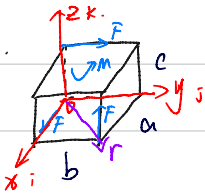
一、1. √ √ × ×

2.



首先将力向O点化简得 $\vec{F_R} = F\vec{i} + F\vec{j} + F\vec{k}$

从点 $\vec{M_O} = 3Fb\vec{k} - Fc\vec{i} + \vec{r} \times \vec{F}$

$= 3Fb\vec{k} - Fc\vec{i} + F\cdot(a\vec{i} + a\vec{j}) \times \vec{k} = 3Fb\vec{k} - Fa\vec{j} + (Fb - Fc)\vec{i}$

力系最终化为一合力则 $\vec{F_R} \cdot \vec{M_O} = 0$

$\Rightarrow a + c = 4b$

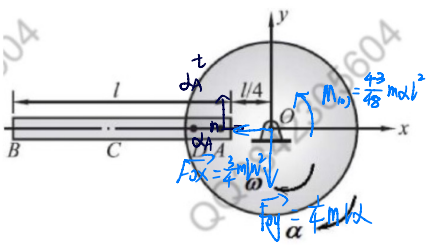
3. 由于下落过程质心位置不变，固 $x_A = \frac{l}{2}\cos\theta$，$y_A = l\sin\theta$

4. $J_O = J_{圆盘} + J_{杆AB} = \frac{1}{2}\cdot 2m\cdot(\frac{l}{2})^2 + (\frac{1}{12}ml^2 + m(\frac{3}{4}l)^2)$

$= \frac{43}{48}ml^2$

质心位置 $X = \frac{2m\cdot 0 + m\cdot(-\frac{3}{4}l)}{3m} = -\frac{l}{4} = x_A$

固质心为A点.



$a_A^t = \alpha\cdot\frac{l}{4}$ $\quad J\alpha = M_{(O)} = \frac{43}{48}ma_A l^2$

$a_A^n = \omega^2\cdot\frac{l}{4}$

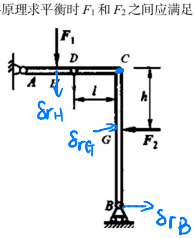
$F_{Ox} = 3m\cdot a_A^n = \frac{3}{4}ml\omega^2$

$F_{Oy} = 3m\cdot a_A^t = \frac{3}{4}ml\alpha$

方向如图所示.

二、（10 分）以下两题选做一题，余下 1 题可限时结束后训练。

（一）图示机构在主动力 F_1、F_2 作用下处于平衡。已知 AH = l，HD = $l/3$，$h = 2l$，不计杆重，位移原理求平衡时 F_1 和 F_2 之间应满足的关系（用其他方法做不给分）



$F_1\delta r_H - F_2\delta r_G = 0$

$\delta r_H = AH\cdot\delta\theta = l\delta\theta$

构建BCD作平面运动，瞬心在点C

$\omega_{BCD} = \frac{AD\cdot\omega_{AD}}{CD} = \frac{4}{3}\omega_{AD}$.

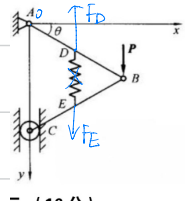
$\frac{\delta r_G}{\delta\theta} = \frac{h\omega_{BCD}}{\omega_{AD}} = \frac{8}{3}l$

代入虚功方程

$(F_1 l - \frac{8F_2 l}{3})\delta\theta = 0$

则 $F_1 = \frac{8}{3}F_2$

（二）平面机构中，杆、弹簧及小轮 C 质量不计，摩擦不计。已知：$AB = BC = l$，弹簧 DE 连接的中点，原长为 $l/2$，刚度为 k，点 B 作用一已知铅直力 $\boldsymbol{P}$，试用虚位移原理求机构平衡时 θ 值。



$y_D = -\frac{l}{2}\sin\theta \qquad |\delta y_D| = \frac{l}{2}\cos\theta$

$y_E = -\frac{3}{2}l\sin\theta \qquad |\delta y_E| = \frac{3}{2}l\cos\theta$

$y_B = -l\sin\theta \qquad |\delta y_B| = l\cos\theta$

$P\cdot|\delta y_B| + F_E\cdot|\delta y_E| - F_D\cdot|\delta y_D| = 0$

$F_D = F_E = -k\left(l\sin\theta - \frac{l}{2}\right)$

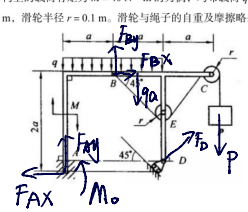
$P = k\left(l\sin\theta - \frac{l}{2}\right)$

$\sin\theta = \frac{P}{kl} + \frac{1}{2}$

三. ① 略. 详情看静力学测试答案.

②. 做过《静力学测试》的同学做此题：

图示结构由不计自重的弯曲刚架 AB 与 T 字形刚架 BCD 组成，它们之间由铰链 B 相连，刚架的 A 端插入地面，D 处为滚动支座。绳子的一段与铰链 B 的销钉相连，另一端跨过滑轮后挂一重物 P。作用于结构上的载荷有矩为 $M = 40$ N·m 的力偶，均布载荷 $q = 20$ N/m，物重 $P = 40$ N。尺寸如图所示，其中 $a = 1$ m，滑轮半径 $r = 0.1$ m。滑轮与绳子的自重及摩擦略去不计。求 A 及 D 处的约束力。



首先对T字架受力分析

$\Sigma M_{(B)} = 0$

$-P(a+r) - qa\cdot\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}F_D\cdot a + \frac{\sqrt{2}}{2}F_D\cdot 2a = 0$

$\Rightarrow F_D = 44.3N$

再整体受力分析

$\Sigma F_y = 0, \quad F_{Ay} + F_D\frac{\sqrt{2}}{2} = P + q\cdot 2a, \quad F_{Ay} = 48.7N$

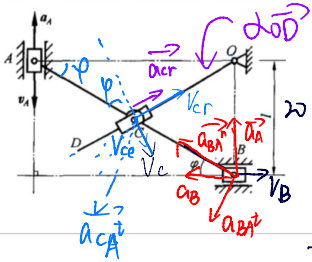
$\Sigma F_x = 0, \quad F_{Ax} = F_D\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 31.3N$

$\Sigma M_{(A)} = 0, \quad M_0 - M - a\cdot q\cdot 2a - P\cdot(3a+r) + F_D\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2a = 0, \quad M_0 = 141.3\ N\cdot m$

四、（20 分） 以下两题选做一题，余 1 题可限时结束后训练。

（一）平面机构如图所示，滑块 A、B 分别沿铅垂和水平滑槽滑动，AB 杆的中点 C 与一套筒铰接，此套筒可沿 OD 杆滑动。尺寸 AB = 40cm，l = 20cm，图示瞬时，φ=30°，v_A=60 cm/s，a_A=20cm/s²。求该瞬时杆 OD 的角速度和角加速度，铰接点 C 相对于 OD 杆的速度和加速度。

四.



图示瞬时杆AB瞬心在点O

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{OA} = \frac{60}{20\sqrt{3}} = \sqrt{3}\ rad/s$$

$$V_C = \omega_{AB} \cdot OC = 20\sqrt{3}\ cm/s$$

视C为动点，动坐标系固结于杆OD. $V_{cr} = 0\ m/s$.

$$\vec{V}_c = \underbrace{\vec{V}_{ce}}_{\omega_{OD} \cdot OC} + \underbrace{\vec{V}_{cr}}_{0} \Rightarrow \omega_{OD} = \sqrt{3}\ rad/s.$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^t + \vec{a}_{BA}^n \Rightarrow \omega_{AB}^2 \cdot AB \cdot \sin\varphi - \alpha_{AB} AB \cos\varphi + a_A = 0$$

	$\vec{a}_B$	$\vec{a}_A$	$\vec{a}_{BA}^t$	$\vec{a}_{BA}^n$
方向	✓	✓	✓	✓
大小	?	✓	$\alpha_{AB} \cdot AB$	$\omega_{AB}^2 \cdot AB$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_{AB} = \frac{4}{3}\sqrt{3}\ rad/s^2.$$

$$\vec{a}_c = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA}^t + \vec{a}_{CA}^n = \vec{a}_e^t + \vec{a}_e^n + \vec{a}_r + \vec{a}_c \text{（科氏加速度）}$$

	$\vec{a}_c$	$\vec{a}_A$	$\vec{a}_{CA}^t$	$\vec{a}_{CA}^n$	$\vec{a}_e^t$	$\vec{a}_e^n$	$\vec{a}_r$	$\vec{a}_c$
方向	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×
大小	✓	✓	$\alpha_{AB} \cdot AC$	$\omega_{AB}^2 \cdot AC$	$\alpha_{OD} \cdot OC$	$\omega_{OD}^2 \cdot OC$	?	0

$$-a_{CA}^n \cdot \cos\varphi + a_{CA}^t \cos 60^\circ - a_A \cos\varphi = a_{ce}^t$$

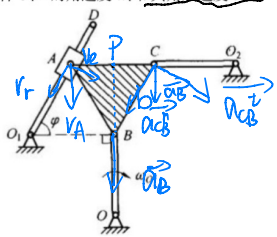
$$\Rightarrow \alpha_{OD} = -\frac{4}{3}\sqrt{3}\ m/s^2$$

$$a_{ce}^n + a_{cr} = -a_{CA}^t \cos 30^\circ - a_{CA}^n \cos 60^\circ + a_A \cos 60^\circ$$

$$a_{cr} = -120\ cm/s^2 = -1.2\ m/s^2$$

有点乱，方向大伙自己理一下.

（二）边长为 b 的等边三角形平板 ABC，其 A 点铰接一套筒；杆 $OB = O_2C = b$；在图示位置时，AC 边与杆 O_2C 皆处于水平位置，杆 OB 为铅垂位置，$\varphi=60°$，OB 的角速度为 ω_0，角加速度 $\alpha_0 = 0$，试求该瞬时，杆 O_1D 的角速度 ω_1 和其角加速度 α_1。



三角平板ABC速度瞬心为P点。

$$v_B = \omega_0 \cdot OB = \omega_0 b$$

$$\omega_{ABC} = \frac{v_B}{BP} = \frac{\omega_0 b}{\frac{\sqrt{3}}{2} b} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,\omega_0$$

$$v_A = \omega_{ABC} \cdot AP = \frac{\sqrt{3}}{3}\omega_0 b, \quad v_C = \frac{\sqrt{3}}{3}\omega_0 b.$$

以A为动点，将动坐标系固结于杆O_1D

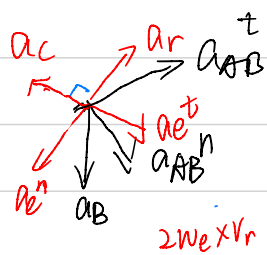
$$v_r = v_A \sin\varphi = \frac{\omega_0 b}{2} \quad v_e = v_A \cdot \cos\varphi = \omega_1 \cdot O_1A \Rightarrow \omega_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}\omega_0$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^t + \vec{a}_B^n = \omega_0^2 \cdot b$$

$$\underbrace{\alpha_0 \cdot OB}_{0} \quad \omega_0^2 \cdot OB$$

$$\vec{a}_C^t + \vec{a}_C^n = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^t + \vec{a}_{CB}^n$$

箭	✓	✓	✓	✓	✓
大小	?	$\frac{v_C^2}{b}$	✓	$\alpha_{ABC} \cdot b$	✓



$$a_{CB}^t \cdot \sin\varphi - a_{CB}^n \cos\varphi = a_C^n$$

$$\alpha_{ABC} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\omega_0^2.$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{AB}^t + \vec{a}_{AB}^n = \vec{a}_e^t + \vec{a}_e^n + \vec{a}_r + \vec{a}_C$$

箭	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
大小	$\omega_0^2 b$	$\alpha_{ABC} \cdot b$	$b \cdot \omega_{ABC}^2$	$\alpha_1 b$	$\omega_1^2 \cdot b$	?	$2\omega_1 \cdot v_r$

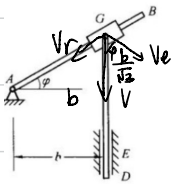
$$\alpha_1 b - 2\omega_1 v_r = b \cdot \omega_{ABC}^2 \cdot \cos 60° + \omega_0^2 b \cos 60° + \alpha_{ABC} \cdot b \cdot \cos 60°$$

$$\alpha_1 = \frac{7}{6}\sqrt{3}\,\omega_0^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 \quad (\text{顺时针})$$

五、（20 分）

图示机构位于铅垂平面内。已知均质杆 AB 和 GD 质量均为 m，长度均为 l，在杆套筒 G 的质量和各处摩擦。当杆 AB 由 $\varphi=30^\circ$ 处自由落到水平位置时，求：

1. 杆 AB 的角速度 ω；
2. 杆 AB 的角加速度 α；
3. 套筒 G 与杆 AB 间的作用力 F_N 的大小；
4. 铰链 A 处的水平约束力 F_{Ax} 的大小。



以G为动点，动坐标系固连于杆AB.

1. $T_1=0$，$T_2=\frac{1}{2}mV^2+\frac{1}{2}J\omega^2$，$J=\frac{1}{3}ml^2$

$W=mg\frac{l}{2}\sin\varphi+mg\frac{b}{\sqrt{3}}=\frac{1}{4}mgl+mg\frac{b}{\sqrt{3}}$

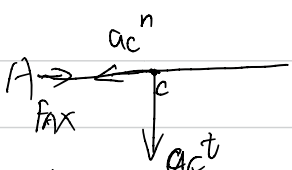
$V_e=\omega\frac{b}{\cos\varphi}$　$V\cdot\cos\varphi=V_e \Rightarrow V=\frac{\omega b}{\cos^2\varphi}=\omega b$

$T_2-T_1=W \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{3gl+4\sqrt{3}gb}{2(3b^2+l^2)}}$

$$\begin{cases}\frac{1}{3}ml^2\cdot\alpha=mg\frac{l}{2}-F_N\cdot b\\ mg+F_N'=ma,\quad F_N=F_N'\\ a=\alpha\cdot b\end{cases}$$

(2) $\alpha=\frac{3}{2}\frac{l+2b}{l^2+3b^2}g$

(3) $F_N=mb\alpha-mg$ 代入



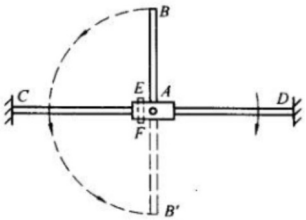
(4) 取杆AB.　$F_{Ax}=m\cdot(-a_C^n)$

$=-m\frac{1}{2}\omega^2 l$

六、（18 分）

均质杆 AB 长 l，质量为 m，A 端铰接一套筒，套筒质量亦为 m，并用销子 EF 将套筒锁在 CD 杆上。开始 AB 杆置于图中的最高铅垂位置，然后无初速地绕 A 点转动到铅垂最底位置 AB' 时，销子 EF 突然折断，此时套筒 A 可在光滑水平轴 CD 上自由滑动。当杆 AB 又达到水平位置时，求：

1. 套筒 A 运动的速度和杆 AB 的角速度；
2. 铰链 A 处的约束力。（销子质量不计，忽略销子折断时消耗的能量）

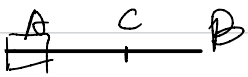


取在AB'位置时为第二位置

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\omega_1^2 - 0 = mgl \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{6g}{l}}$$

质心 $V_{C1} = \frac{l}{2}\cdot\omega_1 = \sqrt{\frac{3gl}{2}}$

当杆再次到达水平位置时



$$V_C = V_A + V_{CA}$$

$$V_{Cx} = V_A$$

$$V_C^2 = V_A^2 + \left(\frac{l}{2}\omega_2\right)^2$$

而水平方向无外力作用，动量守恒

则 $mV_{C1} = mV_A + mV_{Cx} = 2mV_A$.

$$V_A = \sqrt{\frac{3}{8}gl}$$

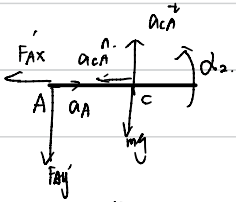
则杆从AB'再到水平时有

$$T_2 = \frac{1}{2}mV_A^2 + \frac{1}{2}mV_C^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}ml^2\cdot\omega_2^2$$

$$T_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\omega_1^2$$

$$W = -mg\cdot\frac{l}{2} \qquad T_2 - T_1 = W.$$

解得 $\omega = \omega_2 = \sqrt{\frac{3g}{4l}}$



$$ma_A = F_{Ax}$$

$$\vec{a_C} = \vec{a_A} + \vec{a_{CA}^t} + \vec{a_{CA}^n}$$

$$a_{Cx} = a_A - a_{CA}^n = a_A - \frac{l}{2}\omega_2^2$$

$$a_{Cy} = a_{CA}^t = \frac{l}{2}\alpha_2$$

$$ma_{Cx} = F'_{Ax}$$

$$ma_{Cy} = -F'_{Ay} - mg$$

$$\frac{1}{12}ml^2\alpha_2 = F'_{Ay}\cdot\frac{l}{2}$$

$$F_{Ax} = \frac{3}{16}mg \qquad F_{Ay} = \frac{1}{4}mg$$