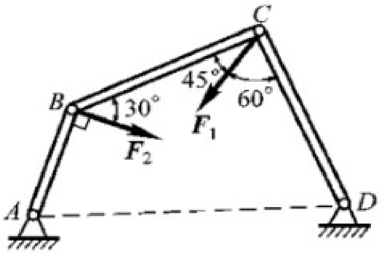
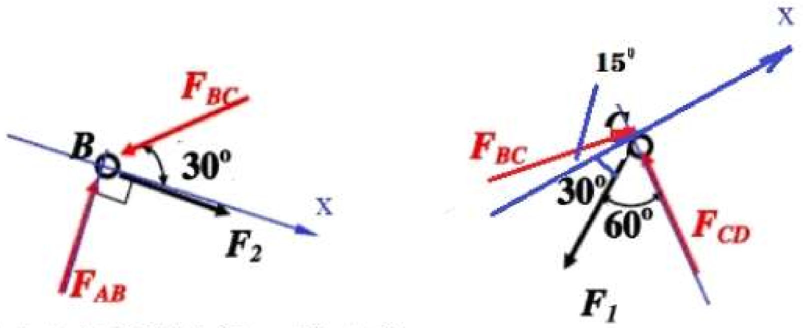
一、在四连杆机构的 *ABCD* 的铰链 *B* 和 *C* 上分别作用有力 F_1 和 F_2，机构在图示位置平衡（如图一）。试求二力 F_1 和 F_2 之间的关系。(8 分)



假设各杆受压，分别选取销钉 B 和 C 为研究对象，受力如图所示：



由共点力系平衡方程，对 B 点有：

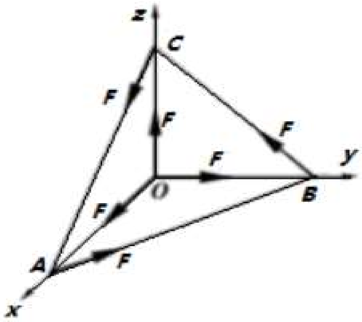
$$\sum F_x = 0 \qquad F_2 - F_{BC}\cos 30^\circ = 0 \qquad \text{（2分）}$$

对 C 点有：

$$\sum F_x = 0 \qquad F_{BC}\cos 15^\circ - F_1\cos 30^\circ = 0 \qquad \text{（4分）}$$

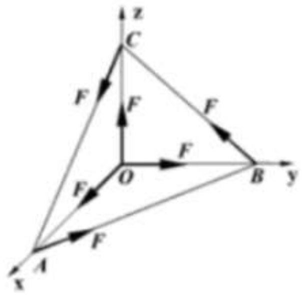
解以上二个方程可得：$F_1 = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{3}F_2$ 或 $F_1 \doteq 1.29F_2$ （2分）

二、空间力系如图二所示。直角坐标系 *O-xyz*，*ABC* 点分别在坐标轴 *x y z* 上，且 *OA* = *OB* = *OC* = *a*。问该力系是否可以简化为力螺旋，并给出理由。(8 分)



答：$F_R' = \sqrt{3}F$，，$M_O = aF\sqrt{3}/\sqrt{2}$ 最后简化结果为力螺旋 （2分）

解：$F_{Rx}' = \sum F_x = F$，　$F_{Ry}' = \sum F_y = F$，



$F_{Rz}' = \sum F_z = F$，　$F_R' = \sqrt{3}F$

$$\cos(F_R', i) = \frac{F_{Rx}'}{F_R'} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos(F_R', j) = \frac{F_{Ry}'}{F_R'} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos(F_R', k) = \frac{F_{Rz}'}{F_R'} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$M_x = \frac{1}{\sqrt{2}}aF,\quad M_y = \frac{1}{\sqrt{2}}aF,\quad M_z = \frac{1}{\sqrt{2}}aF,\qquad M_o = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}aF$$

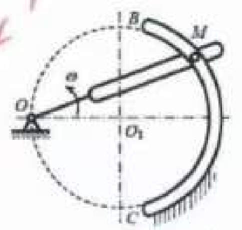
$$\cos(M_o, i) = \frac{M_x}{M_o} = \frac{1}{\sqrt{3}}\qquad \cos(M_o, j) = \frac{M_y}{M_o} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos(M_o, k) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$ （4分）

主矢 F_R' 与主矩 M_O 平行，所以力系最终简化结果为力螺旋。 （2分）

本题得分________

三、图示摇杆滑道机构中的滑块 M 同时在固定的圆弧槽 BC 和摇杆 OA 的滑道中滑动。如弧 BC 的半径为 R，摇杆 OA 的轴 O 在弧 BC 的圆周上。摇杆绕 O 轴以等角速度转动，当运动开始时，摇杆在水平位置。用直角坐标法给出点 M 的运动方程,速度和加速度。（8 分）



解法①：以 O 为原点

$$\begin{cases} x_M = 2R\cos^2(\omega t) \\ y_M = 2R\cos(\omega t)\sin(\omega t) \end{cases}$$ 4'

$$\begin{cases} v_x = -4R\omega\sin\omega t\cos\omega t \\ v_y = 2R\omega(\cos^2\omega t - \sin^2\omega t) \end{cases}$$ 2'

$$\begin{cases} a_x = -4R\omega^2(\cos^2\omega t - \sin^2\omega t) \\ a_y = -8R\omega^2\cos\omega t\sin\omega t \end{cases}$$ 2'

解法②：以 O_1 为原点

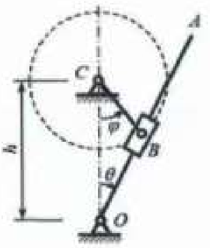
$$\begin{cases} x_M = R\cdot\cos 2\omega t \\ y_M = R\sin 2\omega t \end{cases}$$ 4'

$$\begin{cases} v_x = -2\omega R\cdot\sin 2\omega t \\ v_y = 2\omega R\cdot\cos 2\omega t \end{cases}$$ 2'

$$\begin{cases} a_x = -4\omega^2 R\cdot\cos 2\omega t \\ a_y = -4\omega^2 R\cdot\sin 2\omega t \end{cases}$$ 2'

本题得分______

四、如图所示，曲柄CB 以等角速度 ω_0 绕C 轴转动，其转动方程为 $\phi = \omega_0 t$。滑块B 带动摇杆 OA 绕O 转动。设 OC=h，CB=r。求摇杆的转动方程(转角随时间变化的方程)。(8分)



解法①：

$$OB = \sqrt{r^2 + h^2 - 2hr\cos\varphi} \quad 2'$$

$$\frac{OB}{\sin\varphi} = \frac{CB}{\sin\theta} \quad 4'$$

$$\theta = \arcsin\theta \ \frac{r\sin\varphi}{\sqrt{r^2+h^2-2hr\cos\varphi}} \quad 2'$$

解法②：

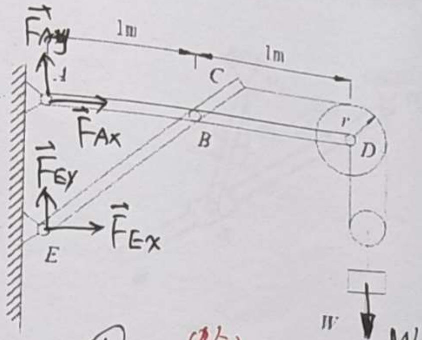
$$\frac{BC}{\sin\theta} = \frac{OC}{\sin\angle OBC} \quad 4'$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{r\sin\omega t}{h - r\cos\omega t} \quad 4'$$

写出 $v_e = v_a \cdot \sin(\varphi+\theta)$ 给 2' 分

本题得分________

五、铰链支架由 AD，CE 两杆和半径 r=15cm 的滑轮组成，B 处是铰链连接，尺寸如图所示。在滑轮上吊有 W=1kN 的重物。不计各杆及滑轮自重，求固定支座 A 和 E 的约束反力。(17 分)



解：取整体，画受力图，列平衡方程

$\Sigma F_x=0$，$F_{Ax}+F_{Ex}=0$ ① (4分)

$\Sigma F_y=0$，$F_{Ay}+F_{Ey}-W=0$ ② (4分)

$\Sigma M_A=0$，$F_{Ex}\cdot 1-W\cdot(2+\frac{r}{2})=0$ ③ (4分)

得 $F_{Ex}=2075N$；$F_{Ax}=-2075N$

取 EC 杆，列平衡方程

$\Sigma M_B=0$，$F_{Ex}\cdot 1-F_{Ey}\cdot 1-\frac{W}{2}\cdot r=0$ …… ④ (4分)

得 $F_{Ey}=2000N$.

代入② 得 $F_{Ay}=-1000N$. (1分)

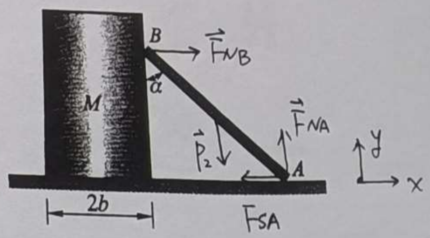
密

封

线

本题得分________

六、如图所示，均质棱柱体M，重量为P_1，宽为$2b$，置于水平地面。均质杆AB，重量为P_2，长度为$2l$，倾斜靠在棱柱体的侧面，其倾斜角为α。设杆与地面之间的静摩擦因数为f_{s1}，棱柱体与地面的静摩擦因数为f_{s2}，杆与棱柱体之间的摩擦忽略不计。问为了使整个系统保持平衡，角度α应满足什么条件？（17分）



解：(i) 取杆AB，画受力图，列平衡方程。

$\Sigma F_x=0,\ F_{NB}=F_{SA}$ ① (2分)

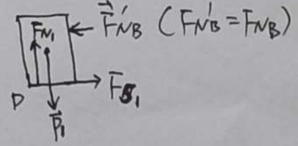
$\Sigma F_y=0,\ P_2=F_{NA}$ ② (2分)

$\Sigma M_A=0,\ F_{NB}\,2l\cos\alpha=P_2\,l\sin\alpha$ ③ (2分)

摩擦力F_{SA}小于最大静摩擦力.

$F_{SA}\le f_{s1}\cdot F_{NA}$ ④ (2分)

由①②③④得 $\alpha\le \mathrm{arctg}(2f_{s1})$



(ii) 取柱体M，画受力图，列平衡方程.

$\Sigma F_x=0,\ F_{NB}=F_{s1}$ …… ⑤ (2分)

$\Sigma F_y=0,\ P_1=F_{N1}$ ⑥ (2分)

摩擦力F_{s1}小于最大静摩擦力. ⑦ (2分)

$F_{s1}\le f_{s2}F_{N1}$

由⑤⑥⑦代入③，得 $\alpha\le \mathrm{arctg}\left(\frac{2P_1}{P_2}f_{s2}\right)$

F_{N1}的作用点在左下角D的右边，对D求力矩，

有 $F_{NB}\cdot 2l\cos\alpha\le P_1 b$ ⑧ (2分)

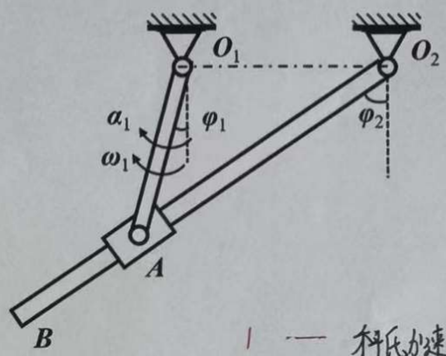
由⑧和③，得 $\alpha\le \arcsin\left(\frac{P_1 b}{P_2 l}\right)$ (1分)

综上，$\alpha\le \mathrm{arctg}(2f_{s1})$ 且 $\alpha\le \mathrm{arctg}\left(\frac{2P_1}{P_2}f_{s2}\right)$ 且 $\alpha\le \arcsin\left(\frac{P_1 b}{P_2 l}\right)$

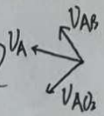
七

计算题一：

图示平面机构中，曲柄 O_1A 在图示平面内绕 O_1 轴转动，通过滑块 A 使杆 O_2B 绕 O_2 轴转动。设 $O_1O_2 = O_1A = L = 0.4$ m，当 $\varphi_1 = 30°$，$\varphi_2 = 60°$时，$\omega_1 = 2$ rad/s，$\alpha_1 = 3$ rad/s^2。试求此瞬时杆 O_2B 的角速度和角加速度 。



①



2 ······ $\vec{v}_A = \vec{v}_{AB} + \vec{v}_{AO_2}$.

1 ···· $v_A = \omega_1 \cdot Aa = 0.8\,m/s$.

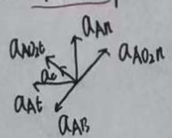
1 ···· $v_{AB} = v_A \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi_2) = 0.4\sqrt{3}\,m/s$

1 ··— $\omega_{O_2B} = \frac{v_{AB}}{AO_2} = 1\,rad/s$.

1 ··— 方向为顺时针

共6分

②



加速度有如下关系.

3 ···· $\vec{a}_{At} + \vec{a}_{An} = \vec{a}_{AB} + \vec{a}_{AO_2n} + \vec{a}_{AO_2t} + \vec{a}_c$

A点的加速度.

1 ···· $a_{At} = \alpha_1 \cdot O_1A = 1.2\,m/s^2$.

1 ··— $a_{An} = \omega_1^2 \cdot O_1A = 1.6\,m/s^2$.

沿 $\vec{a}_{AO_2t}$ 方向投影.

2 ····— $a_{At} \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi_2) + a_{An} \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi_2) = a_{AO_2t} + a_c$

1 ···· 所以 $a_{AO_2t} = 0.6\sqrt{3}\,m/s^2$

1 ··— 科氏加速度 $a_c = 0.8\,m/s^2$

所以

1 ··— $\alpha_{O_2B} = \frac{a_{AO_2t}}{O_2A} = 1.5\,rad/s^2$.

1 ··— 方向为顺时针

共11分

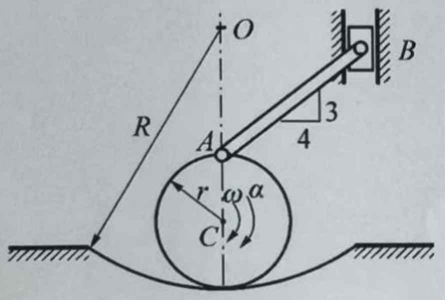
八

计算题二：

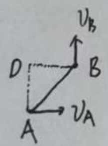
已知轮 C 沿固定圆弧轨道作纯滚动，滑块 B 沿竖直滑道滑动，r=5 cm，R=20 cm，AB=12.5 cm。 在图示位置时，点 A 位于轮缘的最高点，轮的角速度ω= 3 rad/s，角加速度α = 5 rad/s^2。

求：1）该瞬时杆 AB 的角速度与滑块 B 的速度；

2）该瞬时杆 AB 的角加速度与滑块 B 的加速度。



(1)



1 …… C点的速度 $v_C = \omega r = 0.15\,m/s$.

1 …… A点的速度 $v_A = \omega r + v_C = 0.3\,m/s$.

1 …… AB的角速度. $\omega_{AB} = \frac{v_A}{AD} = \frac{0.3}{0.075} = 4\,rad/s$.

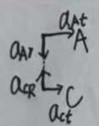
1 …… 方向为逆时针。

1 …… B点的速度 $v_B = \omega_{AB} \cdot BD = 0.4\,m/s$.

1 …… 方向竖直向上。

第(1)问.总6

(2)



从轮的加速度关系可以得到.

1 …… $\vec{a}_{Ar} + \vec{a}_{At} = \vec{a}_{cR} + \vec{a}_{ct} + \vec{a}_{Acr} + \vec{a}_{ACt}$.

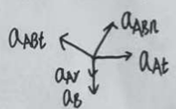
1 …… 因此. $a_{At} = a_{ct} + \alpha r = 0.5\,m/s^2$

$a_{Ar} = a_{cR} - \omega^2 r = -0.3\,m/s^2$

1 …… 方向分别为水平向右和竖直向下.

以B为基点分析A的加速度，从杆AB的加速度关系可以得到.

1 …… $\vec{a}_{At} + \vec{a}_{Ar} = \vec{a}_B + \vec{a}_{ABt} + \vec{a}_{ABn}$



1 …… 法向加速度 $a_{ABn} = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 2\,m/s^2$.

沿 a_{ABn} 方向投影,

1 …… $a_{At} = a_{ABn}\cos\theta - a_{ABt}\sin\theta$,

所以 $a_{ABt} = \frac{a_{ABn}\cos\theta - a_{At}}{\sin\theta} = \frac{11}{6}\,m/s^2$

1 …… 所以杆AB的角加速度. $\alpha_{AB} = \frac{a_{ABt}}{AB} = \frac{44}{3}\,rad/s$

1 …… 方向为顺时针.

将加速度沿 a_{ABn}方向投影.

1 …… $a_{At}\cos\theta - a_{Ar}\sin\theta = a_{ABn} - a_B\sin\theta$.

1 …… 所以 $a_B = 2.967\,m/s^2$

1 …… 方向竖直向下。

第(2)问.总11