哈尔滨工业大学（深圳）2023 年春季学期

理论力学 II 试题（回忆版）参考答案

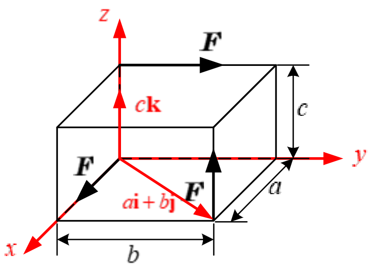
修订历史记录:

V1.0	2023.7	初始版
V1.1	2023.8	修订填空题答案、更正笔误
V1.2	2024.6	修订填空第 3 题答案、修改版式

一、判断题（每小题 2 分，满分 8 分）

1. ×。解析：只对平面汇交力系成立。
2. ×。解析：科氏加速度$\mathbf{a}_C = 2\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r$，大小上等于$2|\boldsymbol{\omega}_e||\mathbf{v}_r|\sin\theta$（$\theta$ 是$\boldsymbol{\omega}_e$和$\mathbf{v}_r$的夹角）。
3. √
4. ×。解析：动量是矢量，不做功的外力虽不能改变系统动量的大小$(T = \dfrac{p^2}{2m})$，但可以改变动量的方向。

二、选择题（每小题 3 分，满分 12 分）



1. B。解析：其余只适用于刚体。
2. B。解析：需要这些力对于某个简化中心之主矩和主矢垂直，即内积为 0。以 O 为原点建立直角坐标系，则此力系向 O 点简化，所得主矢为

   $\mathbf{F} = F(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$ ($\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ 分别为 x、y、z 轴单位矢量)

   主矩为

   $$\mathbf{M} = (a\mathbf{i}+b\mathbf{j})\times(F\mathbf{k}) + c\mathbf{k}\times(F\mathbf{j}) = -Fa\mathbf{j} + Fb\mathbf{i} - Fc\mathbf{i}\text{，}$$

   则$\mathbf{F}\cdot\mathbf{M} = F^2(b-c-a) = 0$，因此$b = a + c$。
3. C。提示：利用平行轴定理即可解题。
4. D。解析：$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$。

三、填空题（每空 2 分，满分 10 分）

1. 30°
2. $\dfrac{3mvR}{4}$，$\dfrac{3}{16}mv^2$

   解析：由纯滚动，则与地面接触点为瞬心，因此$\omega = \dfrac{v}{2R}$，质心平动速度$v_C = \dfrac{v}{2}$。系统对 O 的动量矩$\mathbf{L}_O = \mathbf{L}_C + \mathbf{r}_C \times m\mathbf{v}_C$，则$L_O = J_C\omega + \dfrac{mvR}{2} = \dfrac{mR^2}{2}\dfrac{v}{2R} + \dfrac{mvR}{2} = \dfrac{3mvR}{4}$，系统动能$T = \dfrac{1}{2}mv_C^2 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}mR^2\right)\omega^2 = \dfrac{3}{16}mv^2$。

3. $\dfrac{\sqrt{41}R}{2}\sqrt{\omega^4+\alpha^2}$， $5mR^2\alpha$

解析：建立平面直角坐标系 xOy，可知系统质心位置：

$$x_C=\frac{2m\times R}{3m}=\frac{2R}{3},\quad y_C=\frac{m\times\frac{1}{2}R+2m\times R}{3m}=\frac{5R}{6}$$

因此质心与 O 的距离为 $\sqrt{x_C^2+y_C^2}=\dfrac{\sqrt{41}R}{6}$，因此惯性力系向 O 点简化的主矢**大小**为

$$M_O=3ma_C=3m\sqrt{a_C^{t2}+a_C^{n2}}=3m\sqrt{\left(\omega^2\frac{\sqrt{41}R}{6}\right)^2+\left(\alpha\frac{\sqrt{41}R}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{41}mR}{2}\sqrt{\omega^4+\alpha^2}$$

杆对 O 的转动惯量为

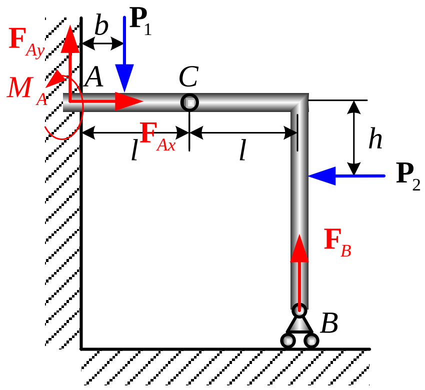
$$J_O=\frac{1}{3}mR^2+\int_0^{2R}(R^2+r^2)\frac{2m}{2R}\mathrm{d}r=\frac{1}{3}mR^2+m\int_0^{2R}\left(R+\frac{r^2}{R}\right)\mathrm{d}r=5mR^2$$

所以惯性力系向 O 点简化的主矩**大小**为 $J_O\alpha=5mR^2\alpha$。

四、（满分 12 分）

解：对 C 点右侧钢架分析，设 B 处约束力竖直向上，

则对 C 点取矩得 $-P_2h+F_Bl=0$，解得 $F_B=P_2\dfrac{h}{l}$。



A 点为固定端，可用一对正交分力和一个力偶来表示此处约束力。对 A 点列写平衡方程得

$\Sigma F_x=0\Rightarrow F_{Ax}-P_2=0$

$\Sigma F_y=0\Rightarrow F_{Ay}-P_1+F_B=0$

$\Sigma M=0\Rightarrow -P_1b-P_2h+F_B2l+M_A=0$

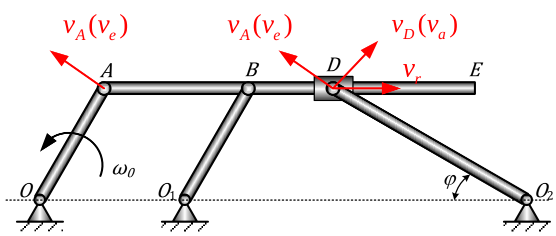
解得 $F_{Ax}=P_2$， $F_{Ay}=P_1-P_2\dfrac{h}{l}$， $M_A=P_1b-P_2h$。

五、（满分 12 分）

解：先作速度分析。易知 ABO_1O 为平行四边形。则 AB 杆运动时总是平行于 O_1O，即作平移。以 AE 杆为动系，D 点为动点，则绝对运动为 D 的圆周运动，牵连运动为 AE 的平移，相对运动为沿水平方向的直线运动。

则由 $\mathbf{v}_a=\mathbf{v}_e+\mathbf{v}_r$，将速度向量在竖直方向投影可得 $v_e\sin30°=v_a\sin60°$

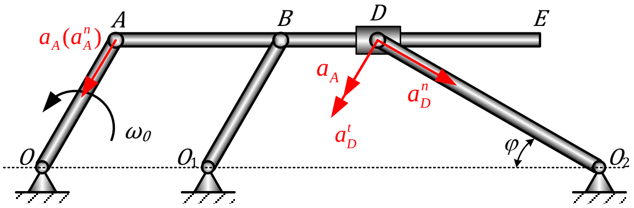
（AO 与 O_1O 的夹角为 $\arcsin\dfrac{O_2D\sin\varphi}{AO}=\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}=60°$）



结合 $v_e=v_A=\omega_0OA=6\text{cm/s}$，

解得 $v_a=\dfrac{v_e}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$ cm/s，因此 $\omega=\dfrac{v_a}{3\sqrt{3}}=\dfrac{2}{3}$ rad/s。

分析加速度情况，绘制图形如下。

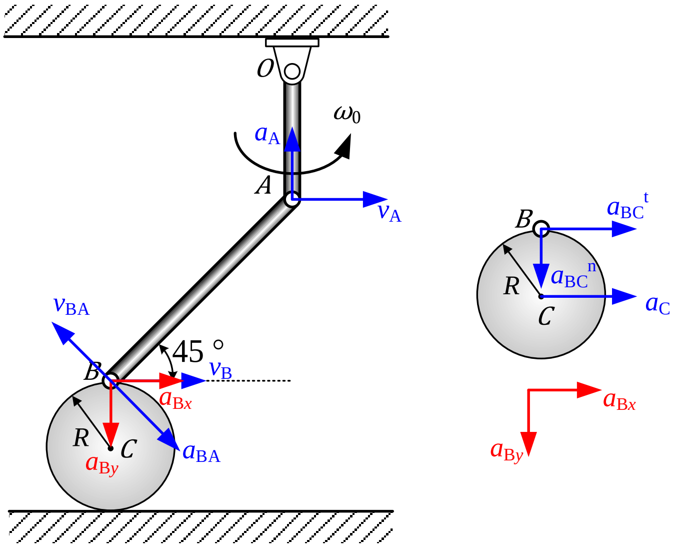


则有 $\mathbf{a}_a=\mathbf{a}_D^t+\mathbf{a}_D^n=\mathbf{a}_e^n+\mathbf{a}_r$ $(\mathbf{a}_e^t=\mathbf{0})$。向竖直方向投影得

$$\omega_0^2 OA\sin 60^\circ=\omega^2 O_2D\sin 30^\circ+\mathbf{a}_D^t\sin 60^\circ$$

代入数据有 $12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4}{9}\times3\sqrt{3}\times\frac{1}{2}+\alpha\times3\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $\alpha=\frac{6\sqrt{3}-\frac{2}{3}\sqrt{3}}{9/2}=\frac{32}{27}\sqrt{3}\mathrm{s}^{-2}$。

六、（满分 14 分）



解：图示瞬时 A、B 点速度均沿水平方向，由基点法 $\mathbf{v}_B=\mathbf{v}_A+\mathbf{v}_{BA}$ 且 $\mathbf{v}_{BA}$ 有垂直于 $\mathbf{v}_B,\mathbf{v}_A$ 的分量，可知 AB 杆作瞬时平移，角速度 $\omega_{AB}=0$，同时也可知 $v_B=v_A=2\omega_0 R$.

利用基点法分析加速度：$\mathbf{a}_B=\mathbf{a}_A+\mathbf{a}_{BA}=\mathbf{a}_A^n+\mathbf{a}_{BA}^t$ （$\mathbf{a}_A^t=\mathbf{0}$，$a_{BA}^n=\omega^2 AB=0$）

将其向竖直方向上投影，可知 $\mathbf{a}_{By}=\mathbf{a}_A+\mathbf{a}_{BAy}$，进而 $-a_{By}=a_A-a_{BA}\sin 45^\circ$

其中 $a_A=2\omega_0^2 R$ 已知，因此需要求解 a_{By}。

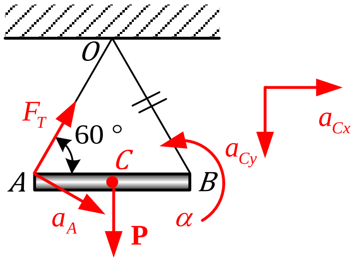
选 C 为基点，对 B 用基点法分析：$\mathbf{a}_B=\mathbf{a}_C+\mathbf{a}_{BC}$

将其在竖直方向上投影，有 $a_{By}=a_{BC}^n=\omega_{BC}^2 R$，由圆轮作纯滚动得 $\omega_{BC}=\frac{v_B}{2R}$，解得 $a_{By}=\omega_0^2 R$

进而 $a_{BA}=(a_A+a_{By})\sqrt{2}=3\sqrt{2}\omega_0^2 R$，故 $\alpha_{BA}=3\sqrt{2}\omega_0^2 R/4R=\frac{3\sqrt{2}}{4}\omega_0^2$。

七、（满分 13 分）

解：剪断细绳瞬间 AB 杆受力如右图所示。由刚体平面运动微分方程得



$\Sigma F_x = ma_{Cx} \Rightarrow F_T \cos 60° = ma_{Cx}$

$\Sigma F_y = ma_{Cy} \Rightarrow mg - F_T \sin 60° = ma_{Cy}$

$\Sigma M_C = J_C \alpha \Rightarrow -F_T \times \dfrac{l}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{12} ml^2 \alpha$

共 3 个方程，有 5 个未知数，以下增补运动学方程：

利用基点法分析加速度：$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{CA} = \mathbf{a}_A^t + \mathbf{a}_{CA}^t$（图示瞬时杆的速度为 0，故转动角速度为 0，$A$ 点处转动角速度也为 0，则相对加速度与 A 点加速度中均无法向分量）

得 $a_A \sin 60° = a_{Cx}$，$a_A \cos 60° - \dfrac{l}{2}\alpha = a_{Cy}$

联立以上 5 个方程，解得：$\alpha = -\dfrac{18g}{13l}$，$F_T = \dfrac{2\sqrt{3}}{13} mg$，$a_A = \dfrac{2g}{13l}$，$a_{Cx} = \dfrac{\sqrt{3}g}{13}$，$a_{Cy} = \dfrac{10g}{13}$。

八、（满分 13 分）

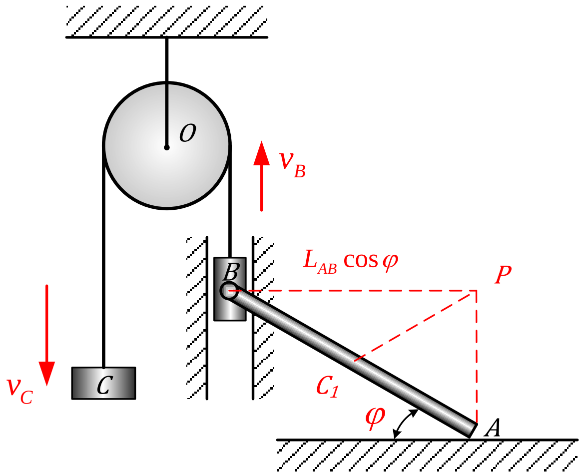
解：选杆水平、系统静止为初始状态，AB 与地面夹角为 φ 时为末了状态。则

$T_1 = 0$；

$T_2 = \dfrac{1}{2} m_C v_C^2 + \dfrac{1}{2} J_O \omega_O^2 + \dfrac{1}{2} m_{AB} v_{C1}^2 + \dfrac{1}{2} J_{C1} \omega_{AB}^2$ ……………………………………………………①

其中 C_1 为杆 AB 的质心，$\omega_O = \dfrac{v_C}{r_O}$，$J_O = \dfrac{1}{2} m_O r_O^2$，$J_{C1} = \dfrac{1}{12} m_{AB} L_{AB}^2$。

利用速度瞬心法可画出示意图如图所示



由图可知 $\omega_{AB} = \dfrac{v_B}{L_{AB}\cos\varphi} = \dfrac{v_C}{L_{AB}\cos\varphi}$，$v_{C1} = \omega_{AB} \dfrac{L_{AB}}{2} = \dfrac{v_C}{2\cos\varphi}$，将上述表达式及数据代入式①得

$$T_2 = 3v_C^2 + v_C^2 + \frac{3v_C^2}{4\cos^2\varphi} + \frac{v_C^2}{4\cos^2\varphi} = 4v_C^2 + \frac{v_C^2}{\cos^2\varphi}$$

从初态到末态，外力对系统做功为

$$W_{12}=(m_C h_C-m_{AB}h_{AB})g \quad （h_{AB}为AB质心移动距离）$$
$$=(m_C h_C-m_{AB}h_C/2)g=3h_C g$$

又知 $h_C=L_{AB}\sin\varphi=4\sin\varphi$，由动能定理 $W_{12}=T_2-T_1$ 得

$$4v_C^2+\frac{v_C^2}{\cos^2\varphi}=12g\sin\varphi$$

代入 $\varphi=30°$ 得 $v_C\approx\sqrt{\frac{3}{16}\times6\times9.8}\approx3.32\text{m/s}$。

将上式两边求导得

$$8a_C v_C+\frac{2a_C v_C\cos^2\varphi+2v_C^2\cos\varphi\sin\varphi\dot{\varphi}}{\cos^4\varphi}=12g\cos\varphi\dot{\varphi}$$

由 $h_C=L_{AB}\sin\varphi=4\sin\varphi$，两边求导 $v_C=4\cos\varphi\dot{\varphi}\Rightarrow\dot{\varphi}=\frac{v_C}{4\cos\varphi}$，代入上式有

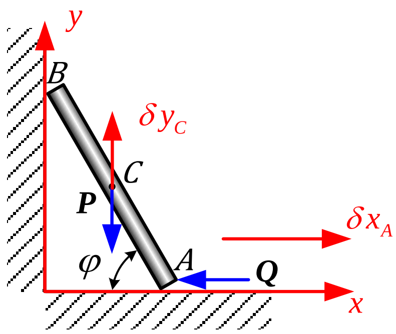
$$8a_C v_C+\frac{2a_C v_C\cos^2\varphi+\frac{1}{2}v_C^3\sin\varphi}{\cos^4\varphi}=3gv_C$$

约去一个 v_C，并代入数据得 $a_C\approx\sqrt{\frac{3}{32}\times2.5\times9.8}\approx2.30\text{m/s}^2$。

九、（满分 6 分）

解：对整体，理想约束系统，列虚功方程得 $-Q\delta x_A-P\delta y_C=0$

建立 xOy 坐标系如图所示。



则由几何关系得

$$x_A=2l\cos\varphi\Rightarrow\delta x_A=-2l\sin\varphi\delta\varphi$$
$$y_C=l\sin\varphi\Rightarrow\delta y_C=l\cos\varphi\delta\varphi$$

代入虚功方程得 $\frac{Q}{P}=-\frac{\delta y_C}{\delta x_A}=\frac{l\cos\varphi}{2l\sin\varphi}=\frac{1}{2\tan\varphi}$。