同时把动系建于杆 O_1A 上,动点选为轮上销钉 B,有

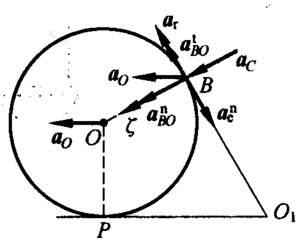
$$\boldsymbol{a}_a=\boldsymbol{a}_e^{n}+\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_C \tag{2}$$



(a)



(b)



(c)

题五解答图

式中 $a_C=2\omega_Ov_r=6R\omega_O^2$,式(1)中 $\boldsymbol{a}_B$ 即为 $\boldsymbol{a}_a$,由式(1)与式(2),有

$$\boldsymbol{a}_P+\boldsymbol{a}_{BP}^{n}+\boldsymbol{a}_{BP}^{t}=\boldsymbol{a}_e^{n}+\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_C \tag{3}$$

把式(3)沿垂直于 O_1A 方向投影有

$$-a_P\cos 60°+a_{BP}^{n}\cos 30°+a_{BP}^{t}\cos 60°=a_C$$

解得 $$a_{BP}^{t}=4R\omega_O^2$$

则轮的角加速度为 $$\alpha=\frac{a_{BP}^{t}}{BP}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\omega_O^2$$

得轮心的加速度为 $$\underset{\sim\sim\sim}{a_O=\frac{4\sqrt{3}}{3}R\omega_O^2(\leftarrow)}$$

也可选轮心 O 为基点,如图(c)所示,有

$$\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_O+\boldsymbol{a}_{BO}^{n}+\boldsymbol{a}_{BO}^{t} \tag{4}$$

式中
$$a_{BO}^{n}=R\cdot\omega^2=4R\omega_O^2$$

同时把动系建于杆 O_1A 上，动点选为轮上销钉 B，有

$$\boldsymbol{a}_a=\boldsymbol{a}_e^n+\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_C \tag{5}$$

式中
$$a_C=2\omega_O v_r=6R\omega_O^2$$

式(4)中 $\boldsymbol{a}_B$ 即为 $\boldsymbol{a}_a$，由式(4)与式(5)，有

$$\boldsymbol{a}_O+\boldsymbol{a}_{BO}^{n}+\boldsymbol{a}_{BO}^{t}=\boldsymbol{a}_e^n+\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_C \tag{6}$$

把式(6)沿垂直于 O_1A 方向投影有

$$a_O\cos 30°+a_{BO}^{n}=a_C$$

解得
$$a_O=\frac{4\sqrt{3}}{3}R\omega_O^2(\leftarrow)$$

六、解：先用动能定理求套筒 D 的速度，如图(a)所示，其在任意 φ 角时的速度瞬心为点 P，当 $\varphi=0°$时，其速度瞬心为点 B。

有 $T_1=0$，$\varphi=0°$时

$$T_2=\frac{1}{2}mv_D^2+\frac{1}{2}J_P\omega_{BD}^2$$
$$=\frac{1}{2}mv_D^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 2m\cdot(4r)^2\omega_{BD}^2$$

运动学关系为
$$v_D=4r\omega_{BD}$$

有
$$T_2=\frac{1}{2}mv_D^2+\frac{1}{3}mv_D^2=\frac{5}{6}mv_D^2$$

所有力做的功为

$$W=mg\cdot 4r\sin 45°+2mg\cdot 2r\sin 45°=4\sqrt{2}\,mgr$$

由动能定理，$T_2-T_1=W$，有

$$\frac{5}{6}mv_D^2-0=4\sqrt{2}\,mgr$$

解得套筒 D 的速度为
$$v_D=\sqrt{\frac{24\sqrt{2}}{5}gr}$$

而杆 BD 的角速度为
$$\omega_{BD}=\frac{v_D}{BD}=\sqrt{\frac{6\sqrt{2}}{5}\frac{g}{r}}$$

为求加速度，取 BD 杆，如图(b)所示，点 B 为运动的点，对此点用动量矩定理，由对任意点 A 的动量矩定理

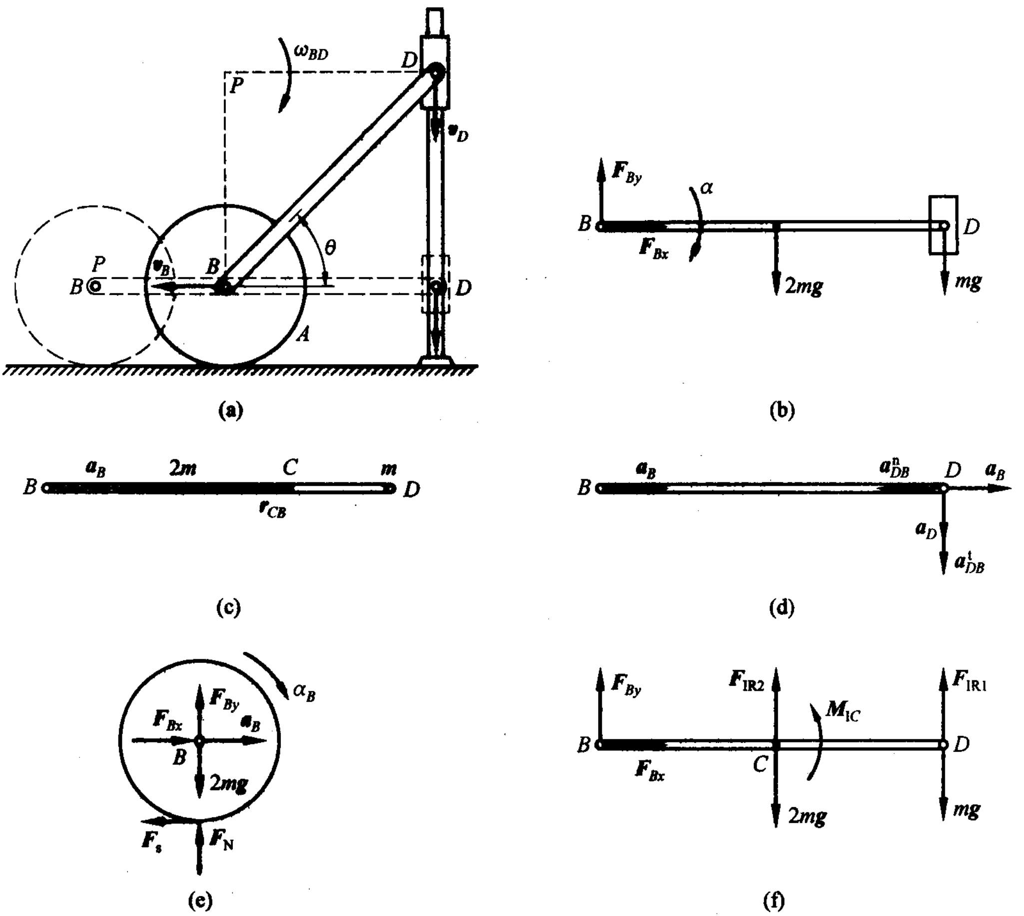
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_A}{\mathrm{d}t}=\sum\boldsymbol{M}_A(\boldsymbol{F}_i^e)-\boldsymbol{r}_{CA}\times m\boldsymbol{a}_A$$

杆 BD 与套筒 D 的质心位于点 C，相对点 B 的矢径为 $\boldsymbol{r}_{CB}$，如图(c)所示，而点 B 的加速度 $\boldsymbol{a}_B$ 也如图(c)所示，有 $\boldsymbol{r}_{CB}\times m\boldsymbol{a}_B=0$，所以有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_B}{\mathrm{d}t}=\sum\boldsymbol{M}_B(\boldsymbol{F}_i^e)$$

把套筒 D 作为一质点，有
$$J_B\alpha=\sum M_B$$

而
$$J_B=\frac{1}{3}\cdot 2m\cdot(4r)^2+m\cdot(4r)^2=\frac{80}{3}mr^2$$



题六解答图

有 $$\frac{80}{3}mr^2 \cdot \alpha = 2mg \cdot 2r + mg \cdot 4r = 8mgr$$

得杆 BD 的角加速度为 $$\alpha = \frac{3}{10}\frac{g}{r}$$

选轮心 B 为基点，求点 D 的加速度，如图(d)所示，有

$$\boldsymbol{a}_D = \boldsymbol{a}_B + \boldsymbol{a}_{DB}^{t} + \boldsymbol{a}_{DB}^{n} \tag{1}$$

沿铅直方向投影有

$$a_D = a_{DB}^{t} = BD \cdot \alpha = \frac{6}{5}g$$

即套筒 D 的加速度为

$$a_D = \frac{6}{5}g$$

对图(d)，由式(1)，沿水平方向投影，有

$$0 = a_B - a_{DB}^{n}$$

得 $$a_B = a_{DB}^{n} = BD \cdot \omega_{DB}^2 = \frac{6\sqrt{2}}{5}g$$

为求圆盘与地面的摩擦力，取圆盘，如图(e)所示，由对质心的动量矩定理

$$J_{B}\alpha_{B}=\sum M_{B}$$

即
$$\frac{1}{2}\cdot 2m\cdot r^{2}\cdot\alpha_{B}=F_{s}\cdot r$$

有
$$F_{s}=mr\alpha_{B}=ma_{B}=\frac{6\sqrt{2}}{5}mg$$

即圆盘与地面的摩擦力为

$$F_{s}=\frac{6\sqrt{2}}{5}mg(\leftarrow)$$

为求套筒 D 的加速度，也可用动静法，如图(f)所示，不计套筒 D 尺寸，其为一质点，所加惯性力大小为 $F_{IR1}=ma_{D}=4mr\alpha$，BD 杆为平面运动，其惯性力主矢大小为 $F_{IR2}=2ma_{C}=4mr\alpha$，惯性力主矩大小为

$$M_{IC}=\frac{1}{12}\cdot 2m\cdot(4r)^{2}\alpha=\frac{8}{3}mr^{2}\alpha$$

由
$$\sum M_{B}=0,\quad M_{IC}+F_{IR2}\cdot 2r-2mg\cdot 2r+F_{IR1}\cdot 4r-mg\cdot 4r=0$$

解得
$$a_{D}=\frac{6}{5}g$$

为求套筒 D 的速度与加速度，也可把系统放于任意位置 φ 角，如图(a)所示，有 $T_{1}=0$，而

$$T_{2}=\frac{1}{2}mv_{D}^{2}+\frac{1}{2}J_{P}\omega_{BD}^{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 2mr^{2}\cdot\omega_{B}^{2}\tag{2}$$

运动学关系为

$$\omega_{BD}=\frac{v_{D}}{DP}=\frac{v_{D}}{4r\cos\varphi}$$

$$v_{B}=BP\cdot\omega_{BD}=4r\sin\varphi\cdot\frac{v_{D}}{4r\cos\varphi}=v_{D}\tan\varphi$$

又
$$v_{B}=r\omega_{B}$$

代入式(2)整理后得

$$T_{2}=\frac{1}{2}mv_{D}^{2}+\frac{1}{3}m\frac{v_{D}^{2}}{\cos^{2}\varphi}+\frac{3}{2}mv_{D}^{2}\tan^{2}\varphi$$

在任意 φ 角时，所有力做的功为

$$\begin{aligned}W&=mg\cdot(4r\sin 45^{\circ}-4r\sin\varphi)+2mg\cdot(2r\sin 45^{\circ}-2r\sin\varphi)\\&=8mgr\sin 45^{\circ}-8mgr\sin\varphi\end{aligned}$$

由动能定理 $T_{2}-T_{1}=W$，有

$$\frac{1}{2}mv_{D}^{2}+\frac{1}{3}m\frac{v_{D}^{2}}{\cos^{2}\varphi}+\frac{3}{2}mv_{D}^{2}\tan^{2}\varphi-0=8mgr\sin 45^{\circ}-8mgr\sin\varphi\tag{3}$$

把此式对时间求一阶导数，有

$$\begin{aligned}&v_{D}a_{D}+\frac{1}{3}\frac{2v_{D}a_{D}\cos^{2}\varphi+v_{D}^{2}\cdot 2\cos\varphi\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}}{\cos^{4}\varphi}+3(2v_{D}a_{D}\tan^{2}\varphi+v_{D}^{2}\cdot 2\tan\varphi\sec^{2}\varphi\cdot\dot{\varphi})\\&=-8gr\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}\end{aligned}\tag{4}$$

且注意
$$\dot{\varphi}=-\omega_{BD}=-\frac{v_{D}}{4r\cos\varphi}$$

在 $\varphi=0°$时，把 $\varphi=0°$代入式(3)与式(4)，同样可得套筒 D 的速度与加速度为

$$\underline{v_D=\sqrt{\frac{24\sqrt{2}}{5}gr}},\quad \underline{a_D=\frac{6}{5}g}$$

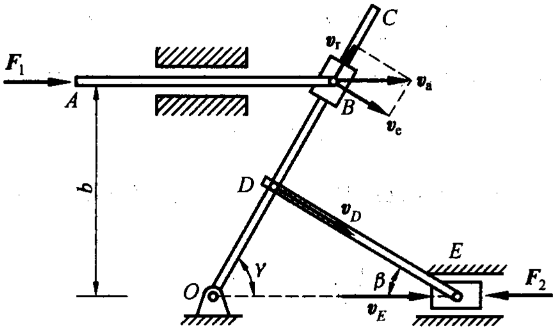
用第二种方法求套筒 D 的速度与加速度思路不复杂，但运算太复杂，且求摩擦力，还得用上面的方法。

七、解：用虚速度法。把动系建于 OC 杆上，设杆 AB 有一虚速度，此为 v_a，如图所示。则

$$v_e=v_a\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}v_a$$

而

$$v_D=\frac{1}{2}v_e=\frac{\sqrt{3}}{4}v_a$$



题七解答图

由速度投影定理，有

$$v_E\cos 30°=v_D$$

得

$$v_E=\frac{1}{2}v_a$$

虚速度法方程为

$$F_1\cdot v_a-F_2\cdot v_E=0$$

解得

$$\underline{F_2=2F_1}$$

八、解：系统的动能为

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}m_1r^2\cdot\omega_A^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\omega_B^2+\frac{1}{2}m_2v_C^2\\&=m_1v_A^2+\frac{1}{2}m_2v_C^2\\&=m_1\dot{x}_A^2+\frac{1}{2}m_2\dot{y}_C^2\end{aligned}$$

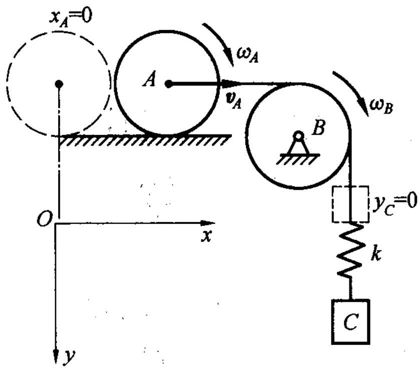
系统为保守系统，其势能为

$$V=\frac{k}{2}(x_A^2-y_C^2)$$

则拉格朗日函数为

$$L=T-V=m_1\dot{x}_A^2+\frac{1}{2}m_2\dot{y}_C^2-\frac{k}{2}(x_A^2-y_C^2)$$

代入拉格朗日方程



题八解答图

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_C}\right)-\frac{\partial L}{\partial y_C}=0$$

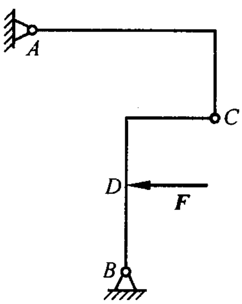
得 $$2m_1\ddot{x}_A+k(x_A-y_C)=0,\quad m_2\ddot{y}_C-k(x_A-y_C)=0$$

哈尔滨工业大学 2016 年(春)期末
理　论　力　学　试　题

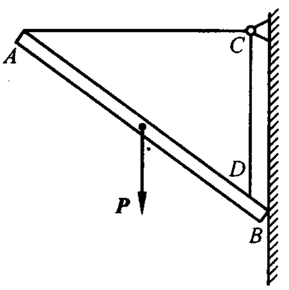
一、画图题(共 20 分)

1. 不计图示结构自重,在 D 处作用一水平力 $\boldsymbol{F}$,在图中画出支座 A,B 处约束力的作用线和方向,不得用正交分力或其他分力表示。(4 分)

2. 图示均质杆 AB 重为 P,B 端靠在光滑铅直墙上,在 A 端用水平绳 AC 连接于 C 点,在 D 点用铅直绳 DC 连接于 C 点。不计绳重,在图中画出 AB 杆的受力图,并问 B 处的约束力与 AC 绳的拉力的比值为多少,即 F_{NB}/F_{AC} 等于多少?(3 分)

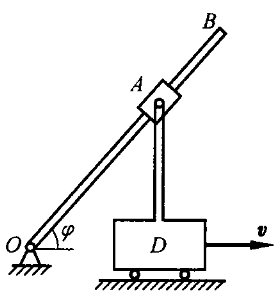


题 1 图

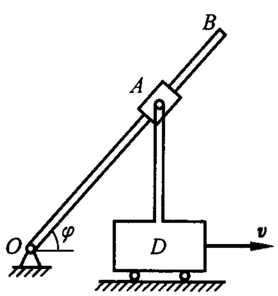


题 2 图

3. 图示平面机构中,刚体 AD 以匀速 $\boldsymbol{v}$ 在水平面上向右运动,通过套筒 A 带动 OB 杆转动。选套筒 A 为动点,动系建于 OB 杆上,在图(a)中画出其速度(合成)图,在图(b)中画出其加速度(合成)图。(7 分)



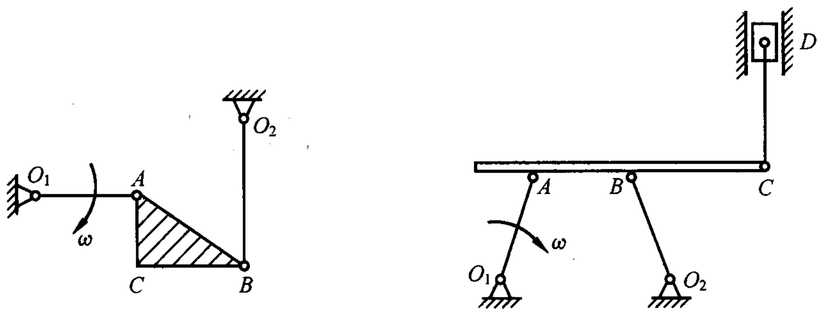
(a)



(b)

题 3 图

4. 图示两种平面机构中,已知条件如图所示,在图中画出做平面运动的刚体的速度瞬心,并标出其角速度的转向。(6 分)

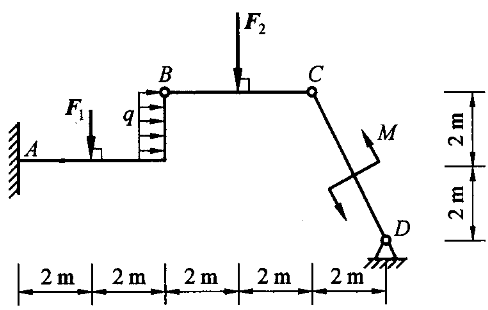


(a)　　(b)

题 4 图

二、计算题(20 分)

图示为一平面结构，由直角弯杆 AB 与直杆 BC，CD 组成，不计各构件自重，尺寸如图所示，铅直力 $F_1=10$ kN，$F_2=20$ kN，分布荷载 $q=2$ kN/m，力偶矩 $M=40$ kN · m。求支座 A 处的约束力。

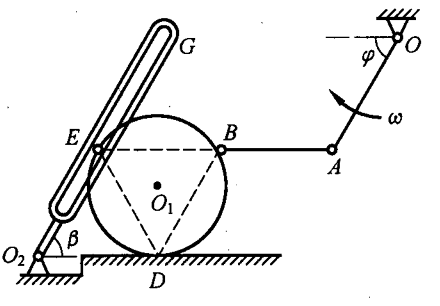


题二图

三、计算题(20 分)

图示平面机构，主动件 OA 杆以匀角速度 ω 绕轴 O 转动，杆长 $OA=AB=r$，半径为 R 的圆轮沿水平面纯滚动，并通过轮上的销子 E 带动 O_2G 杆运动。图示瞬时，$\varphi=\beta=60°$，$DB=BE=DE=\sqrt{3}R$，为一圆内接正三角形，A，B，E 三点位于同一水平线上。

求：图示瞬时，AB 杆、轮与 O_2G 杆的角速度；圆轮的角加速度。



题三图

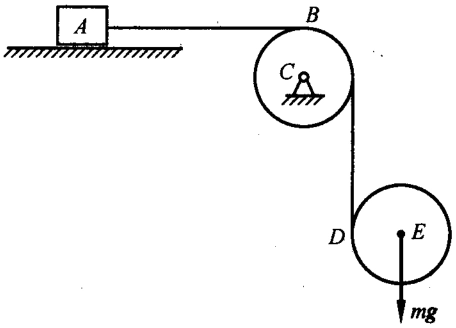
四、计算题(20 分)

图示物块 A 的质量为 m，两均质圆盘质量也为 m，半径为 r，由无重绳连接如图，系统初始静止，物块 A 与水平面为光滑接触。求物块 A 滑动一段距离 s 时，物块 A 的加速度与两

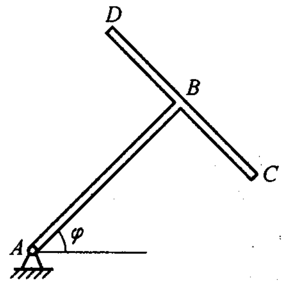
轮的角加速度，两段绳中的拉力。

五、计算题(10 分)

图示两相同均质杆 AB 与 CD，质量均为 m，长度均为 R，以直角形式焊接为一体，在图示 $\varphi=45^\circ$ 角静止释放。用动静法求此瞬时杆的角加速度与轴 A 处的约束力。(用其他方法做不给分)



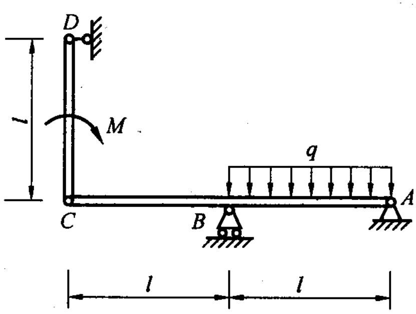
题四图



题五图

六、计算题(10 分)

不计图示平面机构各构件自重，$l=2$ m，力偶矩 $M=10$ kN·m，均布载荷 $q=20$ kN/m。用虚位移原理求 B，D 处的约束力。(用其他方法做不给分)

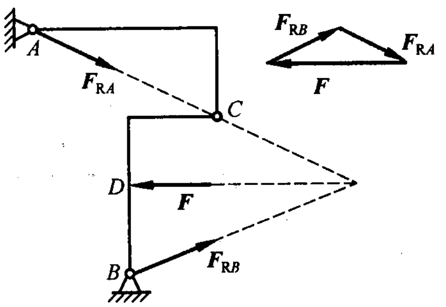


题 3 图

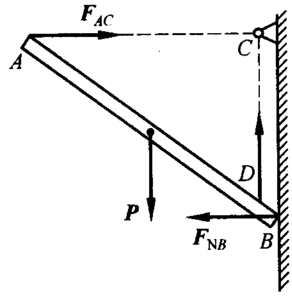
哈尔滨工业大学 2016 年(春)期末理论力学试题解答

一、1、**解**：杆 AC 为二力杆，A 处约束力 $\boldsymbol{F}_{RA}$ 与力 $\boldsymbol{F}$ 交于一点，如图所示，由三力平衡汇交定理，B 处约束力 $\boldsymbol{F}_{RB}$ 也交于此点。物体 BCD 在三个力作用下平衡，画封闭力三角形如图所示，可确定出 A，B 处的作用力与方向如图所示。

2. **解**：取 AB 杆，画出其受力图如图所示，可看出或列方程求出 CD 绳受力为 P，杆 AB 在力偶系作用下平衡，所以$\dfrac{F_{NB}}{F_{AC}}=1$。

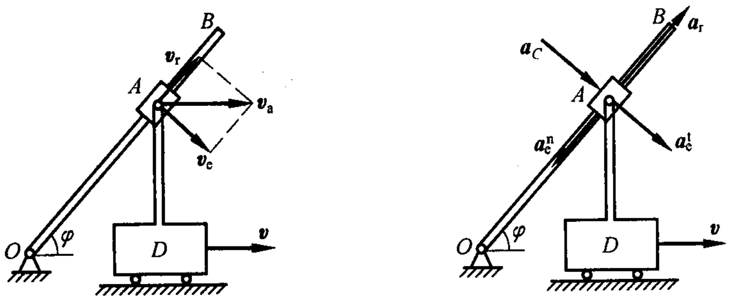


题1解答图



题2解答图

3. **解**:速度图如图(a)所示,加速度图如图(b)所示,其中,因刚体 AD 为匀速平移,故没有加速度,也即绝对加速度为零。

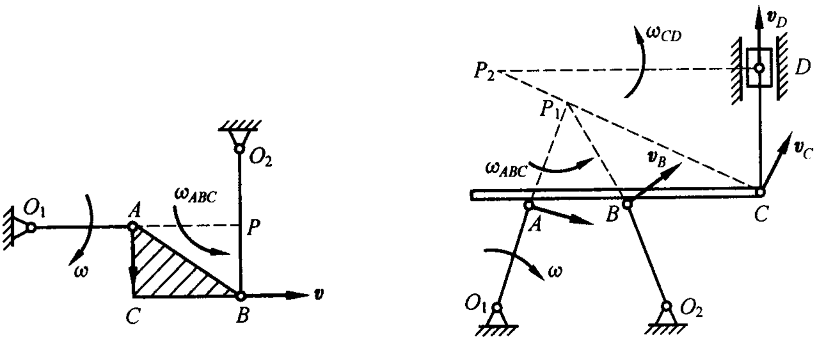


(a)　　(b)

题3解答图

4. **解**:图(a)中,三角板 ABC 做平面运动,杆 O_1A 与 O_2B 为定轴转动,由点 A 与点 B 的速度方向可确定出三角板 ABC 的速度瞬心如图(a)所示,其角速度方向也如图所示。

图(b)中,杆 ABC 与 CD 做平面运动,杆 O_1A 与 O_2B 为定轴转动,由点 A 与点 B 的速度分析可确定出杆 ABC 的速度瞬心为 P_1,其角速度方向如图(b)所示。然后由点 C 与点 D 的速度分析可确定出杆 CD 的速度瞬心为 P_2,其角速度方向如图(b)所示。



(a)　　(b)

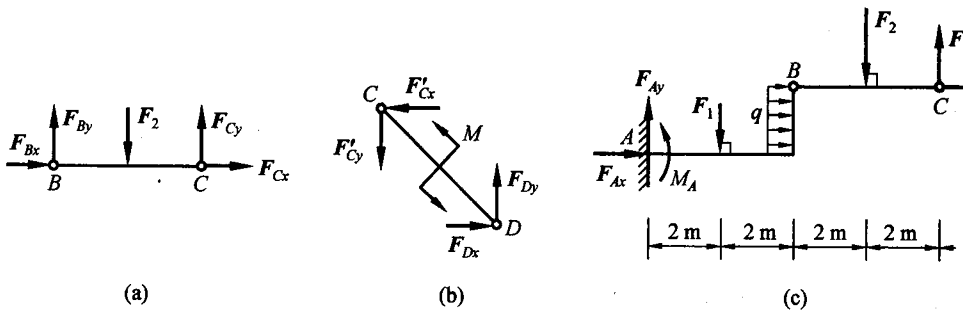
题4解答图

二、**解**:先取 BC 杆,其受力图如图(a)所示,可看出 $F_{Cy}=\frac{F_2}{2}=10\ \text{kN}$,或者由方程

$$\sum M_B=0,\quad F_{Cy}\cdot 4-F_2\cdot 2=0$$

求得 $F_{Cy}=10\ \mathrm{kN}$。

然后取 CD 杆，其受力图如图(b)所示。



题二解答图

由 $$\sum M_D=0,\quad -F'_{Cy}\cdot 2-F'_{Cx}\cdot 4-M=0$$

求得 $$F'_{Cx}=-15\ \mathrm{kN}$$

最后取 ABC 为一体，其受力图如图(c)所示，由

$$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}+2q+F_{Cx}=0$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{Ay}-F_1-F_2+F_{Cy}=0$$

$$\sum M_A=0,\quad M_A-F_1\cdot 2-2q\cdot 1-F_2\cdot 6+F_{Cy}\cdot 8-F_{Cx}\cdot 2=0$$

分别解得　$F_{Ax}=11\ \mathrm{kN}$，　$F_{Ay}=20\ \mathrm{kN}$，　$M_A=34\ \mathrm{kN\cdot m}$

三、解：OA 杆为定轴转动，$v_A=OA\cdot\omega=r\omega$，点 D 为轮的速度瞬心，可得 B 点速度如图(a)所示，则 AB 杆为瞬时平移，$v_B=v_A=r\omega$，所以 AB 杆的角速度为

$$\omega_{AB}=0$$

轮的角速度为 $$\omega_{O_1}=\frac{v_B}{DB}=\frac{r\omega}{\sqrt{3}R}$$

转向为逆时针。轮上销子 E 的速度为 $v_E=DE\cdot\omega_{O_1}=r\omega$，即与 v_B 大小相等。

把动系建于 O_2G 杆上，选轮上销子 E 为动点，则速度分析图如图(a)所示，由

$$\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$$

式中 $\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_E$，有 $$v_e=v_a\sin 30°=\frac{1}{2}r\omega$$

则 O_2G 杆的角速度为 $$\omega_{O_2G}=\frac{v_e}{O_2E}=\frac{r\omega}{2\sqrt{3}R}$$

转向为逆时针。

为求加速度，选点 A 为基点，求点 B 的加速度，有

$$\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_A^n+\boldsymbol{a}_{BA}^n+\boldsymbol{a}_{BA}^t \tag{1}$$

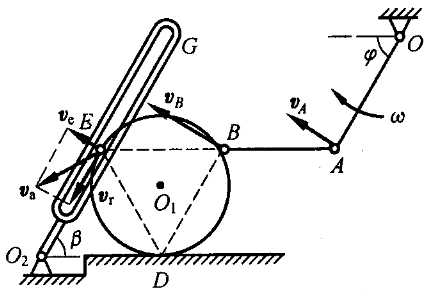
如图(b)所示，式中

$$a_A^n=OA\cdot\omega^2=r\omega^2$$

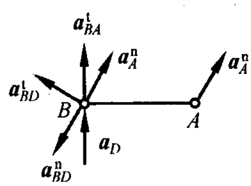
$$a_{BA}^n=AB\cdot\omega_{AB}^2=0$$

再选速度瞬心点 D 为基点，求点 B 的加速度，如图(b)所示，有

$$\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_D+\boldsymbol{a}_{BD}^n+\boldsymbol{a}_{BD}^t \tag{2}$$



(a)



(b)

题三解答图

式中 $$a_D=R\cdot\omega_{O_1}^2=\frac{r^2\omega^2}{3R},\ a_{BD}^n=DB\cdot\omega_{O_1}^2=\frac{r^2\omega^2}{\sqrt{3}R}$$

由式(1)与式(2)，有

$$\boldsymbol{a}_A^n+\boldsymbol{a}_{BA}^t=\boldsymbol{a}_D+\boldsymbol{a}_{BD}^n+\boldsymbol{a}_{BD}^t \tag{3}$$

把式(3)沿 BA 方向投影，有

$$a_A^n\cos 60°=-a_{BD}^n\cos 60°-a_{BD}^t\cos 30°$$

解得 $$a_{BD}^t=-\frac{r+\sqrt{3}R}{3R}r\omega^2$$

得圆轮的角加速度为 $$\alpha_{O_1}=\frac{a_{BD}^t}{DB}=-\frac{r+\sqrt{3}R}{3\sqrt{3}R^2}r\omega^2$$

转向为顺时针。

四、解：先考虑运动学关系，运动学关系为

$$v_A=r\omega_C$$
$$v_E=r\omega_C+r\omega_E=r(\omega_C+\omega_E)$$

如图(a)所示。

用动能定理，有

$$T_1=0$$

$$\begin{aligned}T_2&=\frac{1}{2}mv_A^2+\frac{1}{2}J_C\omega_C^2+\frac{1}{2}mv_E^2+\frac{1}{2}J_E\omega_E^2\\&=\frac{1}{2}mr^2\omega_C^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\cdot\omega_C^2+\frac{1}{2}mr^2(\omega_C+\omega_E)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\cdot\omega_E^2\\&=\frac{5}{4}mr^2\omega_C^2+\frac{3}{4}mr^2\omega_E^2+mr^2\omega_C\omega_E\end{aligned}$$

所有力做的功为 $$W=mgr(\varphi+\theta)$$

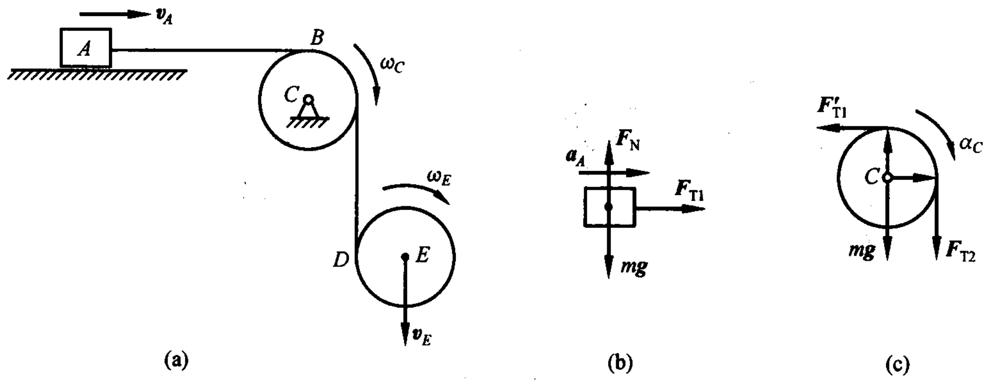
由动能定理，$T_2-T_1=W$，有

$$\frac{5}{4}mr^2\omega_C^2+\frac{3}{4}mr^2\omega_E^2+mr^2\omega_C\omega_E-0=mgr(\varphi+\theta)$$

把此式对时间求一阶导数，有

$$\frac{5}{2}mr^2\omega_C\alpha_C+\frac{3}{2}mr^2\omega_E\alpha_E+mr^2(\alpha_C\omega_E+\omega_C\alpha_E)=mgr(\dot{\varphi}+\dot{\theta}) \tag{1}$$

而 $\dot{\varphi}=\omega_C$，$\dot{\theta}=\omega_E$，代入式(1)并整理得



题四解答图

$$\left(\frac{5}{2}r\alpha_C+r\alpha_E-g\right)\omega_C+\left(\frac{3}{2}r\alpha_E+r\alpha_C-g\right)\omega_E=0 \tag{2}$$

因轮的角速度 $\omega_C\neq0$，$\omega_E\neq0$，由式(2)，必然有

$$\frac{5}{2}r\alpha_C+r\alpha_E-g=0 \tag{3}$$

$$\frac{3}{2}r\alpha_E+r\alpha_C-g=0 \tag{4}$$

联立求解式(3)与式(4)，得两轮的角加速度为

$$\alpha_C=\frac{2}{11}\frac{g}{r},\quad \alpha_E=\frac{6}{11}\frac{g}{r}$$

物块 A 的加速度为
$$a_A=r\alpha_C=\frac{2}{11}g$$

取物块 A，如图(b)所示，有

$$ma_A=F_{T1}$$

得 AB 段绳的拉力为
$$F_{T1}=\frac{2}{11}mg$$

取轮 C，如图(c)所示，由刚体绕定轴转动微分方程 $J_C\alpha_C=\sum M_C$，有

$$\frac{1}{2}mr^2\alpha_C=F_{T2}\cdot r-F'_{T1}\cdot r$$

即
$$F_{T2}=\frac{1}{2}mr^2\alpha_C+F'_{T1}$$

得铅直段绳的拉力为

$$F_{T2}=\frac{3}{11}mg$$

五、解：T 形杆对轴 A 的转动惯量为

$$J_A=\frac{1}{3}mR^2+\frac{1}{12}mR^2+mR^2=\frac{17}{12}mR^2$$

其质心位于距轴 A 为 $\frac{3}{4}R$ 处，质心只有切向加速度，为

$$a_t=\frac{3}{4}R\alpha$$

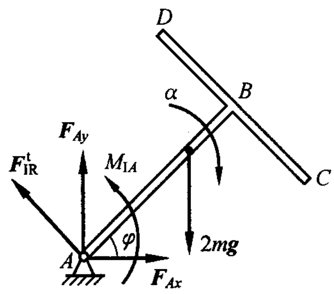
则其切向惯性力大小为

$$F_{IR}^{t}=2ma_t=\frac{3}{2}mR\alpha$$

方向如图所示。惯性力主矩大小为

$$M_{IA}=J_A\alpha=\frac{17}{12}mR^2\alpha$$

转向如图所示。由



题五解答图

$$\sum M_A=0,\quad M_{IA}-2mg\cdot\frac{3}{4}R\cos 45^\circ=0$$

即
$$\frac{17}{12}mR^2\alpha-\frac{3\sqrt{2}}{4}mgR=0$$

解得杆的角加速度为
$$\alpha=\frac{9\sqrt{2}}{17}\frac{g}{R}$$

由
$$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}-F_{IR}^{t}\cos 45^\circ=0$$
$$\sum F_y=0,\quad F_{Ay}+F_{IR}^{t}\sin 45^\circ-2mg=0$$

分别解得轴承 A 处的约束力为

$$F_{Ax}=\frac{27}{34}mg,\quad F_{Ay}=\frac{41}{34}mg$$

六、解:求 D 处的约束力。

解除 D 处约束,以 F_{RD} 表示其约束力,变结构为机构。设给 CD 杆一角速度 ω,则 D 处的速度为 $v_D=l\omega$,如图(a)所示,虚速度法方程为

$$M\omega-F_{RD}\cdot v_D=0$$

即
$$M\omega-F_{RD}\cdot l\omega=0$$

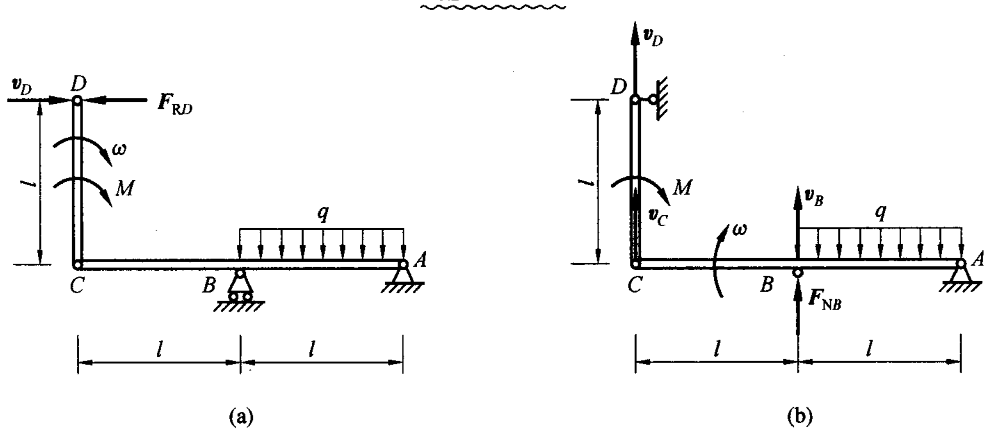
解得
$$F_{RD}=5\ \text{kN}$$

求 B 处的约束力。

解除 B 处约束,以 F_{NB} 表示其约束力,变结构为机构。设给 CA 杆一角速度 ω,则 B 处的速度为 $v_B=l\omega$,如图(b)所示,分布载荷中点的速度为 $\frac{l}{2}\omega$,虚速度法方程为

$$F_{NB}\cdot l\omega-ql\cdot\frac{1}{2}l\omega=0$$

解得
$$F_{NB}=20\ \text{kN}$$



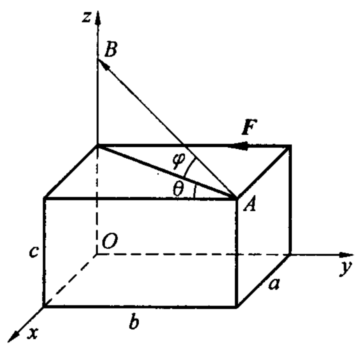
题六解答图

哈尔滨工业大学2016年(秋)期末
理　论　力　学　试　题

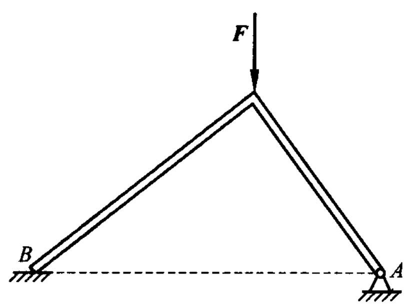
一、简答题(共10分)

1. 已知力 $\boldsymbol{F}$ 及长方体的边长为 a,b,c，如图所示 AB 轴与长方体顶面的夹角为 φ，且由 A 指向 B，求力 $\boldsymbol{F}$ 对 AB 轴的矩。(5分)

2. 图中 $\boldsymbol{F}$ 及各部分尺寸为已知，B 处存在摩擦，分别回答下述问题：(1)能否确定 B 处的法向约束力？(2)能否确定 B 处的摩擦力？(3)问题是静定的，还是超静定的？(5分)



题1图



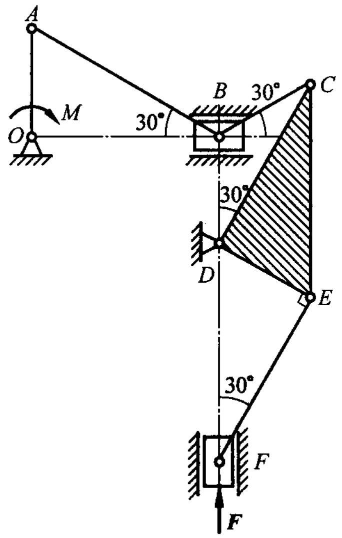
题2图

二、计算题(30分)

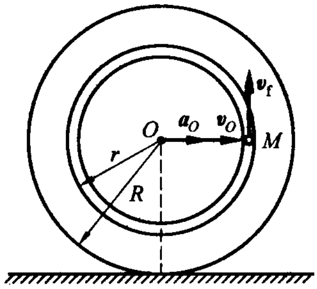
图示机构中，OB 线水平，当 B,D,F 在同一铅直线上时，DE 垂直于 EF，曲柄 OA 正好在铅直位置。已知 $OA=100$ mm，$BD=BC=DE=100$ mm，$EF=100\sqrt{3}$ mm。不计杆重和摩擦，分别利用静力学平衡方程和虚位移原理求解图示位置平衡时力偶 M 和力 F 的关系。(静力学平衡方程方法15分，虚位移原理方法15分)

三、计算题(15分)

半径为 R 的圆盘在铅垂面内沿地面作纯滚动，圆心 O 的速度为 $\boldsymbol{v}_O$，加速度为 $\boldsymbol{a}_O$。小球在圆盘上半径为 r 的圆槽内作匀速圆周运动，相对速度为 $\boldsymbol{v}_r$。求在图示位置(OM 水平)时，M 点的绝对速度和绝对加速度。



题二图



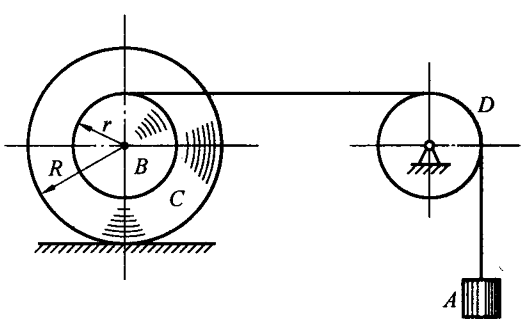
题三图

四、计算题(15 分)

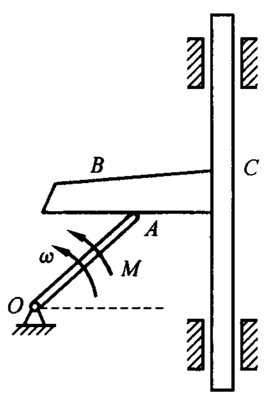
质量为 m 的重物 A，挂在一细绳的一端，绳的另一端通过定滑轮 D 绕在鼓轮 B 上，如图所示。由于重物 A 下降，带动 C 轮沿水平轨道作纯滚动。鼓轮 B 与圆轮 C 半径分别为 r 与 R，两者固连在一起，其总质量为 m_1，对于水平轴 B 之回转半径为 ρ。不计滑轮 D 及绳子的质量和轴承的摩擦。求重物 A 的加速度、轴承 D 的约束力、静滑动摩擦力的大小与方向。

五、计算题(15 分)

图示曲柄 OA 质量为 m_1，长为 r，以等角速度 ω 绕水平的轴 O 反时针方向转动。曲柄的 A 端推动水平板 BC，使质量为 m_2 的板 BC 沿铅直方向运动。忽略摩擦，利用达朗贝尔原理求当曲柄与水平方向夹角 30°时的力偶矩 M 与轴承 O 处的约束力。(利用其他方法不给分)



题四图

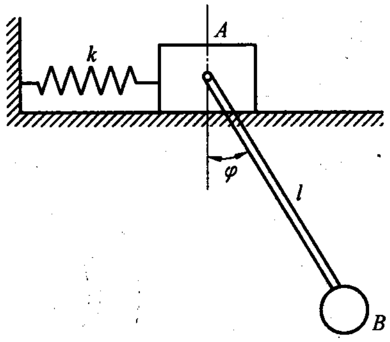


题五图

六、计算题(15 分)

设有一个与弹簧相连的滑块 A，其质量为 m_1，它可沿光滑水平面无摩擦地来回滑动，弹簧的刚性系数为 k。在滑块 A 上又连一单摆，如图所示。摆长为 l，不计自重，摆球 B 的质

量为 m_2，单摆作微幅摆动。利用第二类拉格朗日方程列出该系统的运动微分方程。（提示：以物体 A,B 离开静平衡位置的 x,φ 为广义坐标）（利用其他方法不给分）



题六图

哈尔滨工业大学 2016 年（秋）期末理论力学试题解答

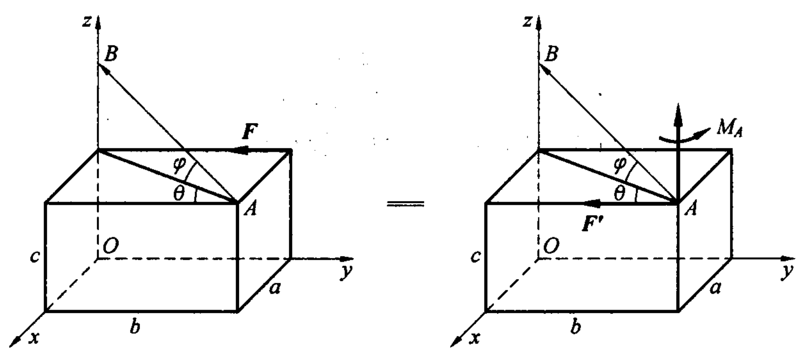
一、1. 解：$M_{AB}(\boldsymbol{F})=Fa\sin\varphi$。

提示：利用力的平移定理，把此力向点 A 平移，如图所示，得力 $\boldsymbol{F}'$ 与力矩 $\boldsymbol{M}_A$，且

$$M_A=Fa$$

然后用空间力对点矩与力对过该点的轴的矩的关系，即，空间力对点矩在过该点的某轴的投影，等于力对该轴的矩，有

$$M_{AB}(\boldsymbol{F})=Fa\sin\varphi$$



题 1 提示图

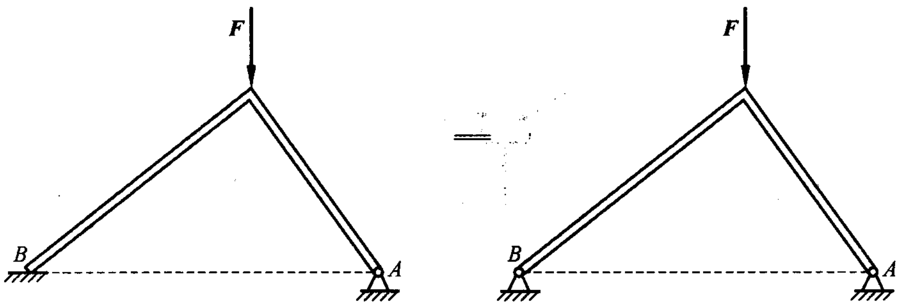
2. **解**：(1)可以确定 B 处的法向约束力；(2)不能确定 B 处的摩擦力；(3)问题是超静定问题。

提示：(1)用对点 A 的力矩方程可以求出 B 处的法向约束力；

(2)因物体具有 4 个未知力，用两个方程可确定 A、B 处的法向约束力，独立平衡方程只有一个了，所以不能确定 B 处的摩擦力；

(3)此题 B 处有摩擦力，相当于铰链约束，如图所示，所以问题是超静定问题。

二、解：先取 OA 杆为研究对象，因杆 AB 为二力杆，按力偶系平衡画出其受力图如图(a)所示，由



题 2 提示图

$$\sum M_i=0 \quad F_{AB}\cos 30^\circ \cdot OA-M=0$$

解得
$$F_{AB}\cos 30^\circ=\frac{M}{100}$$

也可按任意力系由方程$\sum M_O=0$求得此结果。

再取滑块 B 为研究对象，其受力图如图(b)所示，由

$$\sum F_x=0, \quad F_{AB}\cos 30^\circ-F_{BC}\cos 30^\circ=0$$

解得
$$F_{BC}=\frac{M}{100\cos 30^\circ}$$

再取 CDE 构件，其受力图如图(c)所示，由

$$\sum M_D=0, \quad F_{EF}\cdot DE-F_{CB}\sin 30^\circ\cdot CD=0$$

解得
$$F_{EF}=\frac{M}{100}$$

最后取滑块 F，其受力图如图(d)所示，由

$$\sum F_y=0, \quad F-F_{FE}\cos 30^\circ=0$$

解得
$$F=\frac{\sqrt{3}M}{200}$$

用虚位移原理中的虚速度法求解。

给 OA 杆一虚角速度 ω_O，则有 $v_A=100\omega_O$，AB 杆为瞬时平移，有 $v_B=v_A=100\omega_O$，BC 杆的速度瞬心在点 D，此时 BC 杆与构件 DEF 的角速度相同，有

$$\omega_D=\frac{v_B}{BD}=\omega_O$$

点 E 的速度为
$$v_E=DE\cdot\omega_D=100\omega_O$$

对 EF 杆，由速度投影定理，有

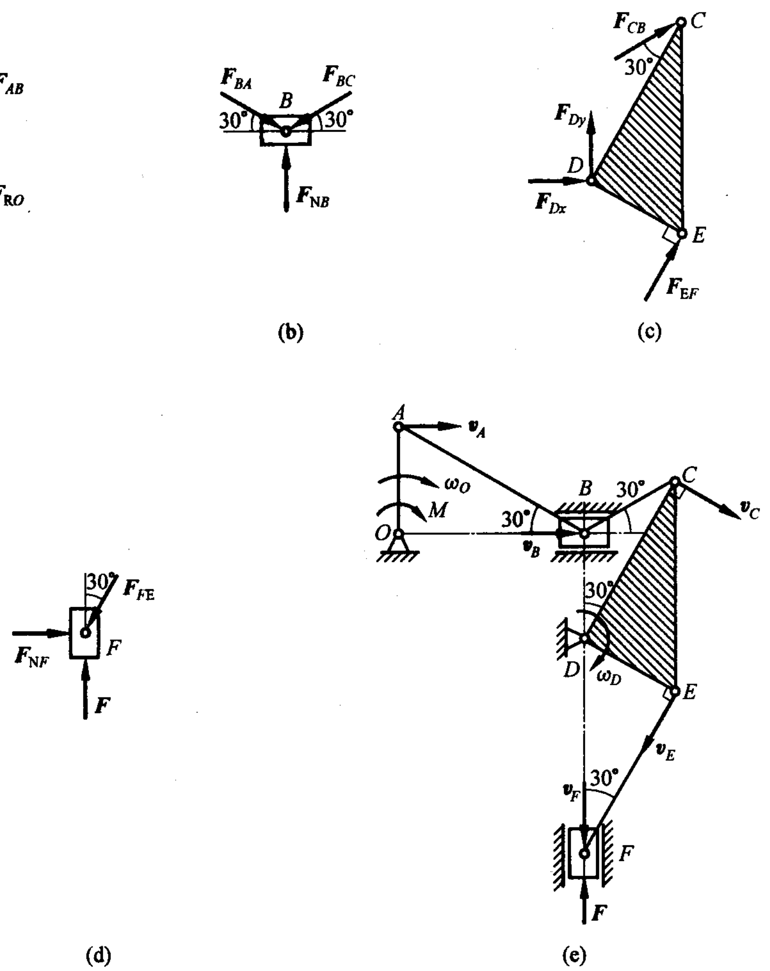
$$v_F\cos 30^\circ=v_E$$

得
$$v_F=\frac{200}{\sqrt{3}}\omega_O$$

虚功方程为
$$M\omega_O-F\cdot v_F=0$$

即
$$M\omega_O-F\cdot\frac{200}{\sqrt{3}}\omega_O=0$$

同样解得
$$F=\frac{\sqrt{3}M}{200}$$



题二解答图

三、解:圆盘的角速度为 $\omega=\dfrac{v_O}{R}$,选点 O 为基点,求与小球重合点的速度,为

$$\boldsymbol{v}_M=\boldsymbol{v}_O+\boldsymbol{v}_{MO}$$

式中

$$v_{MO}=r\omega=\frac{r}{R}\omega_O$$

把动系建于圆盘上,动点选为小球 M,由

$$\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$$

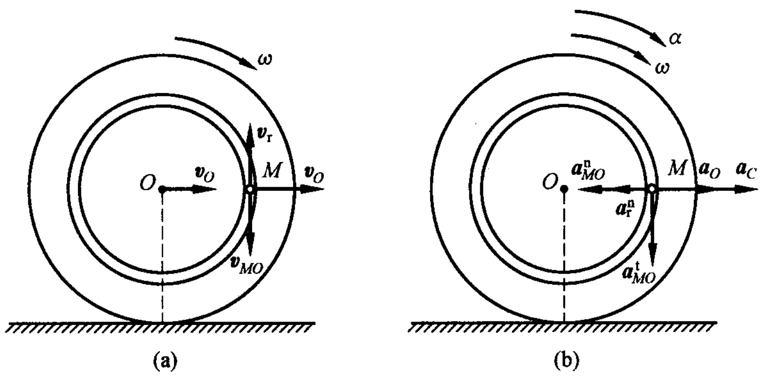
如图(a)所示,式中,$\boldsymbol{v}_e=\boldsymbol{v}_M$。

则点 M 的绝对速度大小为

$$v_a=\sqrt{v_O^2+\left(v_r-\frac{r}{R}\omega_O\right)^2}$$

圆盘的角加速度为 $\alpha=\dfrac{a_O}{R}$,选点 O 为基点,求与小球重合点的加速度,为

$$\boldsymbol{a}_M=\boldsymbol{a}_O+\boldsymbol{a}_{MO}^{t}+\boldsymbol{a}_{MO}^{n}$$



题三解答图

式中 $$a_{MO}^t = r\alpha = \frac{r}{R}a_O,\quad a_{MO}^n = r\omega^2 = \frac{r}{R^2}v_O^2$$

把动系建于圆盘上，动点选为小球 M，由

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C$$

如图(b)所示，式中，$\boldsymbol{a}_e = \boldsymbol{a}_M$，$a_r = a_r^n = \dfrac{v_r^2}{r}$，$a_C = 2\omega v_r = 2\dfrac{v_O}{R}v_r$。

则有 $$\underline{a_{ax} = a_O + \frac{2v_O v_r}{R} - \frac{v_r^2}{r} - \frac{r}{R^2}v_O^2}$$

$$\underline{a_{ay} = -\frac{r}{R}a_O}$$

四、解：设物块 A 的速度为 $\boldsymbol{v}_A$，鼓轮的角速度为 ω，有

$$\omega = \frac{v_A}{R+r},\quad v_C = R\omega = \frac{Rv_A}{R+r}$$

如图(a)所示。

用动能定理，有

$$T_1 = 0$$

$$T_2 = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}m_1v_C^2 + \frac{1}{2}m_1\rho^2\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}v_A^2\left[m + m_1\frac{R^2+\rho^2}{(R+r)^2}\right] \tag{a}$$

所有力做的功为 $$W = mgh$$

由动能定理 $$T_2 - T_1 = W$$

有 $$\frac{1}{2}v_A^2\left[m + m_1\frac{R^2+\rho^2}{(R+r)^2}\right] - 0 = mgh$$

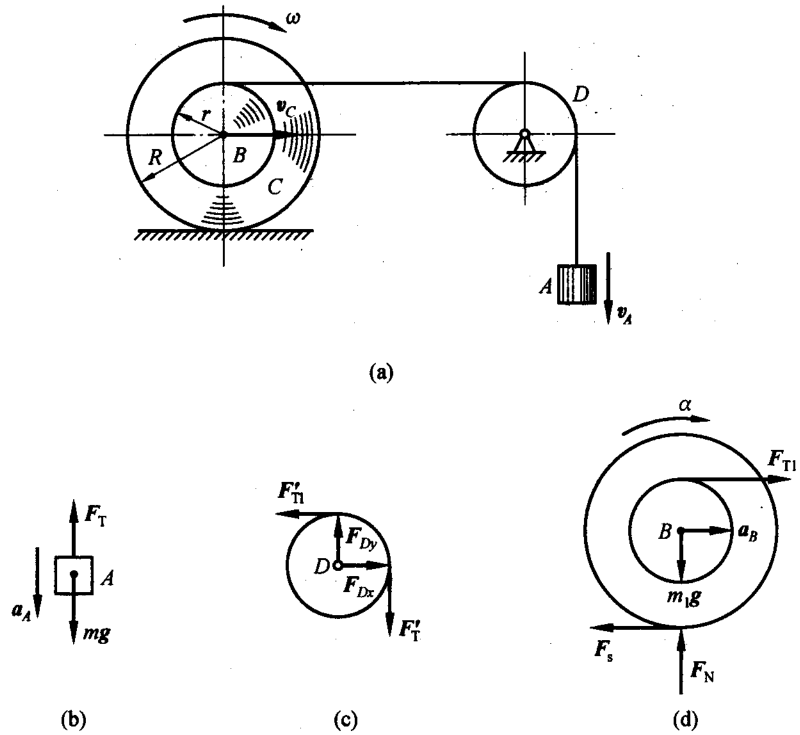
把此式对时间求导数有

$$v_A a_A\left[m + m_1\frac{R^2+\rho^2}{(R+r)^2}\right] - 0 = mgv_A$$

得重物 A 的加速度为

$$\underline{a_A = \frac{mg(R+r)^2}{m(R+r)^2 + m_1(R^2+\rho^2)}}$$

取重物 A，如图(b)所示。



题四解答图

有
$$ma_A = mg - F_T$$

解得
$$F_T = mg - ma_A = \frac{mm_1g(R^2+\rho^2)}{m(R+r)^2 + m_1(R^2+\rho^2)}$$

取轮 D，如图(c)所示，因不计此轮质量，有 $F'_{T1}=F'_T=F_T$。

由质心运动定理或平衡方程，有
$$\sum F_x = 0,\quad F_{Dx} - F'_{T1} = 0$$
$$\sum F_y = 0,\quad F_{Dy} - F'_T = 0$$

分别解得
$$F_{Dx} = \frac{mm_1g(R^2+\rho^2)}{m(R+r)^2 + m_1(R^2+\rho^2)}$$
$$F_{Dy} = \frac{mm_1g(R^2+\rho^2)}{m(R+r)^2 + m_1(R^2+\rho^2)}$$

最后取鼓轮，如图(d)所示，由质心运动定理，有
$$ma_{Cx} = \sum F_x,\quad m_1a_B = F_{T1} - F_s$$

鼓轮的角加速度
$$\alpha = \frac{a_A}{R+r}，则\ a_B = R\alpha = \frac{R}{R+r}a_A$$

把 a_B 与 F_{T1} 代入整理得
$$F_s = \frac{mm_1g(\rho^2 - Rr)}{m(R+r)^2 + m_1(R^2+\rho^2)}$$

讨论，当 $\rho^2 > Rr$ 时，摩擦力向左；当 $\rho^2 < Rr$ 时，摩擦力向右；当 $\rho^2 = Rr$ 时，摩擦力为零。

五、解：把动系建于板 BC 上，动点选为 OA 杆上的点 A，则加速度分析图如图(a)所示，

有

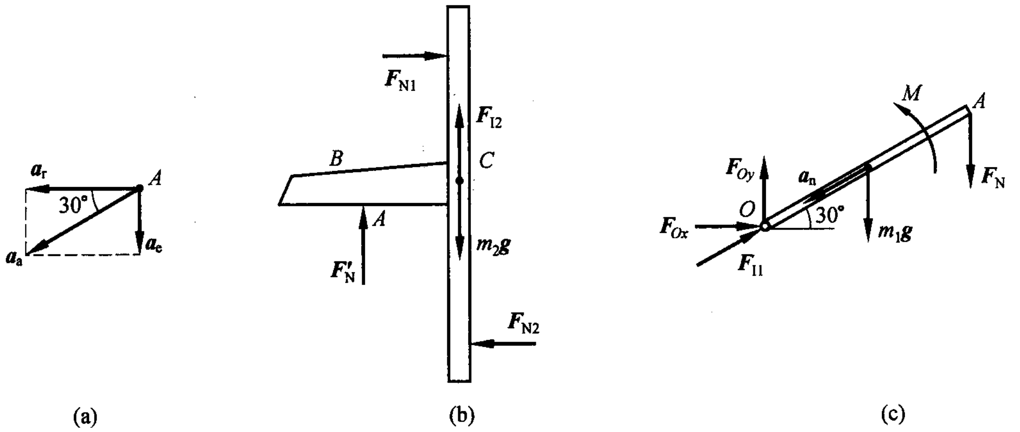
$$\boldsymbol{a}_a=\boldsymbol{a}_e+\boldsymbol{a}_r$$

式中

$$a_a=a_a^n=r\omega^2$$

则

$$a_e=a_a\sin 30°=\frac{1}{2}r\omega^2$$



题五解答图

取板 BC，受力图并加惯性力如图(b)所示，式中

$$F_{I2}=m_2a_e=\frac{1}{2}m_2r\omega^2$$

由

$$\sum F_y=0,\quad F'_N+F_{I2}-m_2g=0$$

解得

$$F'_N=m_2g-F_{I2}=m_2g-\frac{1}{2}m_2r\omega^2$$

最后取 OA 杆，受力图并加惯性力如图(c)所示，式中

$$F_{I1}=m_1a_n=\frac{1}{2}m_1r\omega^2$$

由

$$\sum M_O=0,\quad M-F'_N\cdot r\cos 30°-m_1g\cdot\frac{r}{2}\cos 30°=0$$

解得

$$M=\frac{\sqrt{3}}{4}m_1gr+\frac{\sqrt{3}}{2}m_2gr-\frac{\sqrt{3}}{4}m_2r^2\omega^2$$

$$\sum F_x=0,\quad F_{Ox}+F_{I1}\cos 30°=0$$

解得

$$F_{Ox}=-\frac{\sqrt{3}}{4}m_1r\omega^2$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{Oy}-F_N-m_1g+F_{I1}\sin 30°=0$$

解得

$$F_{Oy}=(m_1+m_2)g-\frac{1}{4}(m_1+2m_2)r\omega^2$$

六、解：如题六图所示，写出点 B 的坐标为(坐标原点与坐标轴应自己画出)

$$x_B=x+l\sin\varphi,\quad y_B=-l\cos\varphi$$

对时间求一阶导数，有

$$\dot{x}_B=\dot{x}+l\dot{\varphi}\cos\varphi,\quad \dot{y}_B=l\dot{\varphi}\sin\varphi$$

系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2(\dot{x}_B+\dot{y}_B)^2$$
$$=\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2(\dot{x}^2+2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi+l^2\dot{\varphi}^2)$$

势能为
$$V=\frac{1}{2}kx^2-m_2gl\cos\varphi$$

拉格朗日函数为
$$L=T-V=\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2(\dot{x}^2+2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi+l^2\dot{\varphi}^2)-\frac{1}{2}kx^2+m_2gl\cos\varphi$$

由
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0$$

解得系统的运动微分方程为
$$(m_1+m_2)\ddot{x}+m_2l(\ddot{\varphi}\cos\varphi+\dot{\varphi}^2\sin\varphi)+kx=0$$
$$l\ddot{\varphi}+\ddot{x}\cos\varphi-g\sin\varphi=0$$

第四部分

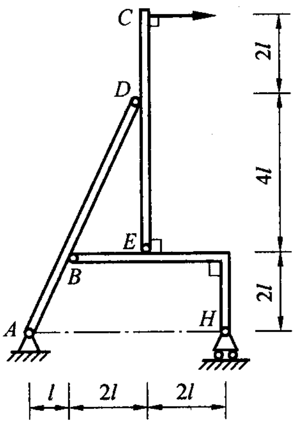
哈尔滨工业大学理论力学

平时小测题与解答

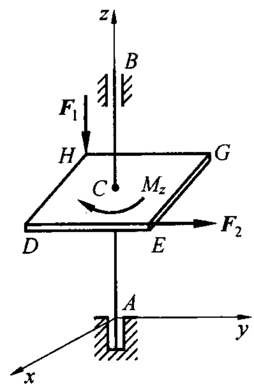
哈尔滨工业大学理论力学平时小测题

1. 图示平面结构由不计自重的 AD,BH 和 EC 杆组成，水平力 $F=50$ kN，尺寸 $l=1$ m。求铰链 B 处的约束力。(用最少的方程数求出 B 处的约束力更好)

2. 图示均质正方形薄板边长为 $a=1$ m，自重为 $P=5$ kN，此板和铅直轴 AB 焊接在一起，板面与 z 轴垂直，z 轴通过板的重心 C，铅直力 $F_1=10$ kN，沿 y 轴方向作用的水平力 $F_2=8$ kN，尺寸 $AC=CB=1$ m。求使系统平衡的绕 z 轴的力偶矩 M_z 与轴承 A,B 处的约束力。



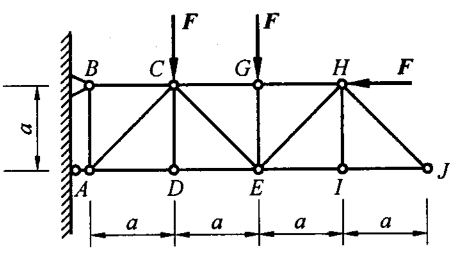
题 1 图



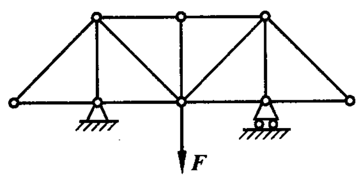
题 2 图

3. 图示平面桁架受到大小均为 F 的三个力作用，尺寸 a 为已知。不用计算，判断出哪些杆不受力(零杆)，并求 HG 杆与 EG 杆受力(用简便方法)。

4. 不用计算，直接判断出图示桁架中的零杆(受力为零的杆件)。在零杆上画○即可。



题 3 图



题 4 图

5. (1)一空间力系，其各力作用线均与某一固定直线平行，其独立的平衡方程最多只有(　　)个；

(2)一空间力系，其各力作用线均与某一固定直线垂直，其独立的平衡方程最多只有(　　)个；

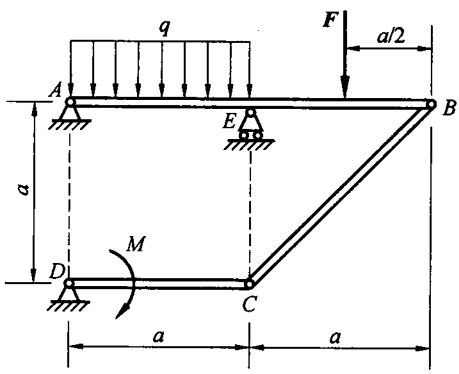
(3)一空间力系，其各力作用线均与某一固定直线相交，其独立的平衡方程最多只有(　　)个；

(4)一空间力系，其各力作用线均与某一固定平面平行，其独立的平衡方程最多只有(　　)个；

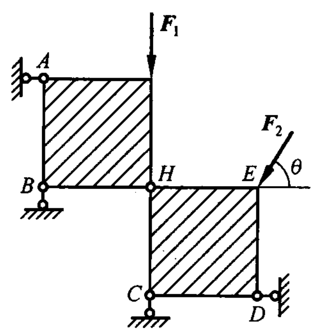
(5)一空间力系，其各力作用线均与两个固定平行平面平行，其独立的平衡方程最多只有(　　)个。

6. 不计图示平面结构各构件自重，均布载荷 $q=16$ kN/m，铅直集中载荷 $F=40$ kN，力偶矩 $M=20$ kN·m，尺寸 $a=1$ m。求支座 A 处的约束力。(用几个方程求出均可，但用最少的方程数求出更好。)

7. 图示平面结构由两个边长均为 $l=1$ 的正方形板构成，不计板的自重，铅直力 $F_1=3$ kN，$F_2=5$ kN，$\theta=60°$。求 A,B,C,D 处的约束力。



题 6 图



题 7 图

8. 直杆 AB 固定不动，半径 $R=1$ m 的大圆环绕轴 A 定轴转动，在图示瞬时，其角速度为 $\omega=1$ rad/s，角加速度为 $\alpha=1$ rad/s^2，转向如图所示。在大圆环与直杆上套一小圆环 M，由大圆环带动小圆环运动。在图示瞬时，大圆环直径和直杆 AB 重合。求小圆环的绝对速度和绝对加速度。

9. 图示直杆 AB 绕轴 A 以匀角速度 ω 定轴转动，直杆 CD 以匀速 v 向右平移。在两直杆上套一小圆环 E，图示瞬时，$AE=l$，$AE\perp CD$。

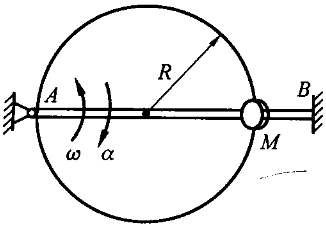
求：(1)小圆环 E 的绝对速度大小；

(2)动系建于 AB 杆上，选小圆环 E 为动点，小圆环 E 的牵连加速度大小；

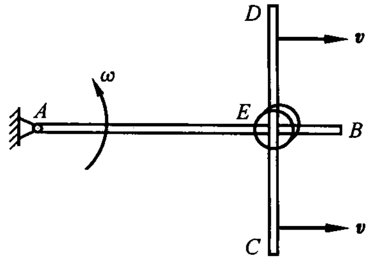
(3)动系建于 AB 杆上，选小圆环 E 为动点，小圆环 E 的科氏加速度大小；

(4)动系建于 AB 杆上，选小圆环 E 为动点，小圆环 E 的相对加速度大小；

(5)小圆环 E 的绝对加速度大小。



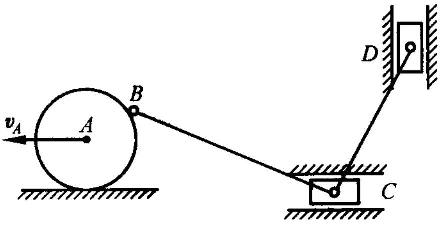
题 8 图



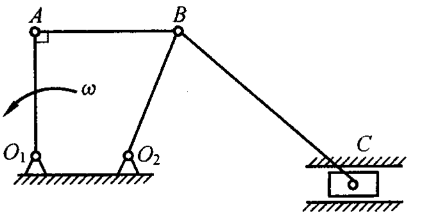
题 9 图

10. 图示平面机构，已知条件如图，轮做纯滚动，在图中画出做平面运动的零件的速度瞬心，并表示出其角速度的转向。

11. 图示平面机构，已知条件如图，在图中画出做平面运动的零件的速度瞬心，并表示出其角速度的转向。



题 10 图



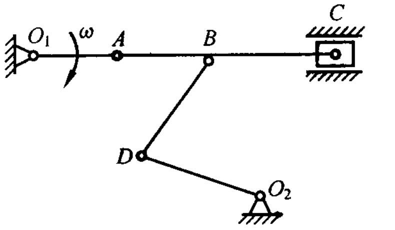
题 11 图

12. 图示平面机构，已知条件如图，在图中画出做平面运动的零件的速度瞬心，并表示出其角速度的转向。

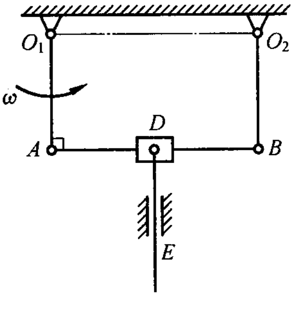
13. 图示机构中，杆 O_1A 始终平行于杆 O_2B，且长度相等，均为 l。O_1A 杆以匀角速度 ω 转动。图示瞬时，$AD=DB=l$。

(1)求套筒 D(杆 DE)的绝对速度；

(2)把动系建于 O_1A 杆上，动点选为套筒 D，求其牵连速度、相对速度、牵连加速度(包括大小和方向)。



题 12 图



题 13 图

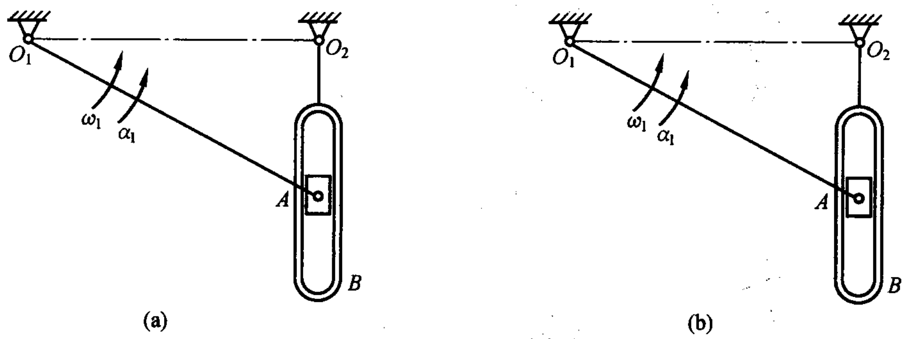
14. 图示为一平面机构，O_1A 杆的角速度 ω_1、角加速度 α_1 为已知。选择合适的动点和动系，在图(a)中画出速度(分析)图，在图(b)中画出加速度(分析)图。

15. 对图示机构，选择动点与动系，在图(a)中画出速度(分析)图，在图(b)中画出加速度(分析)图。

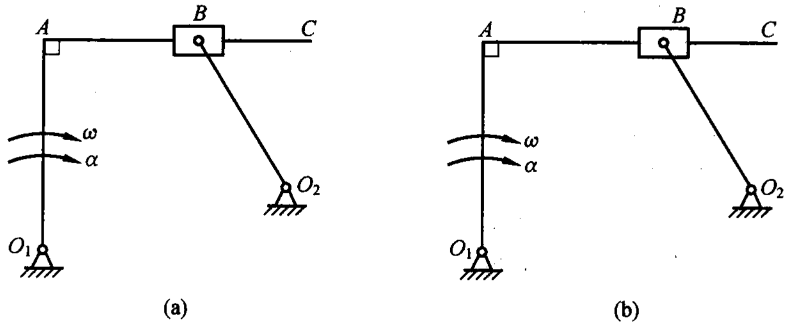
16. 图示为一三拱桥示意图，若桥墩 C 受自然灾害，如洪水突然被冲走，把各构件看作为刚体，在图中画出各构件此瞬时的运动情况，即定轴转动的角速度方向，平面运动的速度瞬心、角速度方向，各点的速度方向。

17. 图示为一平面机构，已知主动件 O_1A 的角速度 ω_1 为匀速。在图(a)中画出速度(分析)图，在图(b)中画出加速度(分析)图，并准确标出 AB 杆与 O_2E 杆的角速度方向。

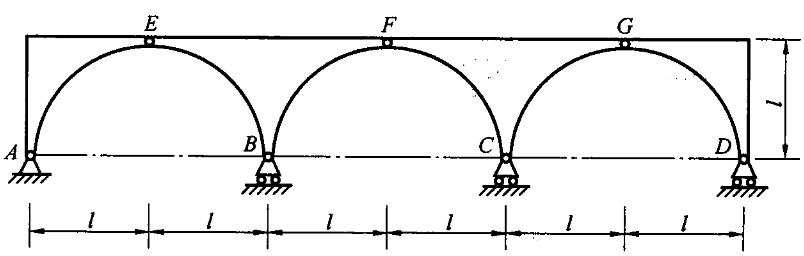
18. 图示平面机构中，OA 杆长为 l，其角速度为 ω，BC 杆的角速度为 2ω。套筒 A 套在 BC 杆上，可自由滑动，且不忽略其大小，作为一刚体。在图上画出套筒 A 和 BC 杆的速度瞬心。



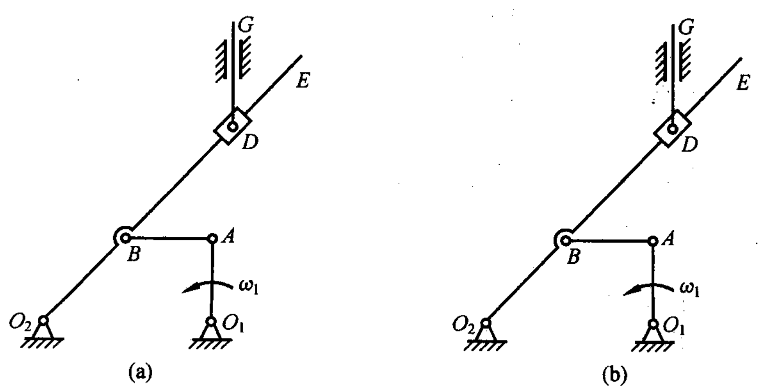
题 14 图



题 15 图

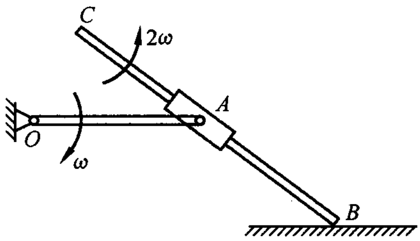


题 16 图

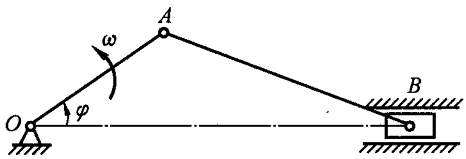


题 17 图

19. 图示曲柄连杆滑块机构，曲柄 OA 为均质杆，长度为 R，质量为 m_1，以匀角速度 ω 绕轴 O 转动。连杆 AB 为均质杆，长度为 l，质量为 m_2。滑块 B 质量为 m_3。求 $\varphi=0°$ 和 $\varphi=90°$ 时，系统的动量和动能。



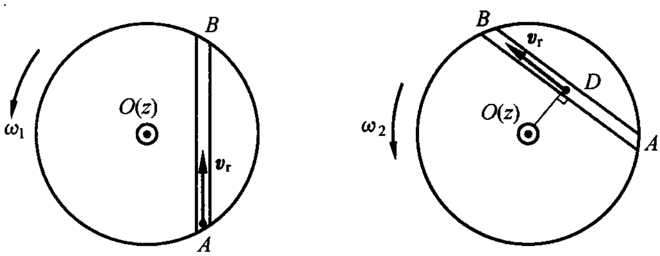
题 18 图



题 19 图

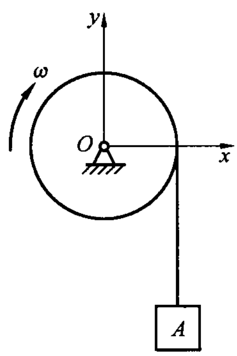
20. 质量为 m 半径为 R 的圆盘绕铅直轴转动，在距圆盘中心为 $R/2$ 处开有一直槽 AB，一质量为 $m/4$ 的小球沿直槽相对圆盘以匀速 v_r 运动。不计小球大小，不计直槽尺寸，不计各处摩擦，圆盘为均质圆盘。小球在位置 A 时，圆盘的角速度为 ω_1。求当小球运动至距轴线距离为 $R/2$ 的位置 D 时，圆盘的角速度。(图中所画为系统的俯视示意图。)

21. 图示均质圆盘质量为 m，半径为 R，在其轮缘处缠有不计重量的柔软细绳，细绳上悬挂一质量为 $2m$ 的物块 A，使圆盘绕水平轴 O 转动。求：物块在下落过程中轴承 O 处的约束力。



(a)　(b)

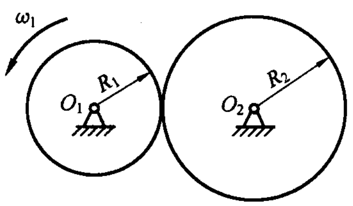
题 20 图



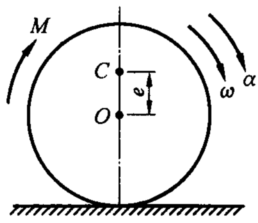
题 21 图

22. 图示齿轮传动系统中，视两轮为均质轮，其质量分别为 m_1 和 m_2，节圆半径分别为 R_1 和 R_2，主动轮的角速度为 ω_1，为匀速。求系统对轴 O_1 和轴 O_2 的动量矩。

23. 图示非均质圆轮质量为 m，半径为 R，其质心 C 距圆轮几何中心 O 距离 $e=\dfrac{R}{2}$，圆轮对质心的转动惯量 $J_C=\dfrac{3}{2}mR^2$，其上受有矩为 M 的力偶作用。圆轮在水平路面上纯滚动，其角速度为 ω，角加速度为 α。求圆轮运动至图示 O,C 在同一铅直线上时：(1) 圆轮的动量；(2) 对轮心 O 的动量矩；(3) 圆轮的动能；(4) 路面对圆轮的法向约束力；(5) 路面对圆轮的摩擦力；(6) 使圆轮产生此种运动的力偶矩 M 的大小。

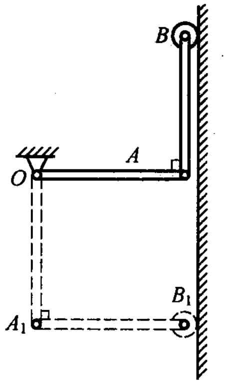


题 22 图



题 23 图

24. 两质量均为 m、长度均为 l 的均质杆连接如图，不计小轮 B 的质量和大小，系统初始静止于图示位置，不计各处摩擦。求 OA 杆转至铅直位置、AB 杆运动至水平位置（图中虚线位置）时，轮 B 的速度。



题 24 图

哈尔滨工业大学理论力学平时小测题解答

1. **解**:先取整体,受力图如图(a)所示,由

$$\sum M_A=0,\quad F_H\cdot 5l-F\cdot 8l=0$$

解得
$$F_H=80\ \text{kN}$$

然后取 BEH 构件,受力图如图(b)所示,由

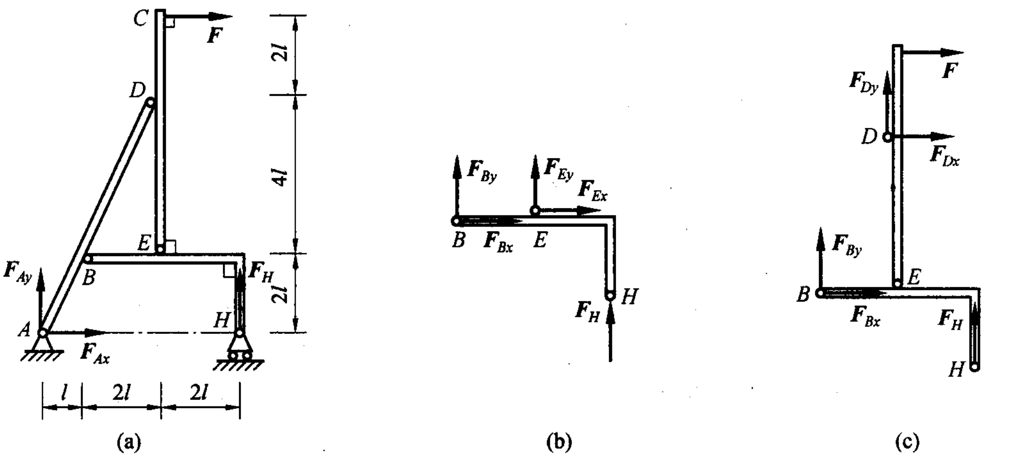
$$\sum M_E=0,\quad F_H\cdot 2l-F_{By}\cdot 2l=0$$

解得
$$\underline{F_{By}=80\ \text{kN}}$$

最后取 $BEHD$ 系统,受力图如图(c)所示,由

$$\sum M_D=0,\quad F_H\cdot 2l-F_{By}\cdot 2l+F_{Bx}\cdot 4l-F\cdot 2l=0$$

解得
$$\underline{F_{Bx}=25\ \text{kN}}$$



题 1 解答图

此题用 3 个一元一次方程求出了两个未知力,这是最少的方程数。

2. **解**:取整体,其受力图如图所示,由

$$\sum M_x=0,\quad -2F_{By}-F_2\cdot 1+F_1\cdot \frac{1}{2}=0$$

解得
$$\underline{F_{By}=-1.5\ \text{kN}}$$

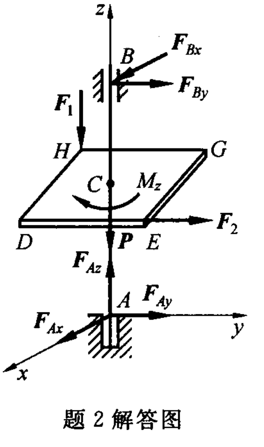
由
$$\sum M_y=0,\quad 2F_{Bx}-F_1\cdot \frac{1}{2}=0$$

解得
$$\underline{F_{Bx}=2.5\ \text{kN}}$$

由
$$\sum M_z=0,\quad F_2\cdot \frac{1}{2}-M_z=0$$

解得
$$\underline{M_z=4\ \text{kN}\cdot\text{m}}$$

由
$$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}+F_{Bx}=0$$
$$\sum F_y=0,\quad F_{Ay}+F_{By}+F_2=0$$



题 2 解答图

$$\sum F_z=0,\quad F_{Az}-P-F_1=0$$

分别解得　　$F_{Ax}=-2.5\ \mathrm{kN}$，　$F_{Ay}=-6.5\ \mathrm{kN}$，　$F_{Az}=15\ \mathrm{kN}$

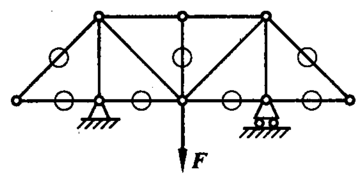
3. **解**:不受力的杆(零杆)有 HJ,JI,IH,HE,EI 与 CD 杆。

HG 杆受力大小为 F,为压力;EG 杆受力大小为 F,为压力。

提示:用节点法可直接看出或求出。

4. **解**:不受力的杆(零杆)如图所示,其上画○的杆。

提示:用节点法可直接看出。



题 4 解答图

5. **解**:

(1)一空间力系,其各力作用线均与某一固定直线平行,其独立的平衡方程最多只有(3)个;

(2)一空间力系,其各力作用线均与某一固定直线垂直,其独立的平衡方程最多只有(5)个;

(3)一空间力系,其各力作用线均与某一固定直线相交,其独立的平衡方程最多只有(5)个;

(4)一空间力系,其各力作用线均与某一固定平面平行,其独立的平衡方程最多只有(5)个;

(5)一空间力系,其各力作用线均与两个固定平行平面平行,其独立的平衡方程最多只有(5)个。

提示:空间力系最多的独立平衡方程为 6 个,然后考虑各具体情况即可,如下所述:

(1)一空间力系,其各力作用线均与某一固定直线平行,此力系为一空间平行力系,所以其独立的平衡方程最多只有 3 个;

(2)一空间力系,其各力作用线均与某一固定直线垂直,沿此直线建一轴设为 z 轴,则方程 $\sum F_z$ 为 $0+0+0+0+\cdots+0=0$,无法求解未知量,所以其独立的平衡方程最多只有 5 个;

(3)一空间力系,其各力作用线均与某一固定直线相交,沿此直线建一轴设为 z 轴,则方程 $\sum M_z$ 为 $0+0+0+0+\cdots+0=0$,无法求解未知量,所以其独立的平衡方程最多只有5 个;

(4)一空间力系,其各力作用线均与某一固定平面平行,垂直此平面建一轴设为 z 轴,则方程 $\sum F_z$ 为 $0+0+0+0+\cdots+0=0$,无法求解未知量,所以其独立的平衡方程最多只有 5 个;

(5)一空间力系,其各力作用线均与两个固定平行平面直线平行,垂直此两个平面建一轴设为 z 轴,则方程 $\sum F_z$ 为 $0+0+0+0+\cdots+0=0$,无法求解未知量,所以其独立的平衡方程最多只有 5 个。

6. **解**:先取 CD 杆,受力图如图(a)所示,由 $\sum M_i=0$ 或 $\sum M_D=0$,有

$$F_{CB}\sin 45°\cdot a-M=0$$

得

$$F_{CB}=20\sqrt{2}\ \mathrm{kN}$$

然后取 AEB 杆,受力图如图(b)所示,由

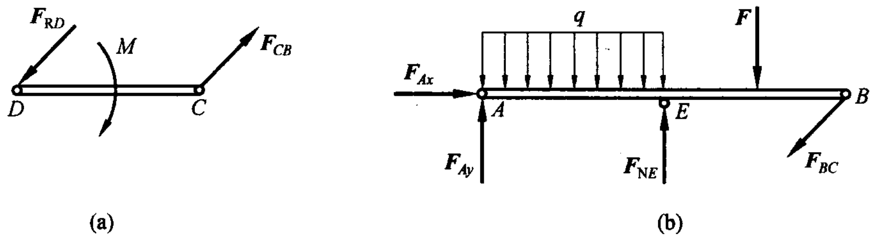
$$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}-F_{BC}\cos 45°=0$$

解得

$$F_{Ax}=20\ \mathrm{kN}$$

由

$$\sum M_E=0,\quad -F_{Ay}\cdot a+qa\cdot\frac{a}{2}-F\cdot\frac{a}{2}-F_{BC}\sin 45°\cdot a=0$$



题 6 解答图

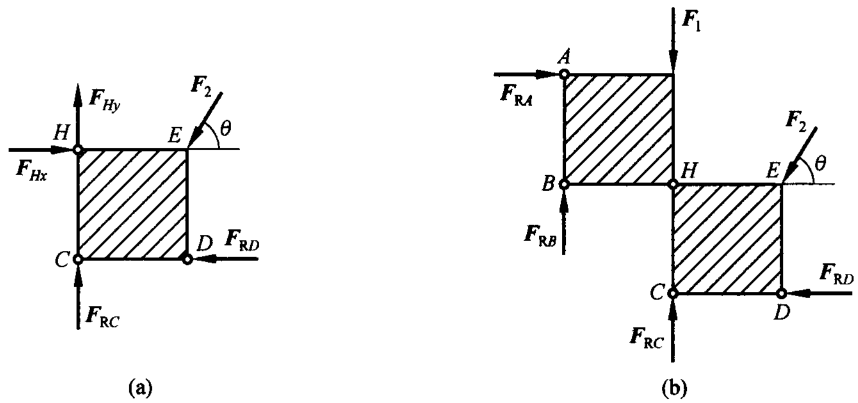
解得
$$F_{Ay}=-32\ \mathrm{kN}$$

此题用 3 个一元一次方程求出了两个未知力，这是最少的方程数。

7. **解**：先取 $CDEH$ 板，受力图如图(a)所示，由$\sum M_H=0$，有

$$F_{RD}\cdot l-F_2\sin 60°\cdot l=0$$

得
$$F_{RD}=-\frac{5}{2}\sqrt{3}\ \mathrm{kN}$$



题 7 解答图

然后取整体，受力图如图(b)所示，由

$$\sum M_A=0,\quad F_{RC}\cdot l-F_1\cdot l-F_{RD}\cdot 2l+F_2\sin 60°\cdot 2l-F_2\cos 60°\cdot l=0$$

解得
$$F_{RC}=-5.5\ \mathrm{kN}$$

由
$$\sum F_x=0,\quad F_{RA}-F_{RD}-F_2\cos 60°=0$$

解得
$$F_{RA}=-\frac{5}{2}(\sqrt{3}-1)=-1.83\ \mathrm{kN}$$

由
$$\sum F_y=0,\quad F_{RB}+F_{RC}-F_1-F_2\sin 60°=0$$

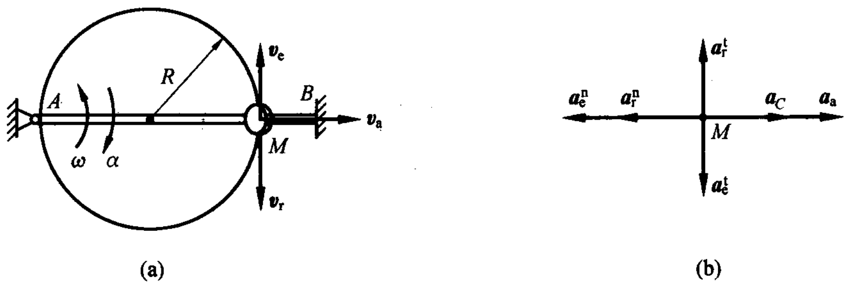
解得
$$F_{RB}=\frac{5}{2}(\sqrt{3}-1)=1.83\ \mathrm{kN}$$

此题用 4 个一元一次方程求出了 4 个未知力。

8. **解**：动系建于大圆环上，动点选为小圆环，由 $\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$，速度分析图如图(a)所示，其中，牵连速度与相对速度共线，$v_e=2R\omega=2\ \mathrm{m/s}$，则 $v_r=2\ \mathrm{m/s}$，$v_a=0$。

加速度分析如图(b)所示，由

$$\boldsymbol{a}_a=\boldsymbol{a}_e^n+\boldsymbol{a}_e^t+\boldsymbol{a}_r^n+\boldsymbol{a}_r^t+\boldsymbol{a}_C$$



题 8 解答图

式中 $a_e^n = 2R\omega^2 = 2\ \mathrm{m/s^2}$，$a_r^n = \dfrac{v_r^2}{R} = 4\ \mathrm{m/s^2}$，$a_C = 2\omega v_r = 4\ \mathrm{m/s^2}$，沿水平方向投影有

$$a_a = -a_e^n - a_r^n + a_C$$

得

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{a_a = -2\ \mathrm{m/s^2}}$$

9. **解**：(1)把动系建于 AB 杆上，动点选为小圆环，有

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_{e1} + \boldsymbol{v}_{r1}$$

大小	?	√	?
方向	?	√	√

式中，$v_{e1} = l\omega$，3 个未知量，不能求解。

为此，再把动系建于 CD 杆上，动点选为小圆环，有

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_{e2} + \boldsymbol{v}_{r2}$$

大小	?	√	?
方向	?	√	√

如图(a)所示，式中，$v_{e2} = v$，3 个未知量，不能求解。

而 $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_a$，有

$$\boldsymbol{v}_{e1} + \underset{?}{\boldsymbol{v}_{r1}} = \boldsymbol{v}_{e2} + \underset{?}{\boldsymbol{v}_{r2}}$$

沿水平方向投影有

$$-v_{r1} = v$$

则小圆环 E 的速度大小为

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{v_a = \sqrt{v_{e1}^2 + v_{r1}^2} = \sqrt{l^2\omega^2 + v^2}}$$

(2)动系建于 AB 杆上，选小圆环 E 为动点，小圆环 E 的牵连加速度大小为 $a_e = a_{e1}^n = l\omega^2$，方向如图(b)所示。

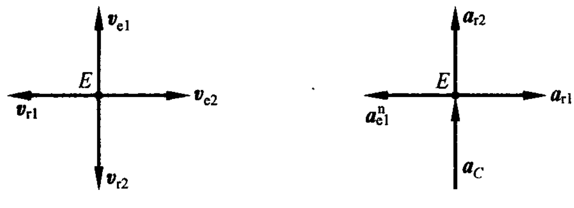
(3)动系建于 AB 杆上，选小圆环 E 为动点，小圆环 E 的科氏加速度大小为 $a_C = 2\omega v_{r1} = 2\omega v$，方向如图(b)所示。

(4)动系建于 AB 杆上，选小圆环 E 为动点，其加速度为

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_{e1}^n + \boldsymbol{a}_{r1} + \boldsymbol{a}_C$$

大小	?	√	?	√
方向	?	√	√	√

为此，再把动系建于 CD 杆上，动点选为小圆环，有



(a)　　　　(b)

题 9 解答图

$$\boldsymbol{a}_a=\boldsymbol{a}_{e2}^n+\boldsymbol{a}_{r2} \tag{1}$$

大小	?	√	?
方向	?	√	√

式中，$a_{e2}^n=0$，各加速度分析如图(b)所示。由

$$\boldsymbol{a}_a=\boldsymbol{a}_a$$

有
$$\boldsymbol{a}_{e1}^n+\boldsymbol{a}_{r1}+\boldsymbol{a}_C=\boldsymbol{a}_{r2} \tag{2}$$

$$?\qquad\qquad ?$$

把式(2)沿水平方向投影得

$$-a_{e1}^n+a_{r1}=0$$

得动系建于 AB 杆上，选小圆环 E 为动点，小圆环 E 的相对加速度大小为$a_{r1}=l\omega^2$。

(5)把式(2)沿铅直方向投影得

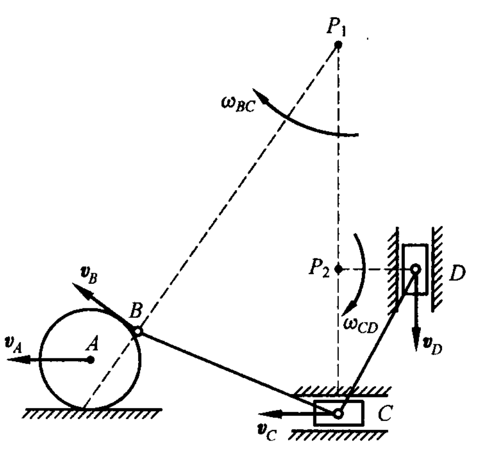
$$a_{r2}=a_C=2\omega v$$

则由式(1)有小圆环 E 的绝对加速度大小为

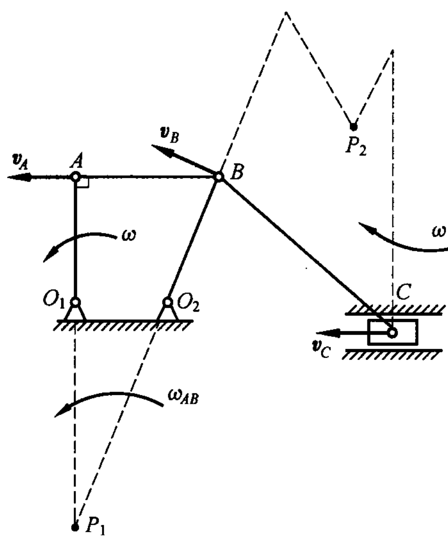
$$a_a=a_{r2}=2\omega v$$

10. **解**：此机构图中，轮 A 做平面运动，其与地面接触点为速度瞬心，其角速度为逆时针转向。杆 BC 与 CD 也做平面运动，其速度瞬心与角速度转向均如图所示。

11. **解**：此机构图中，杆 AB 与 BC 做平面运动，其速度瞬心与角速度转向均如图所示。

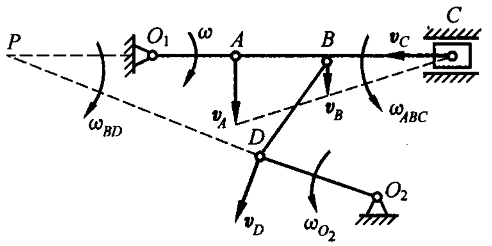


题 10 答案图

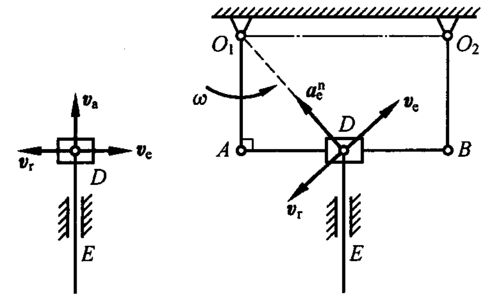


题 11 答案图

12. **解**:此机构图中,杆 ABC 与 BD 做平面运动,其速度瞬心与角速度转向均如图所示。



题 12 答案图



(a) (b)

题 13 答案图

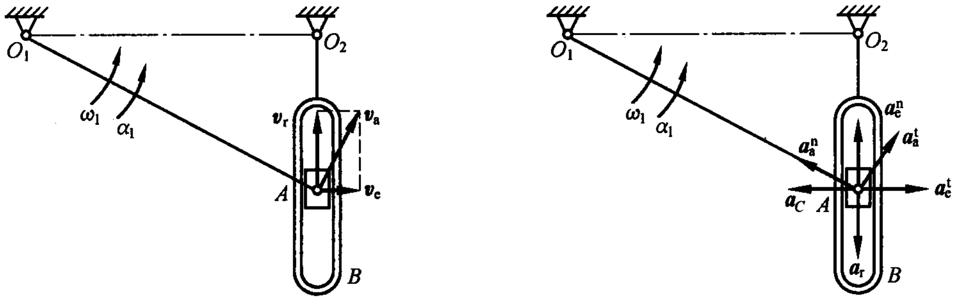
13. **解**:(1)把动系建于 AB 杆上,动点选为套筒 D,有

$$\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$$

如图(a)所示,可看出套筒 D 的绝对速度 $v_a=0$。

(2)把动系建于 O_1A 杆上,动点选为套筒 D,则其牵连速度大小为 $v_e=\sqrt{2}\,l\omega$,方向如图(b)所示;因套筒 D 的绝对速度 $v_a=0$,由 $\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$ 可知,其相对速度大小为 $v_r=\sqrt{2}\,l\omega$,方向如图(b)所示;牵连加速度大小为 $a_e=a_e^n=\sqrt{2}\,l\omega^2$,方向如图(b)所示。

14. **解**:把动系建于杆 O_2B 上,动点选为滑块 A,其速度(分析)图与加速度(分析)图如图所示。



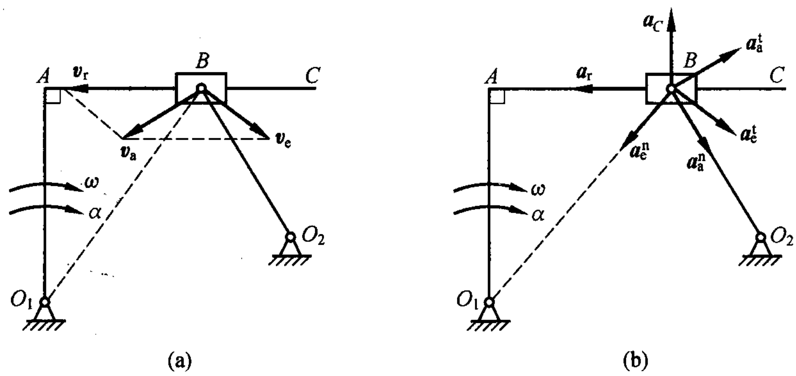
(a) (b)

题 14 答案图

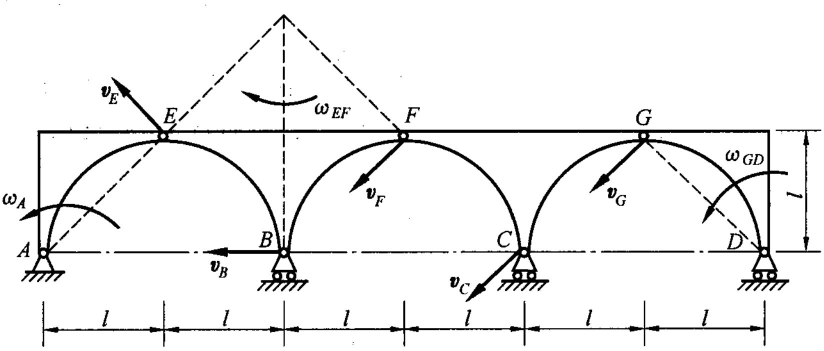
15. **解**:把动系建于直角弯杆 O_1AC 上,动点选为套筒 B,其速度(分析)图与加速度(分析)图如图所示。

16. **解**:突然撤掉桥墩 C,结构变为机构,如图所示。把各构件看作为刚体,构件 AE 为定轴转动,设其角速度方向如图所示;构件 EBF 做平面运动,其速度瞬心与角速度方向如图所示;构件 DG 为定轴转动,则其角速度方向如图;构件 FGC 为瞬时平移,如图所示。各点的速度方向也如图所示。

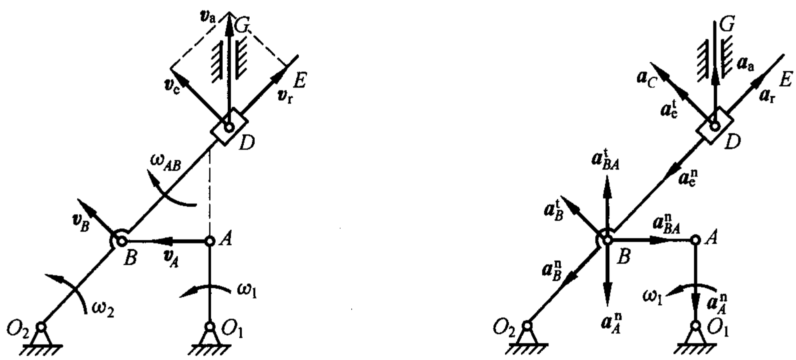
17. **解**:速度(分析)图与加速度(分析)图如图所示,AB 杆与 O_2E 杆的角速度方向也如图所示。



题 15 答案图



题 16 答案图

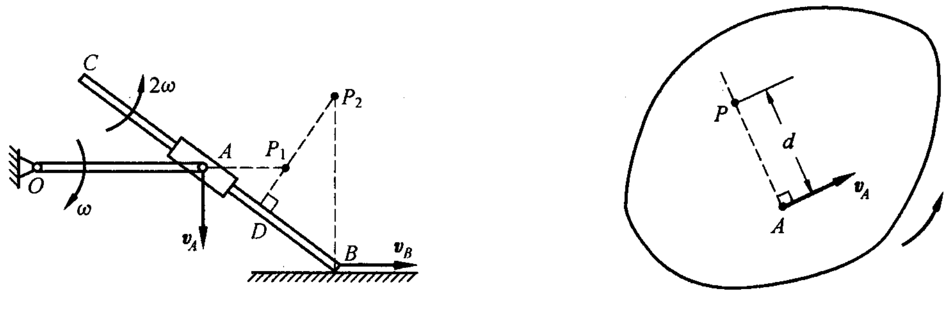


题 17 答案图

18. **解**:套筒 A 的速度瞬心为点 P_1,BC 杆的速度瞬心为点 P_2,如图(a)所示。

提示:对套筒 A,确定其速度瞬心的方法,一般教材里很少提到,如图(b)所示,若已知平面图形内一点 A 的速度 $\boldsymbol{v}_A$ 和图形的角速度 ω,如图(b)所示,因 v_A 和 ω 已知且不为零,令 $d=\dfrac{v_A}{\omega}$,垂直于 $\boldsymbol{v}_A$ 量取一段距离 d 得一点,则此点就是此图形的速度瞬心 P。(见高等教育出版社出版,程燕平、程郢编《MATLAB 理论力学》218 页)。

不忽略套筒 A 大小,其是一刚体,其角速度与杆 BC 的角速度相同。而杆 OA 为定轴转动,所以点 A 的速度 $v_A=l\omega$,则 $AP_1=\dfrac{v_A}{2\omega}=\dfrac{l}{2}$,量取 $AP_1=\dfrac{l}{2}$,得点 P_1,此点就是套筒 A 的



(a) (b)

题 18 答案与提示图

速度瞬心。然后由点 P_1 垂直于杆 BC 量取 DP_1，则 $DP_1 \cdot 2\omega$，即为套筒 A 扩展部分的速度。把动系建于套筒 A 上，动点选为 BC 杆上的点 D，此速度即为牵连速度。BC 杆相对地面是做平面运动，但相对套筒 A 为平移，所以其相对速度沿着套筒 A（也即沿着 BC 杆），所以 BC 杆的绝对速度方向沿着 BC 杆，再由点 B 的速度方向，可得 BC 杆的速度瞬心如图所示。

19. **解**：机构在 $\varphi=0°$ 时的情形如图(a)所示，有

$$v_A=R\omega$$

而

$$\omega_{AB}=\frac{v_A}{l}=\frac{R\omega}{l}$$

则杆 AB 质心 C 的速度为 $$v_C=\frac{l}{2}\omega_{AB}=\frac{1}{2}v_A$$

此时系统的动量大小为

$$p=m_1\cdot\frac{1}{2}R\omega+m_2\cdot v_C$$

即此时系统的动量大小与方向为

$$p=\frac{1}{2}(m_1+m_2)R\omega(\uparrow)$$

动能为 $$T=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}m_1R^2\omega^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}m_2l^2\omega_{AB}^2$$

即系统的动能为 $$T=\frac{1}{6}(m_1+m_2)R^2\omega^2$$

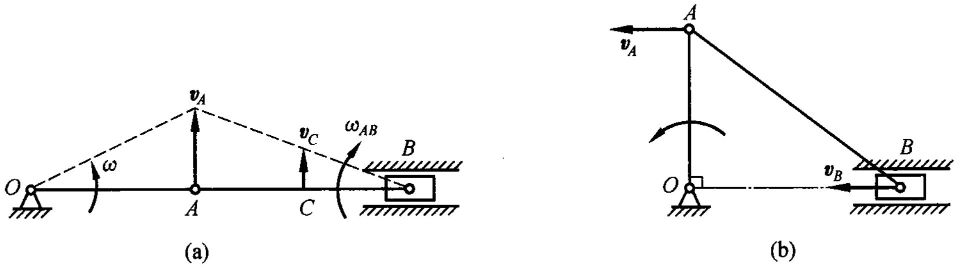
机构在 $\varphi=90°$ 时的情形如图(b)所示，杆 AB 为瞬时平移，点 B 的速度与点 A 的速度相同，所以此时系统的动量大小

$$p=m_1\cdot\frac{1}{2}R\omega+(m_2+m_3)R\omega$$

即 $$p=\frac{1}{2}(m_1+2m_2+2m_3)R\omega(\leftarrow)$$

动能为 $$T=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}m_1R^2\omega^2+\frac{1}{2}(m_2+m_3)R^2\omega^2$$

即系统的动能为 $$T=\frac{1}{6}(m_1+3m_2+3m_3)R^2\omega^2$$



题 19 解答图

20. **解**：系统对铅直轴的力矩为零，系统对铅直轴的动量矩守恒。

小球在位置 A 时，系统对轴 O 的动量矩为

$$L_{O1}=\frac{1}{2}mR^2\omega_1+\frac{m}{4}\cdot R^2\omega_1+\frac{m}{4}\cdot v_r\cdot R\sin 30^\circ$$

式中，第一项为圆盘对轴 O 的动量矩，第二项为小球的牵连运动对轴 O 的动量矩，第三项为小球的相对运动对轴 O 的动量矩。整理后有

$$L_{O1}=\frac{3}{4}mR^2\omega_1+\frac{m}{8}Rv_r$$

小球在位置 D 时，系统对轴 O 的动量矩为

$$L_{O2}=\frac{1}{2}mR^2\omega_2+\frac{m}{4}\cdot\left(\frac{R}{2}\right)^2\cdot\omega_2+\frac{m}{4}\cdot v_r\cdot\frac{R}{2}$$

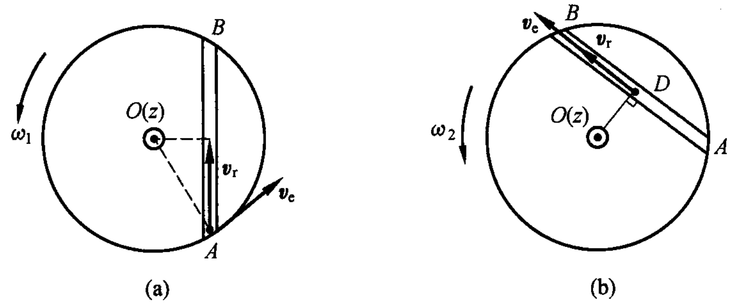
式中，第一项为圆盘对轴 O 的动量矩，第二项为小球的牵连运动对轴 O 的动量矩，第三项为小球的相对运动对轴 O 的动量矩。整理后有

$$L_{O2}=\frac{9}{16}mR^2\omega_2+\frac{m}{8}Rv_r$$

因动量矩守恒，有
$$L_{O2}=L_{O1}$$

即
$$\frac{9}{16}mR^2\omega_2+\frac{m}{8}Rv_r=\frac{3}{4}mR^2\omega_1+\frac{m}{8}Rv_r$$

解得
$$\omega_2=\frac{4}{3}\omega_1$$



题 20 解答图

21. **解**：(1)方法一

运动情况如图(a)所示，用动能定理先求出加速度，即

$$T_1=C$$

$$T_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\cdot\omega^2+\frac{1}{2}\cdot 2m\cdot v^2=\frac{5}{4}mv^2$$

所有力做功为 $$W=2mgh$$

由 $T_2-T_1=W$，有

$$\frac{5}{4}mv^2-C=2mgh$$

对时间求一阶导数有

$$\frac{5}{2}mva=2mgv$$

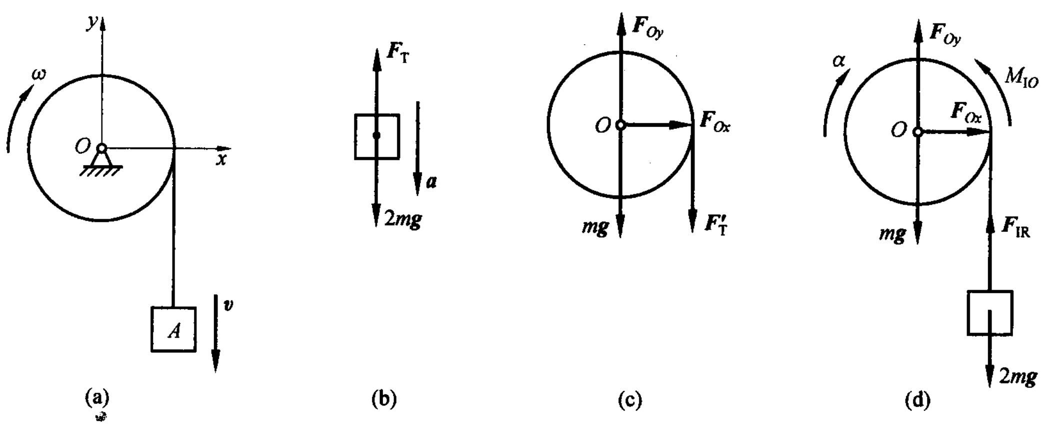
得加速度为

$$a=\frac{4}{5}g$$

然后取物块 A，如图(b)所示，有

$$2m\cdot a=2mg-F_T$$

得绳的拉力为 $$F_T=\frac{2}{5}mg$$



题 21 解答图

最后，取轮，如图(c)所示。

由质心运动定理

$$ma_{Cx}=\sum F_x,\quad m\cdot 0=F_{Ox}$$
$$ma_{Cy}=\sum F_y,\quad m\cdot 0=F_{Oy}-mg-F_T$$

得轴承 O 处的约束力为 $\underline{F_{Ox}=0}$，$\underline{F_{Oy}=\frac{7}{5}mg}$

(2)方法二

取物块与轮，如图(b)与(c)所示，对图(b)，有

$$2m\cdot a=2mg-F_T$$

对图(c)，有

$$\frac{1}{2}mR^2\cdot\alpha=F'_T\cdot R$$

且有 $R\alpha=a$，联立解得

$$F_T = \frac{2}{5}mg, \quad a = \frac{4}{5}g$$

然后，对轮，图(c)，由质心运动定理

$$ma_{Cx} = \sum F_x, \quad m \cdot 0 = F_{Ox}$$
$$ma_{Cy} = \sum F_y, \quad m \cdot 0 = F_{Oy} - mg - F_T$$

得轴承 O 处的约束力为　　$\underline{F_{Ox} = 0}$，　$\underline{F_{Oy} = \frac{7}{5}mg}$

(3)方法三

用动静法，加惯性力与惯性力矩如图(d)所示，其中

$$F_{IR} = 2ma, \quad M_{IO} = \frac{1}{2}mR^2\alpha = \frac{1}{2}mRa$$

由　$\sum M_O = 0, \quad M_{IO} + F_{IR} \cdot R - 2mgR = 0$

解得　$a = \frac{4}{5}g$

由

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ox} = 0$$
$$\sum F_y = 0, \quad F_{Oy} - mg - 2mg + F_{IR} = 0$$

同样解得　　$\underline{F_{Ox} = 0}$，　$\underline{F_{Oy} = \frac{7}{5}mg}$

(4)方法四

用动量定理，取整体，动量在 x，y 轴的投影为

$$p_x = 0, \quad p_y = -2mv$$

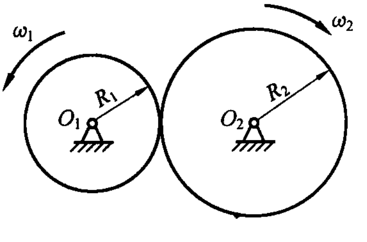
由动量定理　$\frac{dp_x}{dt} = \sum F_x, \quad \frac{dp_y}{dt} = \sum F_y$

有　$0 = F_{Ox}, \quad 2ma = F_{Oy} - 3mg$

把上面求得的 $a = \frac{4}{5}g$ 代入，同样解得

$$\underline{F_{Ox} = 0}, \quad \underline{F_{Oy} = \frac{7}{5}mg}$$

22. **解**：$\omega_2 = \frac{R_1}{R_2}\omega_1$，转向如图所示。



题 22 解答图

则系统对轴 O_1 的动量矩为

$$L_{O_1} = \frac{1}{2}m_1R_1^2\omega_1 - \frac{1}{2}m_2R_2^2\omega_2$$
$$= \frac{1}{2}m_1R_1^2\omega_1 - \frac{1}{2}m_2R_2^2 \cdot \frac{R_1}{R_2}\omega_1$$

$$=\frac{1}{2}m_1R_1^2\omega_1-\frac{1}{2}m_2R_1R_2\omega_1$$

$$=\frac{1}{2}R_1\omega_1(m_1R_1-m_2R_2)$$

即 $$L_{O_1}=\frac{1}{2}R_1\omega_1(m_1R_1-m_2R_2)$$

同理同计算，有 $$L_{O_2}=L_{O_1}=\frac{1}{2}R_1\omega_1(m_1R_1-m_2R_2)$$

提示：计算中，要用到动量矩计算公式 $\boldsymbol{L}_O=\boldsymbol{L}_C+\boldsymbol{r}_C\times m\boldsymbol{v}_C$

23. **解**：(1)圆轮的动量 $p=mv_C=m\cdot\frac{3}{2}R\omega$

即 $$p=\frac{3}{2}mR\omega(\rightarrow)$$

(2)圆轮对轮心 O 的动量矩，由公式 $\boldsymbol{L}_O=\boldsymbol{L}_C+\boldsymbol{r}_C\times m\boldsymbol{v}_C$

而 $L_C=J_C\omega=\frac{3}{2}mR^2\omega$，则

$$L_O=J_C\omega+\frac{3}{2}mR\omega\cdot\frac{R}{2}$$

整理得 $$L_O=\frac{9}{4}mR^2\omega$$

(3)圆轮的动能，由

$$T=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega^2=\frac{1}{2}m\left(\frac{3}{2}R\omega\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}mR^2\cdot\omega^2$$

整理得 $$T=\frac{15}{8}mR^2\omega^2$$

或者由公式 $T=\frac{1}{2}J_P\omega^2$ 计算也可得，式中

$$J_P=\frac{3}{2}mR^2+m\cdot\left(\frac{3}{2}R\right)^2=\frac{15}{4}mR^2$$

为圆轮对速度瞬心 P 的转动惯量。

为进行后面的求解，先进行运动学分析，如图(a)所示，选轮心为基点，求质心 C 的加速度，有

$$\boldsymbol{a}_C=\boldsymbol{a}_O+\boldsymbol{a}_{CO}^{\mathrm{n}}+\boldsymbol{a}_{CO}^{\mathrm{t}}$$

则 $$a_{Cx}=R\alpha+\frac{1}{2}R\alpha=\frac{3}{2}R\alpha$$

$$a_{Cy}=a_{CO}^{\mathrm{n}}=\frac{1}{2}R\omega^2$$

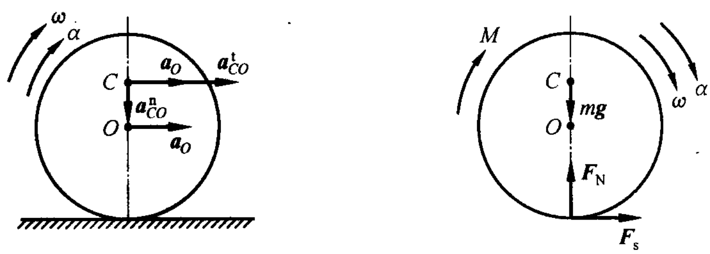
取轮，受力分析如图(b)所示，由刚体平面运动微分方程，即

$$ma_{Cx}=\sum F_x,\quad ma_{Cx}=m\cdot\frac{3}{2}R\alpha=F_s$$

$$ma_{Cy}=\sum F_y,\quad ma_{Cy}=m\cdot\frac{R}{2}\omega^2=mg-F_{\mathrm{N}}$$

$$J_C\alpha=\sum M_C,\quad \frac{3}{2}mR^2\alpha=M-F_s\cdot\frac{3}{2}R$$

分别解得摩擦力、路面对圆轮的法向约束力、使圆轮产生此种运动的力偶矩 M 的大小



(a)　　(b)

题 23 解答图

为

$$F_s=\frac{3}{2}mR\alpha,\quad F_N=mg-\frac{1}{2}mR\omega^2,\quad M=\frac{15}{4}mR^2\alpha$$

对此题，也可以加惯性力，用动静法求解。

24. **解**：在 AB 杆处于水平位置时，先进行运动学分析，选点 B 为基点，求点 A 的速度，如图(a)所示，有

$$\boldsymbol{v}_A=\boldsymbol{v}_B+\boldsymbol{v}_{AB}$$

可得 $v_A=0$，则 OA 杆的角速度 $\omega_{OA}=0$，且 $v_B=v_{AB}=AB\cdot\omega_{AB}$。

也可由速度瞬心法，知点 A 为 AB 杆的速度瞬心，则 OA 杆的角速度 $\omega_{OA}=0$。

用动能定理，有

$$T_1=0$$

$$T_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\cdot\omega_{AB}^2=\frac{1}{6}ml^2\omega_{AB}^2=\frac{1}{6}mv_B^2$$

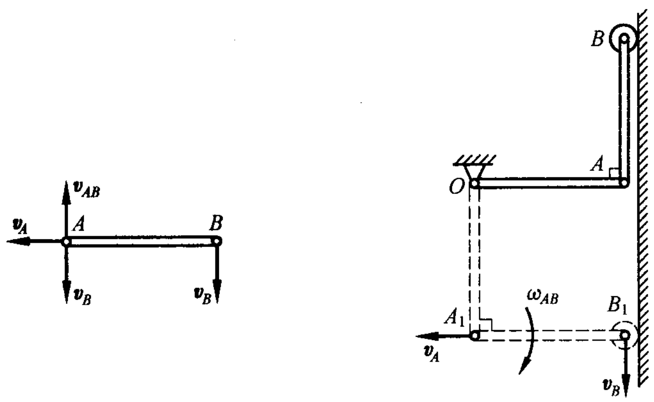
力所做功为

$$W=mg\cdot\frac{l}{2}+mg\cdot\frac{3}{2}l=2mgl$$

由动能定理　$T_2-T_1=W$

有　$\frac{1}{6}mv_B^2-0=2mgl$

得轮 B 的速度为　$v_B=2\sqrt{3gl}$



(a)　　(b)

题 24 解答图