No.

Date

理论力学

绪论

1.理论力学是研究物体机械运动一般规律的科学。只研究古典力学。

机械运动：物体在空间的位置随时间的改变

2、三个部分

·静力学 —— 研究物体在力系作用下平衡规律的科学。

·运动学 —— 研究物体运动的几何性质的科学。

·动力学 —— 研究物体的机械运动与作用力之间关系的科学。

静力学

引言

1.刚体：在力的作用下，其内部任意两点之间的距离始终保持不变的物体

否则：变形体

2.物体的"平衡"：物体中各质点相对于惯性参考系静止或做匀速直线运动

3.力的三要素：力的大小、方向和作用点

4.力系：作用于物体上的力的集合

平衡力系：力系作用于物体上使其保持平衡状态

等效力系：两个力系作用于物体的效果相同

No.

Date

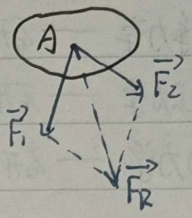
第一章 静力学公理和物体的受力分析

§1-1 静力学公理

公理1 力的平行四边形法则 —对任何物体都适用

作用在物体上同一点的两个力可以合成为一个合力。合力矢等于两个力矢的矢量和。$\vec{F_R}=\vec{F_1}+\vec{F_2}$

公理2 二力平衡条件



作用在同一刚体上的两个力使刚体保持平衡

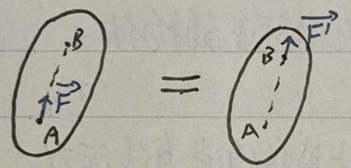
⟺ 这两个力:等大、反向、共线

公理3 加减平衡力系原理

在任一原有力系上加上或减去任意的平衡力系，与原力系对刚体的作用效果等效。

推理1 力的可传性

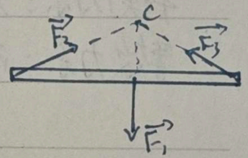
作用于刚体上某点的力，可以沿着它的作用线移到刚体内的任一点，作用效果不变。



⇒作用于$\boxed{刚体}$上的力的三要素:力的大小、方向和作用线

作用于刚体上的力矢可以沿着其作用线移动，这种矢量称为滑动矢量

推理2 三力平衡汇交定理



刚体在三个力作用下平衡，若其中两个力的作用线交于一点，则:

第三个力的作用线必通过此交点，且这三力共面

公理4 作用和反作用定律

作用力与反作用力:同时存在同时消失，$\underbrace{\text{等大反向}}_{\text{画受力图时注意}}$共线，作用在两个相互作用的物体上

公理5 刚化原理

变形体在某一力系作用下处于平衡状态，如将此变形体刚化为刚体，其平衡状态不变

即:刚体的平衡条件是变形体平衡的必要非充分条件

注:画力图，不能用两个分力表示的原则:

二力平衡(二力杆)、三力平衡汇交定理、力偶只能与力偶平衡

Campus

§1-2 约束和约束力

自由体：位移不受限制的物体　　非自由体：位移受到限制的物体

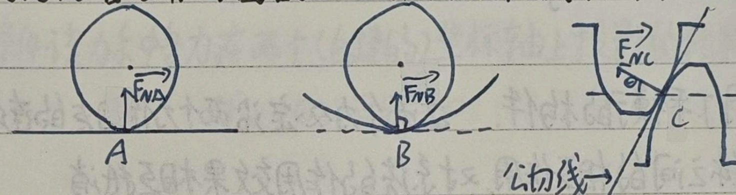
约束：对非自由体的某些位移起限制作用的周围物体

约束力：约束对物体的作用 { 大小：待定，由主动力决定，由平衡方程求出　主动力：除约束力的力
方向：与该约束所能够阻碍的位移方向相反
作用点：接触处

常见约束类型

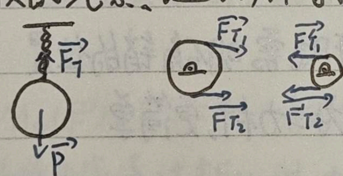
1. 具有光滑接触表面的约束

约束力方向沿着接触表面的公法线，并指向被约束的物体 ⇒ 称为法向约束力



2. 柔索约束

由柔软的绳索、链条或带等构成的约束，它们只能承受拉力

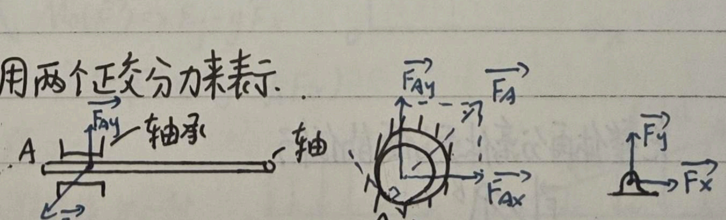


3. 光滑铰链约束

特点：只限制两物体径向的相对移动，而不限制两物体绕铰链中心的相对转动和沿轴向的位移

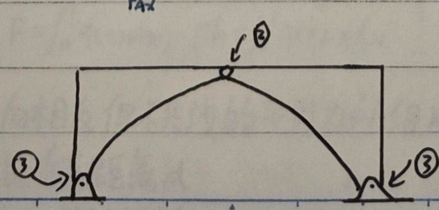
此类约束的约束力一般可用两个正交分力来表示.

分类 ① 向心轴承（径向轴承）



② 圆柱铰链

③ 固定铰链支座



No.

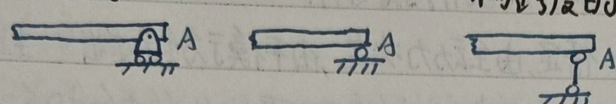
Date

4. 滚动支座（滚轴支座）

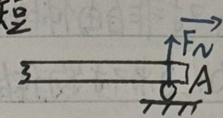
组成：固定铰链支座 + 滚轴 + 光滑支承面

特点：可以沿支承面移动，允许由于温度变化而引起结构跨度的自由伸长或缩短

简图：



约束力：



§1-3 物体的受力分析

受力分析：确定物体所受哪些力，及其作用位置和方向。

力 { 主动力：一般是已知的，eg. 重力、风力、气体的压力
　 { 被动力：约束力

二力杆：只在两个力作用下平衡的构件。 这两个力必定沿两个力作用点的连线，且等值、反向

内力：系统内部各物体之间的相互作用，对系统的作用效果相互抵消

对物体进行受力分析、画受力图的步骤：先分离体再整体；先主动力再约束力

注：①先观察有无二力杆

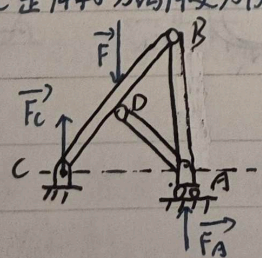
②当铰链连接有三个或以上构件将铰链连分开时，需明确销的位置

③尽量不要让铰链在二力杆上，要让二力杆成为二力杆，更简单

④系统内力不画

⑤作用力与反作用力的画法要对应。

先整体再分离体更方便的例子



Campus 整体分析可确定 $\vec{F}_C$ 方向

第二章 平面力系

平面力系：力系中各力的作用线在同一平面内.

分类：平面汇交(共点)力系、平面力偶系、平面平行力系、平面任意力系.

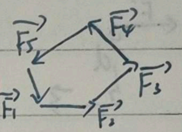
§2-1 平面汇交力系

指各力的作用线都在同一平面内且交于一点的力系

特点：平面汇交力系可合成为一合力,其大小方向等于各分力的矢量和,作用线通过汇交点,即

$\vec{F_R}=\sum_i \vec{F_i}$

平衡条件：该力系的合力为零,即 $\vec{F_R}=\sum_i \vec{F_i}=\vec{0}$



· 几何条件该力系的力多边形是封闭的(注:只对汇交力系成立)

· 解析条件该力系中各力在两个(自建的)坐标轴上投影的代数和分别为零.即平衡方程：

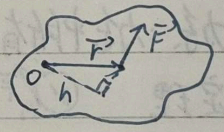
$\sum F_x=0,\ \sum F_y=0$

§2-2 平面力对点之矩 · 平面力偶

刚体的运动状态包括移动与转动 $\begin{cases}\text{力矢：度量力对刚体的移动效应}\\\text{力矩：度量力对刚体的转动效应}\end{cases}$

1.力矩

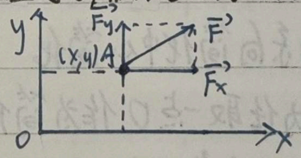
$M_O(\vec{F})=\vec{r}\times\vec{F}$ 一般力矩与矩心的选择有关



当力的作用线通过矩心时,力臂为0,力矩为0

合力矩定理：平面任意力系的合力对平面内任一点的矩等于所有各分力对该点的矩的代数和

$M_O(\vec{F_R})=\sum_i M_O(\vec{F_i})$



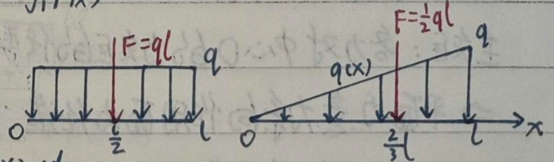
平面内力矩的解析表达式 $M_O(\vec{F})=x\overset{逆}{F_y}-y\overset{顺}{F_x}$

$\Rightarrow M_O(\vec{F_R})=\sum_i M_O(\vec{F_i})=\sum_i(x_iF_{iy}-y_iF_{ix})$

均布载荷：合力 $F=ql$ 作用线 $x=\frac{1}{2}l$

三角形分布载荷：合力 $F=\frac{1}{2}ql$ 作用线 $x=\frac{2}{3}l$

求法：$F=\int_0^l q(x)dx,\ Fh=\int_0^l q(x)\cdot x dx$



2.力偶与力偶矩

力偶：由两个大小相等、方向相反但不共线的平行力所组成的力系.记作$(\vec{F},\vec{F'})$

力偶臂：力偶的两力之间的垂直距离d

力偶不能合成为一个力或用一个力等效替换,力偶也不能用一个力来平衡 ⇒ 力偶只能用力偶来平衡

力和力偶是静力学的两个基本要素

平面力偶矩：$M=\pm F\cdot d$　　其中d为力偶臂；力偶使物体逆时针转向为正号

同平面内力偶的等效定理：

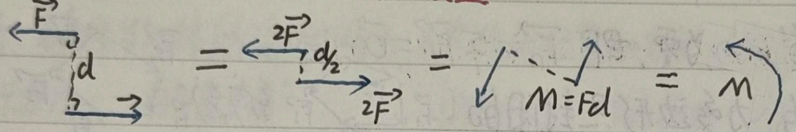
同平面内的两个力偶，如果力偶矩相等，则两力偶彼此等效

推论：1. 力偶对平面内任一点取矩都等于力偶矩，不因矩心的改变而改变

2. 任一力偶可在其作用面内任意转移而不改变它对刚体的作用

3. 只要保持力偶矩不变，可以同时改变力偶中的F与d，而对刚体的作用效果不变

⇒ 力偶矩是平面力偶作用的唯一度量



3. 平面力偶系的合成和平衡条件

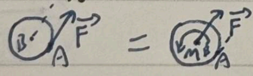
合力偶：同一平面内的任意个力偶可以合成为一合力偶，合力偶矩等于各力偶矩代数和

$$M=\sum_i M_i$$

平面力偶系平衡 ⟺ 合力偶矩为零，即 $M=\sum_i M_i=0$

§2-3 平面任意力系的简化

平面任意力系：力系中所有力(偶)的作用线(面)都处于同一平面内且任意分布

1. 力的平移定理 

作用在刚体上点A的力$\vec{F}$，可以平移至其上任一点B，加以一附加力偶，其矩为$M=M_B(\vec{F})$

2. 平面任意力系向简化中心简化

设刚体上有一n个力形成的平面任意力系，在此平面内任选一点O作为简化中心，

主矢：平面任意力系中各力的矢量和$\vec{F_R'}$，与简化中心无关

主矩：各力对中心O的力矩的代数和M_O，与简化中心有关

⇒ 平面任意力系向作用面内任选一点O简化：可得到一力和一力偶

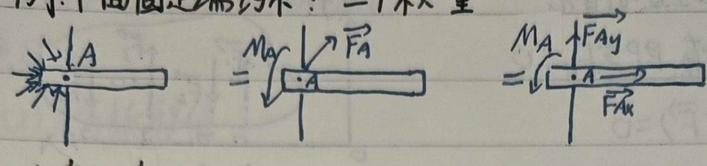
力即为主矢，作用线通过点O；力偶的力偶矩即为主矩

注：主矢和主矩的求法

主矢：解析法：先求$\sum_i F_{ix}$、$\sum_i F_{iy}$，于是$F_R'=\sqrt{(\sum_i F_{ix})^2+(\sum_i F_{iy})^2}$，$\cos(\vec{F_R'},\vec{i})=\frac{\sum F_{ix}}{F_R'}$

主矩：$M_O=\sum_i M_O(\vec{F_i})=\sum_i \vec{r_i}\times\vec{F_i}+\sum_j M_j$

例：平面固定端约束：三个未知量



3.平面任意力系(*)的简化结果分析

① (*) ⟹ 一个合力偶 $\vec{F_R'}=\vec{0}$，$M_O\neq 0$

此时原力系合成为一力偶，主矩与简化中心的选取无关

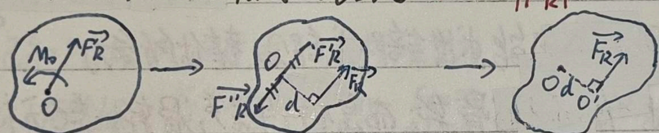
② (*) ⟹ 一个合力 $\vec{F_R'}\neq\vec{0}$，$M_O=0$

此时原力系合成为一作用线过简化中心的合力

③ $\vec{F_R'}\neq\vec{0}$，$M_O\neq 0$

此时原力系合成为一作用线不过简化中心的合力

简化中心到合力作用线的距离 $d=\dfrac{M_O}{|F_R|}$



将M_O用力偶代替　选取合适的d,使$F_R'=F_R''$　相当于$\vec{F_R'}$平移至$\vec{F_R}$

④ (*) ⟹ 平衡 $\vec{F_R'}=\vec{0}$，$M_O=0$

§2-4 平面任意力系的平衡条件和平衡方程

平衡条件：平面任意力系平衡 ⟺ 力系的主矢和对任一点的主矩都为零，即 $\vec{F_R'}=\vec{0}$，$M_O=0$

平衡方程：形式一：$\Sigma F_x=0$　$\Sigma F_y=0$　$\Sigma M_O(F_i)=0$

力系中各力在两个任选的坐标轴(一般选成正交)上投影的代数和分别为0，

各力对任选一点的矩的代数和也为0

形式二：$\Sigma F_x=0$　$\Sigma M_A(\vec{F})=0$　$\Sigma M_B(\vec{F})=0$

A.B为两选定矩心，要求 x轴不得垂直于A.B连线

形式三：$\Sigma M_A(\vec{F})=0$　$\Sigma M_B(\vec{F})=0$　$\Sigma M_C(\vec{F})=0$

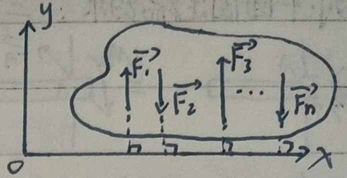
A.B.C为三选定矩心，要求A.B.C三点不共线

No.

Date

平面平行力系：平面力系的作用线互相平行的情况

平衡方程：假设各力均与 x 轴垂直，即 $\sum F_x \equiv 0$



形式一：$\sum F_y = 0$ $\sum M_o(\vec{F}) = 0$

形式二：$\sum M_A(\vec{F}) = 0$ $\sum M_B(\vec{F}) = 0$

A、B为两选定矩心，要求A、B连线不与力的作用线平行

§2-5 物体系的平衡

静定问题：系统中的未知量数目等于可列出的独立平衡方程的数目

超静定问题：大于

力系	平面任意力系	平面汇交力系	平面平行力系	平面力偶系
可以求解的未知量数目	3	2	2	1

附加：力偶只能由力偶平衡

分析方法的总结：1、一般先分析整体，可能求出全部（或部分）整体所受力

2 取分离体时，一般不拆滑轮，而是杆件带着滑轮一起分析

3、列方程时，若列 $\sum M_o(\vec{F}) = 0$，一般把有较多未知力作用的点作为矩心、

4、投影轴 x、y 尽量与较多未知力相垂直

§2-6 平面简单桁架的内力计算

一、平面简单（静定）桁架

1.理想桁架：满足以下简化假设的桁架

(1) 桁架中各杆件都是直杆，各杆轴线均位于同一平面内，且通过该杆两端的铰链（节点）的中心

(2) 桁架中各杆件在两端均为光滑铰链连接，没有力偶，不抗弯

(3) 桁架所受的力（载荷）都作用在节点上；桁架杆件重力略去不计，或平均分配在其两端的节点上

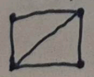
⇒ 理想桁架的杆件均为二力杆

2、简单（静定）桁架：用平衡方程可求出各杆件内力的桁架

设平面桁架的总杆件数 m，总节点数 n（支座也属于节点），则

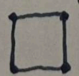
注：以三角形框架为基本结构的桁架是静定的

$m = 2n-3$ 平面简单（静定）桁架



$m > 2n-3$ 平面复杂（超静定）桁架

$m < 2n-3$ 非桁架



Campus

No.

Date

二、计算简单桁架内力的两种方法

1.节点法

(1) 先分析整体

(2) 有先后顺序地逐个地取节点(即销钉)为研究对象来单独分析

每个节点都受平面共点力系的作用,可列出两个平衡方程

2.截面法

如果只想计算某几个杆件的内心,可选取一适当截面,假想地把桁架截开,考虑任何一部分的平衡,可求出这些被截杆件的内力.

注: 1.采取截面法时选择适当的力矩方程,通常可以较快地求得某些指定杆的内力

2.取截面时最多只截断三根内力未知的杆,因为平面任意力系只有三个独立的平衡方程

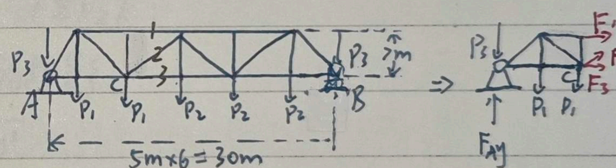
eg.如图,已知 P_1、P_2、P_3,尺寸,求1.2.3杆所受力

① 先分析整体, $\Sigma M_A=0 \rightarrow F_{By}$, $F_{Bx}=0$

$\Sigma F_y=0 \rightarrow F_{Ay}$, $F_{Ax}=0$

② 从1.2.3杆处截取左边部分分析

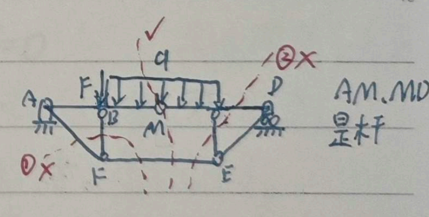
$\Sigma F_y=0 \rightarrow F_2$ $\quad \Sigma M_c=0 \rightarrow F_1$ $\quad \Sigma F_x=0 \rightarrow F_3$



取截面时的注意事项

① 不能围绕一个节点取截面,否则得出的就是节点方程

② 不能从非二力杆处截开,否则截断处力为平面任意力



No.

Date

第三章 空间力系

空间力系：力系中各力的作用线不在同一平面内

分类：空间汇交力系、空间力偶系、空间平行力系、空间任意力系

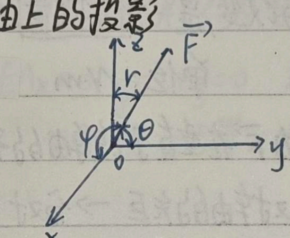
§3-1 空间汇交力系

指各力的作用线汇交于一点的空间力系

一、力在空间直角坐标轴上的投影

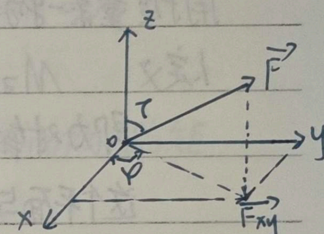
1. 直接（一次）投影法

$$\begin{cases} F_x = F\cos\varphi \\ F_y = F\cos\theta \\ F_z = F\cos\gamma \end{cases}$$



2. 间接（二次）投影法

$$\begin{cases} F_z = F\cos\gamma \\ F_x = F\sin\gamma\cos\varphi \\ F_y = F\sin\gamma\sin\varphi \end{cases}$$



二、空间汇交力系的合力与平衡

1. 空间汇交力系的合力等于各分力的矢量和，合力作用线通过汇交点.

$$\vec{F_R} = \Sigma\vec{F_i} = \Sigma F_x\vec{i} + \Sigma F_y\vec{j} + \Sigma F_z\vec{k}$$

其中 F_x、F_y、F_z 为各分力 $\vec{F}$ 在 x、y、z 轴上的投影

解析法 $\begin{cases} \text{合力的大小} \quad F_R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2 + (\Sigma F_z)^2} \\ \text{合力的方向} \quad \cos(\vec{F_R}, \vec{i}) = \dfrac{\Sigma F_x}{F_R} \quad \cdots \end{cases}$

2. 空间汇交力系平衡 <=> 力系的合力为零，即 $\vec{F_R} = \Sigma\vec{F_i} = 0$

平衡方程：$\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0, \Sigma F_z = 0$

§3-2 力对点的矩与力对轴的矩

一、空间力对点的矩 —— 力矩矢

1. 定义：力对点的矩等于矩心（即取矩点）到该力的作用点的矢径 $\vec{r}$ 与该力 $\vec{F}$ 的矢积

$$\vec{M_O}(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

若在空间直角坐标系 O - xyz 中，力的作用点 A(x, y, z)，有 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$，

$$\vec{M_O}(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \underbrace{(yF_z - zF_y)}_{[\vec{M_O}(\vec{F})]_x}\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}$$

No.

Date

2.性质 ①力沿其作用线移动,不改变它对一点的矩 (力是滑动矢量)

②力矢的作用线过矩心时,力矩为零

☆③力矩矢的始端必须在矩心,不可移动 (力矩矢是定位矢量)

由于力矩矢 $\vec{M_A}(\vec{F})$ 与A点的选取有关

二、空间力对轴的矩

用于度量某一物体绕某轴的转动状态的改变,是一个$\boxed{\text{代数量}}$ 只有大小和正负

1.定义 $M_z(\vec{F})=M_O(\vec{F_{xy}})=\pm F_{xy}\cdot h$ 单位: N·m

即力对轴的矩的绝对值等于该力$\vec{F}$在垂直于该轴z的平面Oxy上的投影$\vec{F_{xy}}$对于这个平面与该轴交点的矩的大小(力对轴的矩 → 分力对交点的矩);正负:右手螺旋法则

2、性质

☆①当力的作用线与轴处于同一平面内时,力对轴的矩为零 1.力与轴相交 2.力与轴平行

②空间力对点的矩矢在过该点的某轴上的投影,等于力对该轴的矩,即 $[\vec{M_O}(\vec{F})]_z=M_z(\vec{F})$

$\vec{M_O}(\vec{F})=M_x(\vec{F})\vec{i}+M_y(\vec{F})\vec{j}+M_z(\vec{F})\vec{k}$, 其中点O为xyz三轴的交点

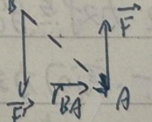
提供了计算空间力对一点的矩的简单方法

§3-3 空间力偶

1.空间力偶矩 用于度量力偶使物体转动的效果

等于力偶中任一力作用线上的一点到另一力作用线上的一点的矢径$\vec{r}$与后一力$\vec{F}$的矢积

$\vec{M}=\vec{r_{BA}}\times\vec{F}$ 注:不用管什么后一力,方向用右手螺旋确定



2、空间力偶的性质:

①力偶在任意轴上的投影为零(是两力投影的代数和) 列ΣF=0时不必考虑力偶

②力偶只能由力偶平衡

③力偶对任意点取的矩都相等,力偶矩与矩心无关 => 力偶矩矢是自由矢量

④只要保持力偶矩不变,力偶可以在其作用面内,或与之平行的任意平面内,任意移转或同时改变力偶中力的大小和力偶臂的长短,不改变其对刚体的作用效果.

=> 因此在受力图上,力偶矩可以直接用M表示,且无需强调具体位置;而力矩要通过力来体现

Campus

3.空间力偶系的合成与平衡

① 合力偶矩矢等于各分力偶矩矢的矢量和 $\vec{M}=\sum\vec{M_i}=\vec{M_1}+\vec{M_2}+\cdots+\vec{M_n}$

解析法：合力偶矩矢的大小：$M=\sqrt{(\sum M_x)^2+(\sum M_y)^2+(\sum M_z)^2}$

方向：$\cos\alpha=\frac{\sum M_x}{M}$，$\cos\beta=\frac{\sum M_y}{M}$，$\cos\gamma=\frac{\sum M_z}{M}$

作用点：任意（力偶矩矢是自由矢量）

② 平衡条件：空间力偶系平衡 $\Leftrightarrow$ 合力偶矩矢等于零 $\vec{M}=\sum\vec{M_i}=0$

平衡方程：$\sum M_x=0$ $\sum M_y=0$ $\sum M_z=0$

注：力偶矩的计算不要拘泥于用力偶臂×力，其本质仍是力矩，可以分别求两个力矢的矩

4.矢量的类型

	定位矢量	滑移矢量	自由矢量
特点	大小方向作用点均固定	保持大小、方向不变 可以沿着作用线移动	保持大小、方向不变 作用点可以任意移动
例子	作用于非刚体的力 空间力对一点的矩	作用在刚体上的力	空间力偶矩矢

§3-4 空间任意力系

空间任意力系：空间力系中各力（偶）的作用线（面）在空间任意分布

一、空间任意力系向简化中心简化

主矢：空间任意力系中各力的$\boxed{\text{矢量和}}$ $\vec{F_R'}$，与简化中心无关 $\vec{F_R'}=\sum\vec{F_i}=\sum F_x\vec{i}+\sum F_y\vec{j}+\sum F_z\vec{k}$

主矩：各力对中心O的力矩矢的$\boxed{\text{矢量和}}$ $\vec{M_O}$，与简化中心有关 $\vec{M_O}=\sum\vec{M_i}=\sum\vec{M_O}(\vec{F_i})$

$\Rightarrow$ 空间任意力系向空间任选一点O简化，可得到一力和一力偶 $=\sum M_x(\vec{F})\vec{i}+\sum M_y(\vec{F})\vec{j}+\sum M_z(\vec{F})\vec{k}$

力即为主矢，作用线过点O；力偶的矩矢即为主矩

注：主矢和主矩的求法：均用解析法，即 $F_{Rx}'=?$，$F_{Ry}'=?$，$F_{Rz}'=?$ $\Rightarrow \vec{F_R'}=?$

$M_{Ox}=?$，$M_{Oy}=?$，$M_{Oz}=?$ $\Rightarrow \vec{M_O}=?$

No.

Date

二、空间任意力系(*)的简化结果分析

1.(*) ⇒ 一个合力偶 $\vec{F_R'}=0, \vec{M_O}\neq0$

此时原力系合成为一个力偶，主矩与简化中心无关

2.(*) ⇒ 一个合力 $\vec{F_R'}\neq0, \vec{M_O}=0$

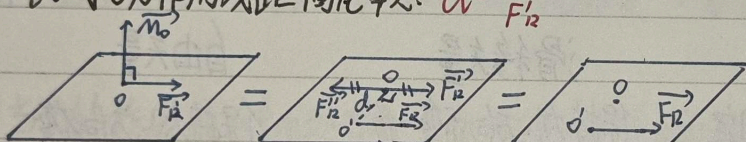
此时原力系合成为一个过简化中心O的合力

注：主矩可能只是对该简化中心O为零.

3. $\vec{F_R'}\neq0, \vec{M_O}\neq0$

① $\vec{F_R'}\neq0, \vec{M_O}\neq0$ 且 $\vec{F_R'}\perp\vec{M_O}$ ⇒ 一个合力

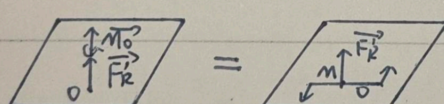
此时合力作用线距简化中心 $d=\frac{|\vec{M_O}|}{F_R'}$



② $\vec{F_R'}\neq0, \vec{M_O}\neq0$ 且 $\vec{F_R'}\parallel\vec{M_O}$ ⇒ 中心轴过简化中心的力螺旋

力螺旋：由一个力偶和一个与其作用面垂直的力组成的力系，不能再化简

右螺旋：力偶的转向和力的指向符合右手螺旋法则，如下图.



③ $\vec{F_R'}=0, \vec{M_O}\neq0$ 的一般情况 ⇒ 中心轴不过简化中心的力螺旋

此时中心轴距简化中心 $d=\frac{M_O\sin\theta}{F_R'}$　求法：将 $\vec{M_O}$ 正交分解 ③=①+②

4.(*) ⇒ 平衡 $\vec{F_R'}=0, \vec{M_O}=0$

§3-5 空间任意力系的平衡

平衡条件：$\vec{F_R'}=0, \vec{M_O}=0$

平衡方程（基本式）：
$$\begin{cases}\Sigma F_x=0,\ \Sigma F_y=0,\ \Sigma F_z=0\\ \Sigma M_x=0,\ \Sigma M_y=0,\ \Sigma M_z=0\end{cases}$$

此外还有四矩式、五矩式、六矩式

No.

Date

§3-6 物体的重心

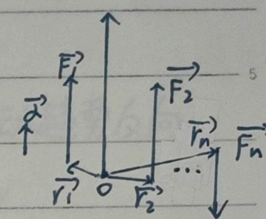
一、空间平行力系中心

结论1：当主矢不为零时，空间平行力系总可以向某一点简化为一个合力

$\vec{F_1}=F_1\vec{a}$ $\vec{F_2}=F_2\vec{a}$ … $\vec{F_n}=F_n\vec{a}$ 向一点O进行简化

⇒ 主矢 $\vec{F_R}=\sum F_i\vec{a}$

主矩 $\vec{M_O}=\sum(\vec{r_i}\times\vec{F_i})=\sum(\vec{r_i}\times F_i\vec{a})=(\sum F_i\vec{r_i})\times\vec{a}$ 有 $\vec{F_R}\perp\vec{M_O}$



⇒进一步简化为一合力，合力作用线距简化中心 $d=\frac{|M_O|}{F_R}$

结论2：空间平行力系的合力的作用点的位置仅与各平行力的作用点的位置及各力的大小有关，与平行力的方向无关。称该点为此平行力系的中心

平行力系中心的坐标计算公式：$x_C=\frac{\sum(F_i\cdot x_i)}{F_R}$ $y_C=\frac{\sum(F_i\cdot y_i)}{F_R}$ $z_C=\frac{\sum(F_i\cdot z_i)}{F_R}$

二、物体的重心

概念：物体各微小部分的重力近似组成一个空间平行力系，此力系合力大小称为物体的重量，此力系的中心称为物体的重心。刚体的重心相对于其自身来说是一个固定的几何点。

确定重心的方法

1.对称确定法：均质物体的重心即为其形心(几何中心)

2.实验测定法：①悬挂法 ②称重法

3.解析计算法：

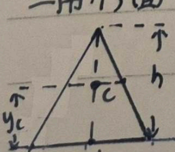
①分割法：$x_c\triangleq\frac{\sum P_i x_i}{P}\xlongequal{均质}\frac{\sum V_i x_i}{V}\xlongequal{等厚均质板}\frac{\sum S_i x_i}{S}$ / $\xlongequal{均质线}\frac{\sum l_i x_i}{l}$

微分⇒ $\frac{\int_V x\,dP}{P}$ $\frac{\int_V x\,dV}{V}$ $\frac{\int_S x\,dS}{S}$ $\frac{\int_l x\,dl}{l}$

②负面积(体积)法：将物体被切掉的部分填充上形成一整体后分割、计算，最后填充上的那部分也要计算，并在计算时其面积(体积)取负值

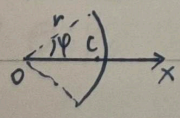
常见均质几何形体的重心位置

三角形面



位于中线交点 $y_c=\frac{1}{3}h$

圆弧

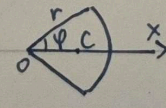


$x_c=\frac{r\sin\varphi}{\varphi}$

半圆弧：$x_c=\frac{2r}{\pi}$

$x_c=\frac{\int_{-\varphi}^{\varphi} r\cos\theta\,d\theta}{2\varphi}=\frac{r\sin\varphi}{\varphi}$

扇形面



$x_c=\frac{2}{3}\frac{r\sin\varphi}{\varphi}$

半圆面 $x_c=\frac{4r}{3\pi}$

求法：$x_c=\frac{\iint x\,d\sigma}{\sigma}=\frac{\iint\rho\cos\theta\,\rho\,d\rho\,d\theta}{\frac{1}{2}r\cdot r\cdot 2\varphi}=\frac{2r\sin\varphi}{3\varphi}$

第四章 摩擦

摩擦 { 滑动摩擦 { 静滑动摩擦(有滑动趋势) / 动滑动摩擦(发生滑动) ; 滚动摩擦 }

一、滑动摩擦

1.静滑动摩擦

静摩擦力 F_s 的特点：①方向：沿接触处的公切线，与相对滑动趋势反向

②大小：$0 \le F_s \le F_{max}$，$F_{max} = f_s F_N$

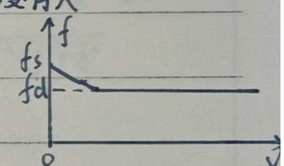
f_s 为静摩擦系数，无量纲，与材质、粗糙度、温度、湿度等有关

2.动滑动摩擦

动摩擦力 F_d 的特点 ①方向：同 F_s ②大小：$F_d = f_d F_N$

f_d 为动摩擦系数，还与相对滑动速度有关

一般情况下，$f_d < f_s$



二、摩擦角与自锁现象

1.摩擦角

全约束力 $\stackrel{def}{=}$ 法向约束力(支持力) + 切向约束力(静摩擦力)，即 $\vec{F_{RA}} = \vec{F_N} + \vec{F_s}$

摩擦角 $\stackrel{def}{=}$ 物体处于临界平衡时，全约束力和法线间的夹角 φ_f

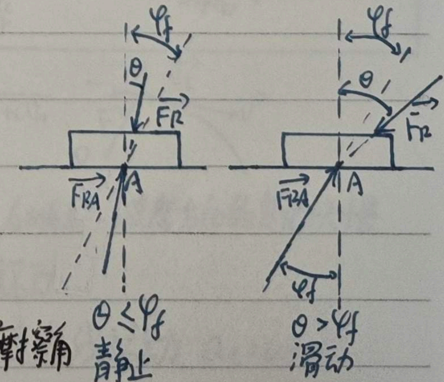
满足 $\tan(\varphi_f) = f_s$

摩擦锥：一个以接触点为顶点、顶角为 $2\varphi_f$ 的圆锥

2.自锁现象

(1) 若作用在物体上的全部主动力的合力 F_R 的作用线落在摩擦锥内且指向支承面，则无论 F_R 多大，物体必静止

(2) 若 F_R 落在摩擦锥之外，则无论 F_R 多小，物体一定滑动



3.斜面与螺纹自锁条件

自锁条件为：斜面的倾角/螺纹的升角不大于材料的摩擦角

即 $\theta \le \varphi_f$

第五章 点的运动学

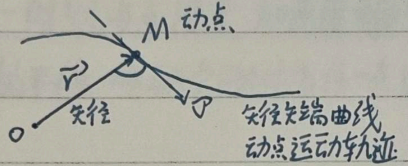
点的运动：研究点相对某一个参考系的几何位置随时间变动的描述方法

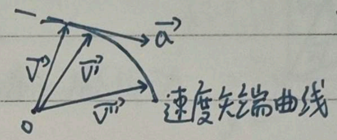
§5-1 矢量法

设研究点M，参考系原点O，则称 $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ 为点M相对于O的矢径 $\vec{r}=\vec{r}(t)$

动点M的速度 $\vec{v}=\dot{\vec{r}}$ 加速度 $\vec{a}=\dot{\vec{v}}=\ddot{\vec{r}}$

之间的关系：





$\vec{v}$、$\vec{v'}$、$\vec{v''}$…均平移到原点为O

§5-2 直角坐标法

运动方程 $\vec{r}=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ 轨迹方程 $f(x,y,z)=0$

速度：$\vec{v}=\dot{\vec{r}}=\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}+\dot{z}\vec{k}$ 即 $v_x=\dot{x}$ $v_y=\dot{y}$ $v_z=\dot{z}$ $v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$

加速度：$\vec{a}=\dot{\vec{v}}=\ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\vec{j}+\ddot{z}\vec{k}$ 即 $a_x=\ddot{x}$ $a_y=\ddot{y}$ $a_z=\ddot{z}$ $a=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}$

§5-3 自然法

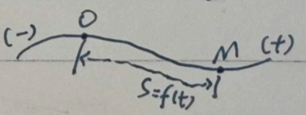
前提：已知点的运动轨迹 ⇒ 利用点的运动轨迹 建立弧坐标及自然轴系.

相同

一、弧坐标

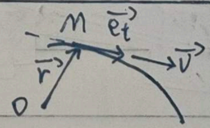
在运动轨迹上选一参考点O，规定一正向，动点M在轨迹上的位置可由弧长s（代数量）确定

$s=f(t)$



速度的弧坐标表示 $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{ds}{dt}\vec{e_t}=v\vec{e_t}$，其中 $v=\frac{ds}{dt}$ 称为速率

$\vec{e_t}$ 为沿运动轨迹切线方向的单位矢量，称为切线基矢量

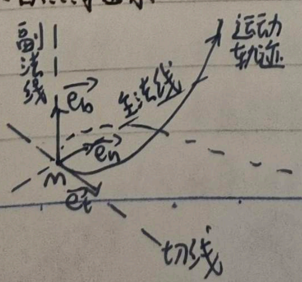


$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}$

加速度的弧坐标表示 $\vec{a}=\vec{a_t}+\vec{a_n}=a_t\vec{e_t}+a_n\vec{e_n}$

切向加速度，反映点的速度值的变化 $a_t=\dot{v}=\ddot{s}$，$a_n=\frac{v^2}{\rho}$ 法向加速度，反映点的速度方向的变化快慢

二、自然轴系



$\vec{e_n}$：主法线基矢量

$\vec{e_b}$：副法线基矢量 $\vec{e_b}=\vec{e_t}\times\vec{e_n}$

注：自然坐标系随点M而移动

是一游动坐标系

$\vec{a}$ 始终位于密切面内（$\vec{e_t}$、$\vec{e_n}$ 平面）

三、特殊运动

1. 匀变速曲线运动 $a_t=const$

$\Rightarrow v=v_0+a_t t$，$s=s_0+v_0t+\frac{1}{2}a_t t^2$

2. 匀速曲线运动 $a_t=0$

$\Rightarrow v=v_0=const$，

$s=s_0+v_0t$

No.

Date

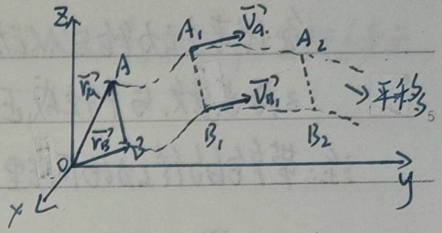
第六章 刚体的简单运动

刚体 —由无数点组成

§6-1 刚体的平移

平移 { 直线平移 / 曲线平移

平移：在刚体内任取一直线段，若在运动过程中该线段始终与其初始位置平行，则称为平移

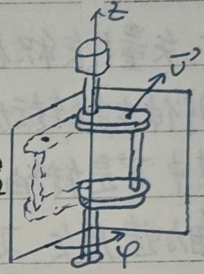


性质：当刚体平移时，其上各点运动轨迹的形状相同

在任一时刻，各点速度、加速度相同

研究刚体的平移 ⇒ 研究刚体内任一点（如质心）的运动

§6-2 刚体的定轴转动



定轴转动：刚体在运动时，其上的（或其扩展部分）有两点固定不动

取其转轴为z轴，两平面间夹角φ称为刚体的转角，其确定了刚体的位置

其符号：自z轴正端往负端看，逆正顺负　运动方程 $\varphi=\varphi(t)$

刚体瞬时角速度：$\omega=\dot{\varphi}$　单位rad/s，方向：z轴正→负，逆正顺负

刚体瞬时角加速度 $\alpha=\dot{\omega}=\ddot{\varphi}$　单位rad/s²，方向同上

若α、ω同号，则转动是加速的；若α、ω异号，则转动是减速的

特殊情况 (1) 刚体匀速转动　$\omega=const$，$\varphi=\varphi_0+\omega t$

def 转速n：单位 r/min　$\omega=\frac{2\pi n}{60}$

(2) 刚体匀变速转动　$\alpha=const$，$\omega=\omega_0+\alpha t$，$\varphi=\varphi_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2$

§6-3 定轴转动的刚体内各点的速度与加速度

刚体定轴转动 ⇒ 刚体上任一点都做圆周运动，圆心在轴线上，圆周所在平面与轴线垂直

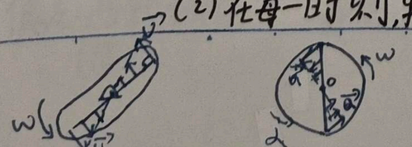
⇒ 任一点的速度 $v=R\omega$

加速度 $a_t=R\alpha$，$a_n=\omega^2 R$　$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=R\sqrt{\alpha^2+\omega^4}$

a的方向 $\tan\theta=\frac{a_t}{a_n}=\frac{\alpha}{\omega^2}$

性质：(1) 在每一时刻，转动刚体内各点的速度和加速度的大小分别与这些点到轴线的垂直距离R成正比

(2) 在每一时刻，转动刚体内各点的加速度a与半径间的夹角θ都相同



KOKUYO

§6-4 轮系的传动比

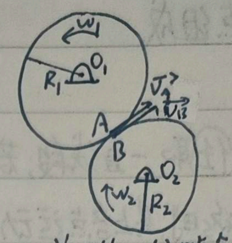
传动比 $i_{12}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\pm\frac{R_2}{R_1}=\pm\frac{z_2}{z_1}$

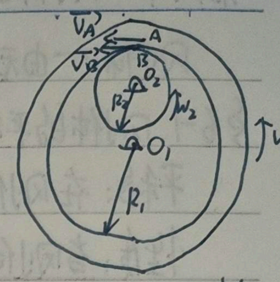
其中正代表主动轮与从动轮转向相同(内啮合)

负代表主动轮与从动轮转向相反(外啮合)

z为齿数,与半径成正比

注:带轮的传动比同理





§6-5. 矢量与矢积表示

① 刚体定轴转动时角速度可以用矢量表示 $\vec{\omega}=\omega\vec{k}$

其中 $\vec{k}$ 是转轴z轴正向的单位矢量

角加速度矢 $\vec{\alpha}=\alpha\vec{k}=\dot{\omega}\vec{k}=\dot{\vec{\omega}}$

注:角速度矢 $\vec{\omega}$ 与角加速度矢 $\vec{\alpha}$ 均是滑动矢量

② 刚体内任一点的速度可以用矢积表示 $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$

⇒ 加速度矢 $\vec{a_t}=\vec{\alpha}\times\vec{r}$, $\vec{a_n}=\vec{\omega}\times\vec{v}$ ⇒ $\vec{a}=\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v}$

其中 $\vec{r}$ 为该点的矢径

No.

Date

第七章 点的合成运动

§7-1 三种运动的概念

合成运动：动点相对于某一参考体的运动可由相对于其他参考体的几个运动组合而成

定参考系：固定在地面上的坐标系，简称定系，用 $Oxyz$ 坐标系表示

动参考系：固定在与地面有相对运动的参考体上的坐标系，简称动系，用 $O'x'y'z'$ 坐标系表示。

三种运动

1、绝对运动

动点相对于定系的运动，是点的运动

绝对运动方程 $\vec{r}=\vec{r}(t)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

绝对速度 $\vec{v_a}=\dot{\vec{r}}=\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}+\dot{z}\vec{k}$ 绝对加速度 $\vec{a_a}=\ddot{\vec{r}}=\ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\vec{j}+\ddot{z}\vec{k}$

2、相对运动

动点相对于动系的运动，是点的运动

相对运动方程 $\vec{r'}=x'\vec{i'}+y'\vec{j'}+z'\vec{k'}$

相对速度 $\vec{v_r}=\dot{x}'\vec{i'}+\dot{y}'\vec{j'}+\dot{z}'\vec{k'}$ 相对加速度 $\vec{a_r}=\ddot{x}'\vec{i'}+\ddot{y}'\vec{j'}+\ddot{z}'\vec{k'}$

3、牵连运动

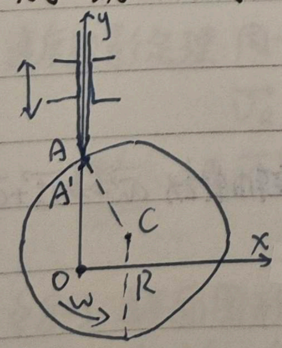
动系相对于定系的运动，是刚体的运动

牵连点：某一瞬间，动系上，与动点重合的那一个点

称其速度和加速度为牵连速度 $\vec{v_e}$ 牵连加速度 $\vec{a_e}$

注：牵连点相对于动系是不动的，牵连点无相对速度，牵连速度即牵连点的绝对速度

例：动点、动系的选择

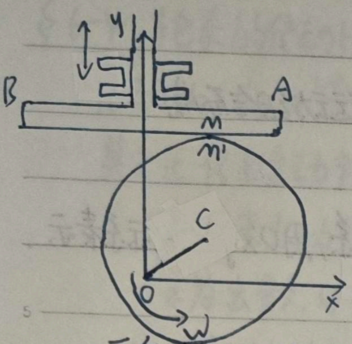


偏心凸轮机构
(圆形)

①理想	②不理想	③理想（特殊点）
动点：杆上，与轮的接触点A	动点：轮上，与杆接触点	动点：轮心
动系：凸轮	动系：杆	动系：杆
⇒绝对运动：直线运动（竖直）	⇒绝对运动：圆周运动	⇒绝对运动：圆周运动
相对：圆周运动（沿轮缘）	相对：一般曲线运动	相对：圆周运动△
牵连：定轴转动（轴为点O）	牵连：平移（竖直）	牵连：平移（竖直）

No.

Date



平底凸轮机构

① 动点：杆上M点	② 动点：轮上M'点	③ 动点：圆心C点
动系：凸轮	动系：杆AB	动系：杆AB
⇒绝对运动：直线运动(竖直)	⇒绝对运动：圆周运动	⇒绝对运动：圆周运动
相对：一般曲线运动	相对：一般曲线运动	相对：直线运动(水平)△
牵连：定轴转动	牵连：平移(竖直)	牵连：平移(竖直)

⇒ 选动点、动系时

① 动点和动系不能选在同一物体上

② 所选动系应能将动点的运动分解为相对运动和牵连运动，一般应使相对运动易于看清

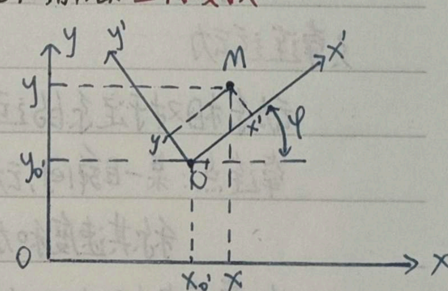
③ 一般，选择接触点作为动点(若有)，或选特殊点(如轮心)作为动点

点的绝对运动与相对运动的关系

题型：已知两种运动方程求另一运动方程，是全过程问题。解法：坐标变换

设动点绝对运动方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ 相对运动方程 $\begin{cases} x'=x'(t) \\ y'=y'(t) \end{cases}$

牵连运动方程：$x_{O'}=x_{O'}(t)$, $y_{O'}=y_{O'}(t)$, $\varphi=\varphi(t)$



⇒ 知二求一：$\begin{cases} x = x_{O'} + x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y = y_{O'} + x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{cases}$

§7-2 点的速度合成定理

动点在某一瞬时，有：$\vec{v_a} = \vec{v_r} + \vec{v_e}$

§7-3 点的加速度合成定理

动点在某一瞬时，有：$\vec{a_a} = \vec{a_r} + \vec{a_e} + \vec{a_c}$ ← 科氏加速度　若绝对运动为定轴转动 $\vec{a_a} \to \vec{a_a^t} + \vec{a_a^n}$

当牵连运动为平移时：$\vec{a_c} = 0$

当牵连运动为定轴转动时：$\vec{a_c} = 2\underbrace{\vec{\omega_e}}_{\text{牵连运动角速度}} \times \vec{v_r}$　$a_c = 2|\omega_e||v_r|\sin\theta$

No.

Date

第八章 刚体的平面运动

§8-1 刚体平面运动的概述和运动分解

一、概述

1、平面运动：在运动中，刚体上任意一点与空间内某一固定平面始终保持相等的距离

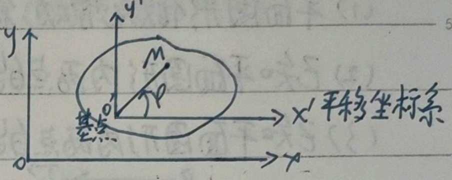
⇒ 平面运动刚体上的各点的运动，都在一固定平面内.

2、基点法描述平面图形的运动：

$$\begin{cases} x_{O'}=f_1(t) \\ y_{O'}=f_2(t) \\ \varphi=f_3(t) \end{cases}$$

称点O'为基点，

φ 为平面图形的转角



平面图形的运动 = 随点O'的平移 + 绕点O'的转动

结论：1. 平面运动可取任意基点而分解为平移和转动

其中平移的速度与加速度与基点的选取有关，而图形绕基点转动的角速度与角加速度与基点无关

2、平面图形相对于各平移参考系（包括定参考系）的转动运动都是一样的. ω 与 α 都是共用的

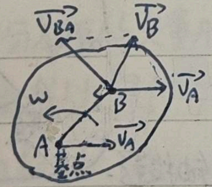
§8-2 求平面图形内各点速度的基点法

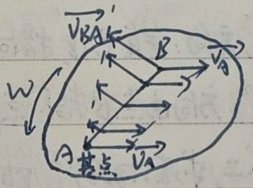
已知平面一点的运动速度，求另一点的速度 ⇒ 基点法

结论：平面图形内任一点的速度等于基点的速度与该点随图形绕基点转动速度的矢量和，即

$$\vec{v_B}=\vec{v_A}+\vec{v_{BA}}$$

其中，相对速度 $\vec{v_{BA}}$：$v_{BA}=AB\cdot\omega$，方向：与AB垂直且指向图形转动一侧





速度投影定理：同一平面图形上任意两点的速度在这两点连线上的投影相等

$$\vec{v_B}=\vec{v_A}+\vec{v_{BA}} \Rightarrow (\vec{v_B})_{AB}=(\vec{v_A})_{AB}$$

理解：由于AB是刚体上的线段，长度应保持不变，故A、B两点速度在AB方向的分量必相等.

§8-3 求平面图形内各点速度的瞬心法

定理：一般在每一瞬时，平面图形上都唯一地存在一个速度为零的点，称为速度瞬心.

注：瞬心在这一时刻 v 为零但 a 一般不为零，故求加速度没有瞬心法.

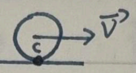
结论：平面图形内任一点的速度等于该点随图形绕瞬心转动的速度，

即：设瞬心C点，$v_C=0$，取为基点，有 $\forall M$，$\vec{v}_M=\vec{v}_C+\vec{v}_{MC}=\vec{v}_{MC}$，$v_M=v_{MC}=\omega\cdot MC$

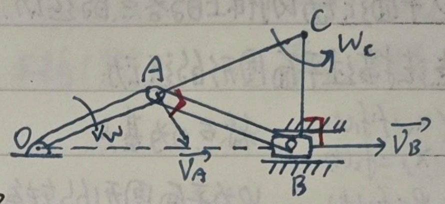
即平面图形内各点速度的大小与该点到瞬心的距离成正比

确定速度瞬心位置的方法：

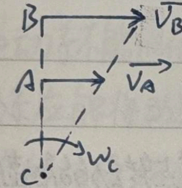
(1) 平面图形做无滑动滚动

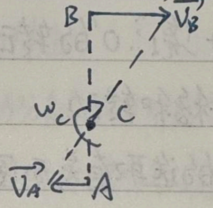


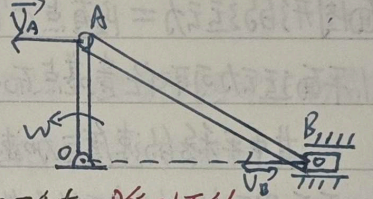
(2) 已知平面图形内两点的速度且 $\vec{v}_A$ 与 $\vec{v}_B$ 不平行：



(3) 已知平面图形内两点的速度，且 $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_B$，$\vec{v}_A \perp AB$





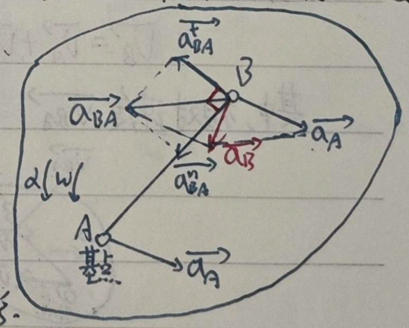


(4) 已知平面图形内两点的速度，且 $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_B$ 但 $\vec{v}_A$ 与AB不垂直：瞬时平移

此时瞬心位于无穷远处，图形各点的速度相等，但加速度不同

§8.4 用基点法求平面图形内各点的加速度 ☆基点法无科氏加速度

结论：平面图形内任一点的加速度等于基点的加速度与该点随平面图形绕基点转动的切向加速度和法向加速度的矢量和，即 $\underbrace{\vec{a}_B}_{\text{绝对}}=\underbrace{\vec{a}_A}_{\text{牵连}}+\underbrace{\vec{a}^t_{BA}+\vec{a}^n_{BA}}_{\text{相对}}$



其中：$\vec{a}^t_{BA}$：大小：$a^t_{BA}=AB\cdot\alpha$，方向：垂直于AB，指向同α

$\vec{a}^n_{BA}$：大小：$a^n_{BA}=AB\cdot\omega^2$，方向由点B指向点A

上式有八个未知量，一般知六求二，求法：向两个相交的任选的轴投影。

若点B做圆周运动，则可写为 $\vec{a}^t_B+\vec{a}^n_B=\vec{a}_A+\vec{a}^t_{BA}+\vec{a}^n_{BA}$

运动学综合应用：机构运动学分析

已知运动机构 —联接点运动学分析→ 未知运动机构

→ 解析法：求得运动全过程的速度和加速度

找到位置与时间的函数关系→建立运动方程→v与a

→ 求某一瞬时的v和a
- 接触滑动←点的合成运动
- 铰链联接←刚体平面运动

第九章 质点动力学的基本方程

动力学中物体的抽象模型：

质点：具有一定质量而几何形状和尺寸大小可以忽略不计的物体

质点系：几个或无限个相互有联系的质点所组成的系统

若物体的形状和大小在所研究的问题中不可忽略时，物体应抽象为质点系

刚体：特殊的质点系，其中任意两质点间的距离保持不变，也称为不变的质点系。

§9-1 动力学基本定律 —牛顿三定律

定律内容：牛一：惯性定律

牛二：力与加速度之间的关系定律 $\vec{F}=m\vec{a}=\frac{d}{dt}(m\vec{v})$

牛三：作用与反作用定律

惯性参考系：牛顿三定律适用的参考系

惯性参考系的取法：一般工程问题 ⇒ 固定于地面或相对于地面做匀速直线平移的坐标系

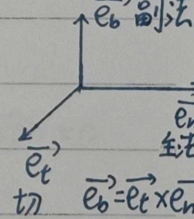
人造卫星的轨道、洲际导弹的弹道 ⇒ 地心为原点，三轴指向三颗恒星（地球自转不可忽略）

行星运动 ⇒ 太阳为原点，三轴指向三颗恒星（地心运动不可忽略）

§9-2 质点的运动微分方程

设质点受到 n 个力 $F_1, F_2, \dots, F_n$ 作用，由牛二知 $\sum_i \vec{F_i}=m\vec{a}$，故

质点运动微分方程的矢量形式 $\sum_i \vec{F_i}=m\frac{d\vec{v}}{dt}=m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$



在直角坐标轴上的投影 $\sum_i F_{ix}=m\frac{d^2x}{dt^2}$　$\sum_i F_{iy}=m\frac{d^2y}{dt^2}$，$\sum_i F_{iz}=m\frac{d^2z}{dt^2}$

在自然轴上的投影 $\sum_i F_{it}=ma_t=m\frac{dv}{dt}$，$\sum_i F_{in}=ma_n=m\frac{v^2}{\rho}$　$\sum_i F_{ib}=0$

由于 $\vec{a}=a_t\vec{e_t}+a_n\vec{e_n}$，$a_b=0$（点的加速度在副法线上的投影为零）　$\vec{e_b}=\vec{e_t}\times\vec{e_n}$

质点动力学的两类基本问题

第一类问题：已知运动求力　微分问题 ⎫
第二类问题：已知力求运动　积分问题 ⎭ 混合问题

No.

Date

第十章 动量定理

§10-1 动量与冲量

一、动量

1. 质点的动量 $m\vec{v}$ 矢量 单位 $kg\cdot m/s$

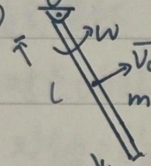
2. 质点系的动量 $\vec{p}=\sum_i m_i\vec{v_i}$

3. 质点系的质心 C：矢径 $\vec{r_c}=\frac{\sum m_i\vec{r_i}}{m}$ 即 $x_c=\frac{\sum m_i x_i}{m}$, $y_c=\frac{\sum m_i y_i}{m}$, $z_c=\frac{\sum m_i z_i}{m}$

⇒ 质点系的动量 = 质点系全部质量 × 质心速度 $\vec{p}=m\vec{v_c}=m\dot{\vec{r_c}}$ $p_x=mv_{cx}$, $p_y=mv_{cy}$

即 $p_x=\sum_i m_i v_{ix}=\sum_i m_i\dot{x}_i$, $p_y=\sum_i m_i v_{iy}=\sum_i m_i\dot{y}_i$, $p_z=\sum_i m_i v_{iz}=\sum_i m_i\dot{z}_i$

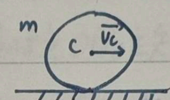
例：①



$v_c=\frac{l}{2}\cdot w$

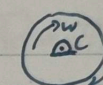
$p=m\frac{l}{2}w$

②



$p=mv_c$

③



$v_c=0$, $p=0$

二、冲量 力对时间的积累效应

定义：$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt$ 单位：N·s

若力为恒力，则 $\vec{I}=\vec{F}t$

§10-2 动量定理

一、质点的动量定理

微分形式 $d(m\vec{v})=\vec{F}dt=d\vec{I}$ 积分形式 $m\vec{v_2}-m\vec{v_1}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt=\vec{I}$

二、质点系的动量定理

记号：设质点系有n个质点，第j个质点的质量为m_j，速度$\vec{v_j}$，外力$\vec{F_j}^{(e)}$，内力$\vec{F_j}^{(i)}$

内力的性质 ①内力矢量和为零 $\sum_j\vec{F_j}^{(i)}=0$ ②内力对一点的矩的矢量和为零 $\sum_j\vec{M_O}(\vec{F_j}^{(i)})=0$

③内力的元冲量为零 $(\sum_j\vec{F_j}^{(i)})dt=0$

微分形式 $\frac{d\vec{p}}{dt}=\sum_j\vec{F_j}^{(e)}$ 即 $\dot{p}_x=\sum F_x^{(e)}$ $\dot{p}_y=\sum F_y^{(e)}$ $\dot{p}_z=\sum F_z^{(e)}$

积分形式 $\vec{p_2}-\vec{p_1}=\sum_j\vec{I_j}^{(e)}$ 即 $p_{2x}-p_{1x}=\sum I_x^{(e)}$, $p_{2y}-p_{1y}=\sum I_y^{(e)}$, $p_{2z}-p_{1z}=\sum I_z^{(e)}$

三、质点系动量守恒定律

定律：若作用于质点系的外力合恒为零，则质点系动量保持不变 if $\sum\vec{F}^{(e)}\equiv0$ thus $\vec{p}=const$

⇒投影情况：if $\sum F_x^{(e)}\equiv0$ thus $p_x=const$

注：不做功的外力不能改变系统动量的大小（$T=\frac{p^2}{2m}$），但可以改变系统动量$\vec{p}$的方向

No.

Date

§10-3 质心运动定理

一、质心运动定理 代入 $\vec{p}=m\vec{v_c}$

微分形式 $\sum_i \vec{F_i}^{(e)}=m\frac{d\vec{v_c}}{dt}=m\vec{a_c}$ 注:质点系的内力不影响质心的运动状态

在直角坐标下投影 $\sum F_x^{(e)}=ma_{cx}$ $\sum F_y^{(e)}=ma_{cy}$ $\sum F_z^{(e)}=ma_{cz}$

在自然坐标下投影 $\sum F_t^{(e)}=m\frac{dv_c}{dt}$ $\sum F_n^{(e)}=m\frac{v_c^2}{\rho}$ $\sum F_b^{(e)}=0$

二、质心运动守恒定律

$\sum_i \vec{F_i}^{(e)}\equiv 0 \Rightarrow \vec{a_c}\equiv 0 \Rightarrow \vec{v_c}=const$

$\sum F_x^{(e)}\equiv 0 \Rightarrow a_{cx}\equiv 0 \Rightarrow v_{cx}=const$

注1.列写"动量"相关式子时不出现力偶M

2.若质点系由多个部分刚体组合而成,则由 $\vec{r_c}=\frac{m_1\vec{r_1}+\cdots+m_n\vec{r_n}}{m_1+\cdots+m_n}$,求导得 $\vec{a_c}=\frac{m_1\vec{a_1}+\cdots+m_n\vec{a_n}}{m_1+\cdots+m_n}$

故 $\sum F_x^{(e)}=m_1a_{1x}+\cdots+m_na_{nx}$, $\sum F_y^{(e)}=m_1a_{1y}+\cdots+m_na_{ny}$

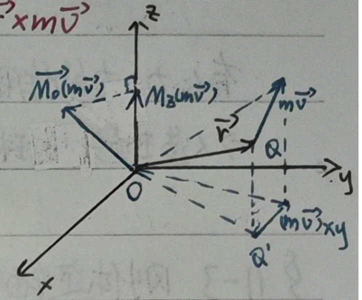
Campus

第十一章 动量矩定理

§11-1 质点和质点系的动量矩

一、质点的动量矩

质点Q对于点O的动量矩：即质点Q动量对点O的矩 $\vec{M_O}(m\vec{v})=\vec{r}\times m\vec{v}$



质点对点的动量矩是定位矢量，单位 $kg\cdot m^2/s$

质点Q对于轴z的动量矩：$M_z(m\vec{v})=[\vec{M_O}(m\vec{v})]_z=M_O[(m\vec{v})_{xy}]$

质点对于轴z的动量矩是代数量，从z轴正向看去，逆正顺负

二、质点系的动量矩

质点系对点O的动量矩，称为质点系动量对点O的主矩。 $\vec{L_O}=\sum_i\vec{M_O}(m_i\vec{v_i})=\sum_i\vec{r_i}\times m_i\vec{v_i}$

对轴z的动量矩 $L_z=\sum_i M_z(m_i\vec{v_i})$

关系 $[\vec{L_O}]_z=L_z$

特殊运动的质点系：①刚体平移时，可看作全部质量集中于质心的一个质点

$\vec{L_O}=\vec{M_O}(m\vec{v_c})$，$L_z=M_z(m\vec{v_c})$

②刚体绕z轴定轴转动时，$L_z=J_z\omega$

其中 $J_z=\sum_i m_ir_i^2$ 为刚体对z轴的转动惯量 ⇒ 刚体转动惯性的度量

r_i 为质点 m_i 到转轴z的距离

§11-2 动量矩定理

一、质点的动量矩定理

设质点Q对定点O的动量矩为 $\vec{M_O}(m\vec{v})$，作用于点Q上的力 $\vec{F}$ 对O点的矩为 $\vec{M_O}(\vec{F})$，则

$$\frac{d}{dt}\vec{M_O}(m\vec{v})=\vec{M_O}(\vec{F})$$

⇒直角坐标：$\frac{d}{dt}M_x(m\vec{v})=M_x(\vec{F})$，$\frac{d}{dt}M_y(m\vec{v})=M_y(\vec{F})$，$\frac{d}{dt}M_z(m\vec{v})=M_z(\vec{F})$

二、质点系的动量矩定理

设质点系的内力 $\vec{F_i}^{(i)}$，外力 $\vec{F_i}^{(e)}$，则 $\frac{d}{dt}\vec{L_O}=\sum_i\vec{M_O}(\vec{F_i}^{(e)})$

⇒直角坐标：$\frac{d}{dt}L_x=\sum M_x(\vec{F_i}^{(e)})$；$\frac{d}{dt}L_y=\sum M_y(\vec{F_i}^{(e)})$，$\frac{d}{dt}L_z=\sum M_z(\vec{F_i}^{(e)})$

三、质点系的动量矩守恒定律

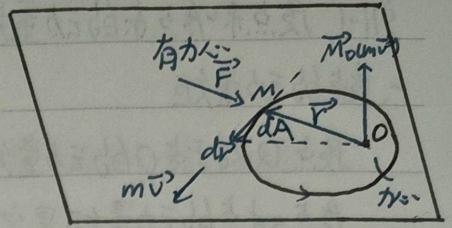
当外力对某定点的主矩为零时，质点系对该点的动量矩保持不变 $\sum_i\vec{M_O}(\vec{F_i}^{(e)})=0 \Rightarrow \vec{L_O}\equiv const$

⇒投影：$\sum_i M_z(\vec{F_i}^{(e)})=0 \Rightarrow L_z\equiv const$

No.

Date

四.面积速度定理 ⇐质点系对定点的动量矩守恒



质点仅在有心力作用下运动：①运动轨迹是平面曲线

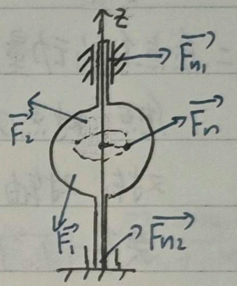
②面积速度 $\frac{dA}{dt}$ 守恒

有心力：力的作用始终过某定点（如万有引力），称该定点为力心

⇒人造卫星绕地球运动时，近心处快，远心处慢

$\vec{M_O}(m\vec{v}) = \vec{r}\times m\vec{v} = m\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt} = const$

§11-3 刚体定轴转动的微分方程



设定轴转动刚体上有外力：主动力 $\vec{F_1}、\vec{F_2}\cdots\vec{F_n}$，约束力 $\vec{F_{N1}}\ \vec{F_{N2}}$，则

约束力 $\vec{F_{N1}}、\vec{F_{N2}}$ 对轴z的矩为零 $L_z = J_z\omega$，$\frac{d}{dt}L_z = \sum M_z(\vec{F_i})$

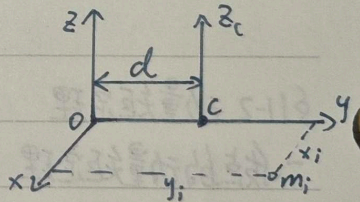
$\Rightarrow \underset{\triangle}{J_z}\alpha = \sum M_z(\vec{F_i})$ 其中 $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$

§11-4 刚体对轴的转动惯量

转动惯量 $J_z = \sum_i m_i r_i^2$ $J_z = \iiint r^2 dm = \iiint_V r^2\rho dV = \int_L \rho_l l^2 dl$

回转半径（惯性半径）$\rho_z = \sqrt{\frac{J_z}{m}}$ $\Rightarrow J_z = m\rho_z^2$

平行轴定理：刚体对于任一轴的转动惯量 J_z，等于刚体对于与该轴平行且过质心的转动惯量 J_{zc}，加上 md^2，即 $J_z = J_{zc} + md^2$



⇒刚体对于诸平行轴，以通过质心的轴的转动惯量为最小

组合法：组合体对于同一轴的转动惯量可以相加、相减（挖去一块）

§11-5 质点系相对于质心的动量矩定理

一、质点系相对于质心的动量矩

$\vec{L_C} = \sum\vec{M_C}(m_i\vec{v_i}) = \sum\vec{M_C}(m_i\vec{v_{ir}}) = J_C\omega$

即：质点系相对于质心的动量矩，既可以用各质点的绝对速度计算，也可以用相对速度 $\vec{v_{ir}}$ 计算

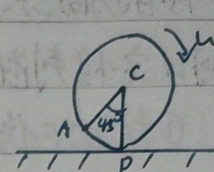
二、质点系相对任一点O的动量矩

$\vec{L_O} = \vec{r_C}\times m\vec{v_C} + \vec{L_C}$

质点系对于任一点O的动量矩 = 质心平移时对O的动量矩 $(\vec{r_C}\times m\vec{v_C})$ +

质点系相对于质心C的动量矩 $\vec{L_C}$

例1. 如图,均质圆盘在地上以ω纯滚动,求圆盘对点A、C、P的动量矩



解: 点C为质心, $L_C = J_C\omega = \frac{mR^2}{2}\boxed{\omega}$ ← 相对速度

点P为速度瞬心, $L_P = J_P\omega = \frac{3}{2}mR^2\boxed{\omega}$ ← 绝对速度

或 $L_P = mv_C R + L_C = \frac{3}{2}mR^2\omega$

点A为普通点, $L_A = mv_C\frac{\sqrt{2}}{2}R + L_C = \frac{\sqrt{2}+1}{2}mR^2\omega$

三、质点系相对于质心的动量矩定理

$\frac{d}{dt}\vec{L_C} = \sum_i \vec{M_C}(\vec{F_i}^{(e)})$ 形式上与质点系对定点的动量矩定理完全一样

$\Rightarrow \frac{d}{dt}L_{Cz} = \sum M_{Cz}(\vec{F_i}^{(e)})$

四、质点系相对于质心的动量矩守恒定理

当外力对质点系的质心(或质心轴)的矩为零时,质点系对质心(轴)的动量矩保持不变

$\sum_i \vec{M_C}(\vec{F_i}^{(e)}) = 0 \Rightarrow \vec{L_C} \equiv const$

§11-6 刚体的平面运动微分方程

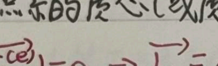
刚体平面运动
- 随质心平移 $\xrightarrow{\text{质心运动定理}}$ $\sum \vec{F}^{(e)} = m\vec{a_C} = m\ddot{\vec{r}_C}$
- 绕质心轴转动 $\xrightarrow{\S 11\text{-}5}$ $\sum M_C(\vec{F}^{(e)}) = J_C\alpha = J_C\ddot{\varphi}$

投影式: 直角坐标
$$\begin{cases} ma_{Cx} = \sum F_x^{(e)} \\ ma_{Cy} = \sum F_y^{(e)} \\ J_C\alpha = \sum M_C(\vec{F}^{(e)}) \end{cases}$$
自然轴系
$$\begin{cases} ma_C^t = \sum F_t^{(e)} \\ ma_C^n = \sum F_n^{(e)} \\ J_C\alpha = \sum M_C(\vec{F}^{(e)}) \end{cases}$$

上式一般仅对质心成立

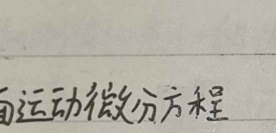
常见均质物体的转动惯量

1. 细直杆



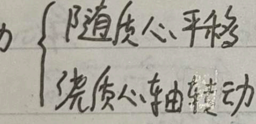
$J_{z0} = \frac{1}{3}ml^2$, $J_{zC} = \frac{1}{12}ml^2$

2. 薄圆环(薄壁圆筒)



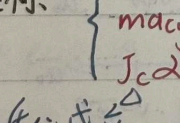
$J_z = mR^2$

3. 薄圆面(圆柱)



$J_z = \frac{1}{2}mR^2$

4. 矩形薄板

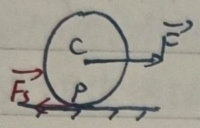


$J_z = \frac{1}{12}m(a^2+b^2)$, $J_x = \frac{1}{12}mb^2$, $J_y = \frac{1}{12}ma^2$

专题：轮在平地只滚不滑时：f_s方向

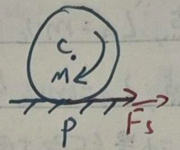
1.可以定性判断

①主动力F作用下纯滚动



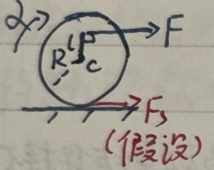
当无F_s时，圆向右平动，
P点相对地向右，故F_s向左
使圆顺时针滚动

②主动力矩M作用下纯滚动



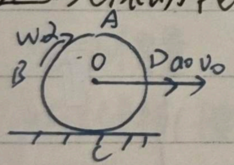
当无F_s时，圆原地滚动
P点相对地向左，故F_s向右
使圆前进

2.需定量计算



微分方程：$\begin{cases} F\cdot l-F_sR=J\alpha \\ F+F_s=ma_{cx} \\ a_{cy}=0 \\ a_{cx}=\alpha R \end{cases} \Rightarrow F_s=\frac{2l-R}{3R}F$ $\begin{cases} l=0\text{时 } F_s=-\frac{1}{3}F\text{，向左} \\ 0<l<\frac{R}{2}\text{时，}F_s\text{向左} \\ l=\frac{R}{2}\text{时，}F_s=0 \\ \frac{R}{2}<l<R\text{时，}F_s\text{向右} \end{cases}$

专题：纯滚动轮上一点的速度与加速度



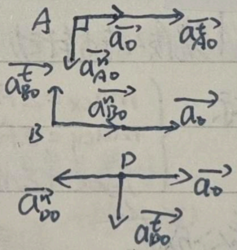
纯滚动：$v_o=\omega\cdot R$，$a_o=\alpha R$

O点：质心做水平直线运动，v_o，a_o　C点：瞬心，$v_c=0$，$a_c=\omega^2R=\frac{v_o^2}{R}$向上

A点：$v_A=2v_o$，$a_A=\sqrt{(2a_o)^2+(\omega^2R)^2}$

B点：$v_B=\sqrt{2}v_o$，$a_B=\sqrt{(\omega^2R+a_o)^2+a_o^2}$

D点：$v_D=\sqrt{2}v_o$，$a_D=\sqrt{a_o^2+(a_o-\omega^2R)^2}$

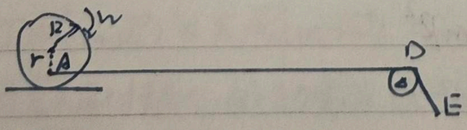


专题：绳索模型

①直绳 ②绕定滑轮前后的绳上各点 ③与之牵连的刚体上的点

沿绳方向的位移/速度/加速度分量相等

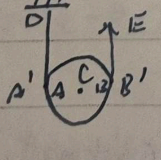
eg1.



$v_E=v_D'=v_D=v_A'=v_A=\omega(R-r)$

$a_E=a_{D'}^t=a_D^t=a_{A'}^x=a_A^x=\alpha(R-r)$

eg.2



$v_A=v_{A'}=v_D=0 \Rightarrow$ 点A为瞬心

$a_A^t=a_{A'}^t=a_D=0$

但 $v_{A'}\neq v_{B'}$，$a_{A'}^t\neq a_{B'}^t$（动滑轮）

第十二章 动能定理

§12-1 力的功

常力在直线运动中的功 $W=F\cos\theta\cdot s=\vec{F}\cdot\vec{s}$

变力在曲线运动中的功 $\delta W=\vec{F}\cdot d\vec{r}$ $W=\int_a^b\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_a^b(F_xdx+F_ydy+F_zdz)$

常见力的功

(1) 重力做功：质点、$W_{12}=mg(z_1-z_2)$ 只与始末高度差有关,与运动轨迹无关

质点系 $W_{12}=mg(z_{C1}-z_{C2})$ 始末质心高度差

(2) 弹性力的功：设形变量δ，有 $F=k\delta$，$W_{12}=\frac{k}{2}(\delta_1^2-\delta_2^2)$ δ_1:初 δ_2末 弹簧形变量 与运动轨迹无关

(3) 定轴转动刚体上力的功：$W_{12}=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}M_zd\varphi$ 其中z轴是转轴

M_z是 ①力$\vec{F}$对于z轴的力矩M_z ②力偶对于z轴的力偶矩,即$\vec{M}$在z轴上的投影

(4) 任意运动刚体上力系的功

①力系的总功等于力系中所有各力做功的代数和

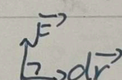
②将力系向刚体上一点(一般选质心)简化 ⟶ 一个力$\vec{F_R}$与一个力偶(其矩矢为主矩$\vec{M_O}$)

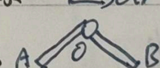
则有 $\delta W=\vec{F_R}\cdot d\vec{r_C}+\vec{M_C}\cdot d\vec{\varphi}$ 可只简化做功的力,而不考虑不做功的力

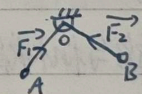
若刚体做平面运动, $\delta W=\vec{F_R}\cdot d\vec{r_C}+M_Cd\varphi$ $W_{12}=\int_{C_1}^{C_2}\vec{F_R}d\vec{r_C}+\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}M_Cd\varphi$

刚体质心C从C_1移动到C_2,同时刚体由φ_1转到φ_2.

(5) 理想约束

约束力不做功：光滑固定面、一端固定的绳索 

刚性二力杆、光滑铰链、不可伸长细绳 



$W=\vec{F_1}\cdot d\vec{r_1}+\vec{F_2}\cdot d\vec{r_2}=0$

光滑固定铰支座、固定端 $d\vec{r}=0$

轮子只滚不滑时接触点  瞬心 ⟹ $d\vec{r}=0$

(6) 内力

质点系的内力做的功之和可能不为零, 刚体所有内力做功的和等于零

§12-2 动能

1. 质点的动能：$T=\frac{1}{2}mv^2$

2. 质点系的动能：$T=\sum\frac{1}{2}m_iv_i^2$

No.

Date

①平移刚体的动能 $T=\frac{1}{2}mv_c^2$

②定轴转动刚体的动能，设z为转轴 $T=\frac{1}{2}J_z\omega^2$

③平面运动刚体的动能 $T=\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}J_c\omega^2=\frac{1}{2}J_p\omega^2$，P为速度瞬心

3.动能定理：$dT=\sum\delta W_i$ $T_2-T_1=\sum W_i$

§12-4 功率

1.定义：单位时间内力所做的功称为功率 $P=\frac{\delta W}{dt}$

由于 $\delta W=\vec{F}\cdot d\vec{r}$，有 $P=\vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{v}=F_t v$

作用在转动刚体上的力的功率 $P=\frac{M_z d\varphi}{dt}=M_z\omega$ M_z为力对转轴z的矩

2.功率方程：质点系动能对时间的一阶导数，等于作用于质点系的所有力的功率的代数和

$$dT=\sum\delta W_i \Rightarrow \frac{dT}{dt}=\sum_i P_i$$

$P_{输入}$：电场力功率　$P_{无用}$：摩擦力做负功的损耗功率　$P_{有用}$：切削工件必须付出的功率

$$P_{输入}=P_{有用}+P_{无用}+\frac{dT}{dt}$$

☆功率方程给出了系统加速度与作用力之间的关系

3.机械效率

$P_{有效}=P_{有用}+\frac{dT}{dt}$ $\eta=\frac{P_{有效}}{P_{输入}}$ 对于n级传动的系数 $\eta=\prod_{i=1}^{n}\eta_i$

§12-5 势能与机械能

1.力场：一物体在空间所受的力只与所处的空间位置有关 $\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)$，该空间称为力场

势力场：力场中作用于物体的力所做的功仅与始末状态有关，而与运动轨迹形状无关的力场

有势力/保守力：在势力场中物体受到的力 eg.重力、弹性力、万有引力

2.势能：在势力场中，质点从A到B有势力所做的功称为质点在点B相对于A的势能 $V=\int_A^B\vec{F}\cdot d\vec{r}$

重力场的势能 $V=mg(z-z_0)$　弹性力场的势能 $V=\frac{k}{2}(\delta^2-\delta_0^2)$　引力场的势能 $V=Gm_1m_2(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2})$

以形变量δ_0处为零势能点时

对于重力-弹力系统，一般以其平衡位置为零势能位置

3.机械能守恒定律：若系统运动中只有保守力做功，则其机械能守恒

$$T_1+V_1=T_2+V_2,\quad d(V+T)=0$$

No. psp_dada

Date

第十三章 达朗贝尔原理

动静法：由达朗贝尔原理给出的求解动力学问题的静力学方法

§13-1 达朗贝尔原理

一、惯性力

定义：质点的惯性力 $\vec{F_I}=-m\vec{a}$　　$F_{Ix}=-ma_x=-m\ddot{x}$ …

意义：做加速运动的质点，对迫使其产生加速运动的物体（施力物体）的惯性反抗的总和

注意：1. 质点的惯性力不是真实力，而是质点对施力物体反作用力的合力

2. 质点的惯性力的作用点在施力物体上

二、质点的达朗贝尔原理（动静法）

原理：作用在质点的主动力、约束力和虚加的惯性力在形式上组成一平衡力系 $\vec{F}+\vec{F_N}+\vec{F_I}=0$

优点：动静法可以利用静力学提供的解题方法给动力学问题一种统一的解题格式

三、质点系的达朗贝尔原理

表述一：质点系中每个质点上作用的主动力、约束力和惯性力在形式上组成一平衡力系

$$\vec{F_i}+\vec{F_{Ni}}+\vec{F_{Ii}}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

表述二：作用在质点系上的所有外力与所有质点的惯性力在形式上组成一平衡力系

$$\sum_i \vec{F_i^{(e)}}+\sum_i\vec{F_{Ii}}=0,\ \sum_i\vec{M_O}(\vec{F_i^{(e)}})+\sum_i\vec{M_O}(\vec{F_{Ii}})=0$$

用动静法求解动力学问题时：

对平面任意力系 $\begin{cases}\sum \vec{F_{ix}^{(e)}}+\sum\vec{F_{Iix}}=0\\ \sum \vec{F_{iy}^{(e)}}+\sum\vec{F_{Iiy}}=0\\ \sum\vec{M_O}(\vec{F_i^{(e)}})+\sum\vec{M_O}(\vec{F_{Ii}})=0\end{cases}$　对空间任意力系 $\begin{cases}\sum \vec{F_{ix}^{(e)}}+\sum\vec{F_{Iix}}=0,\cdots,\cdots\\ \sum\vec{M_x}(\vec{F_i^{(e)}})+\sum\vec{M_x}(\vec{F_{Ii}})=0,\cdots,\cdots\end{cases}$

注：二矩式、三矩式等平衡方程形式仍适用

§13-2 刚体惯性力系的简化

惯性力系：质点系内每个质点都虚加惯性力后，这些惯性力形成的力系

刚体惯性力系的简化：利用静力学的力系简化理论，刚体惯性力系向空间任一点简化，一般得到一个力和一个力偶

力即主矢，作用点在简化中心　　主矢 $\vec{F_{IR}}=-m\vec{a_C}$　与刚体做什么运动无关，与简化中心无关

力偶的矩矢即主矩　　主矩 $\vec{M_{IO}}=-\sum\vec{M_O}(\vec{F_i^{(e)}})$　一般与简化中心有关

注：无论刚体做何种运动，无论向哪一点简化，惯性力系的主矢都由上式确定

下就刚体 ①平移 ②定轴转动 ③平面运动 讨论惯性力系的主矩

KOKUYO

No.

Date

1. 刚体平移

选质心C为简化中心，有: $\vec{M_{IC}}=0$，只简化为一个力 $\vec{F_{IR}}=-m\vec{a_C}$

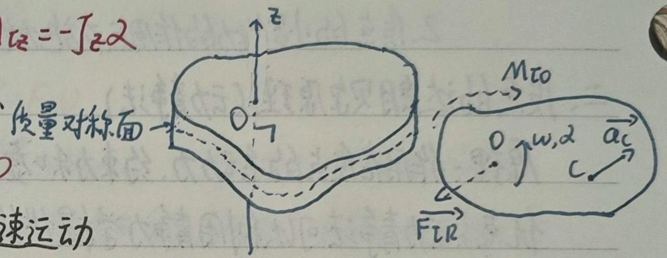
2. 刚体定轴转动

设转轴为z轴，向z轴上一点O简化，有 $M_{IO}=M_{Ix}\vec{i}+M_{Iy}\vec{j}+M_{Iz}\vec{k}$

其中 $M_{Ix}=J_{xz}\alpha-J_{yz}\omega^2$，$M_{Iy}=J_{yz}\alpha+J_{xz}\omega^2$，$M_{Iz}=-J_z\alpha$

特别地：若刚体有质量对称面且该面与转动轴垂直，简化中心取此平面与转轴的交点：

$J_{xz}=J_{yz}=0 \Rightarrow M_{IO}=M_{Iz}=-J_z\alpha$



① 刚体匀速转动，转轴不过质心

$\alpha=0$，$\vec{F_{IR}}=-m\vec{a_C}$，$M_{IO}=0$

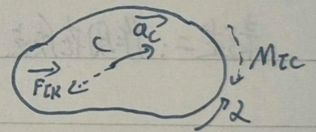
② 转轴通过质心，但刚体加速运动

$a_C=0$，$M_{IO}=-J_O\alpha$，$\vec{F_{IR}}=0$

③ 刚体匀速转动，且转轴通过质心

$\vec{F_{IR}}=0$，$\vec{M_{IO}}=0$

3. 刚体平面运动（平行于质量对称面运动）



选质心C为简化中心，有: $\vec{F_{IR}}=-m\vec{a_C}$，$M_{IC}=-J_C\alpha$

惯性积

假设刚体绕z轴转动，惯性积 $J_{yz}=\sum_i m_iy_iz_i$　$J_{xz}=\sum_i m_ix_iz_i$

转动惯量 J_z：描述刚体的质量分布相对于转轴的集中度

惯性积 J_{xz}，J_{yz}：描述刚体的质量分布相对于转轴的对称度

} 完整描述刚体绕定轴转动时的转动惯性

惯性主轴：与刚体质量对称面垂直的轴z ⇒ 惯性积 $J_{xz}=J_{yz}=0$

中心惯性主轴：通过质心的惯性主轴

§13-3 绕定轴转动刚体的轴承约束力

轴承全约束力
- 静约束力：由主动力引起，不能消除
- 附加动约束力：由惯性力系引起，可以消除

附加动约束力消除条件

刚体的转轴是其中心惯性主轴

静平衡：刚体的转轴过质心，且仅受重力一个主动力作用 ⟶ 刚体在任意位置可静止不动

动平衡：刚体的转轴是其中心惯性主轴 ⟶ 刚体在转动时不出现附加动约束力

动平衡 $\xRightarrow{\times}$ 静平衡

第十四章 虚位移原理

虚位移原理是研究静力学平衡问题的动力学方法，应用功的概念分析系统的平衡问题

§14-1 虚位移

一、约束

1.定义：限制质点(系)运动的条件称为约束，限制条件的数学方程称为约束方程

2.分类：
- 几何约束：限制质点(系)在空间中几何位置的条件 eg. $x^2+y^2=l^2$
- 运动约束：限制 运动情况 eg.纯滚动 ⇒ $v_A-r\omega=0$ $\xrightarrow{\text{可积分}}$ $x_A-x_{A_0}=r(\varphi-\varphi_0)$

可积分的运动约束等同于几何约束

- 定常约束：不随时间变化的约束
- 非定常约束：约束条件随时间变化 eg. $x^2+y^2=(l_0-vt)^2$

- 双侧约束：约束方程为等式
- 单侧约束：约束方程为不等式

- 完整约束：几何约束+可积分的运动约束
- 非完整约束：约束方程中包含坐标对时间的导数且不能积分成有限形式

⇒只讨论定常、双侧、完整的几何约束

二、虚位移

1.定义：在某瞬时 t，质点系在约束允许的条件下，可能实现的任何无限小的假想的位移

虚位移与时间、主动力因素无关，只与约束条件有关，可以分为线位移 δx 和角位移 $\delta\varphi$

2.对比：实位移是质点系从时间 t 到 t+dt 真实发生的位移，它与约束条件、时间长度、主动力、运动的初始条件都有关

三.虚功

定义：力在虚位移上做的功 $\delta W=\vec{F}\cdot\delta\vec{r}$ $\delta W=M\cdot\delta\varphi$

性质：在质点系的任一虚位移中，理想约束提供的约束力所做的虚功之和为零

四.虚位移原理

对于具有理想约束的质点系，其平衡的充要条件是：作用于质点系的所有主动力在任一虚位移中所做的功的和为零 $\Sigma\delta W_{F_i}=\Sigma\vec{F_i}\cdot\delta\vec{r_i}=0$ W_{F_i} 表示作用在质点 m_i 上的主动力的虚功

要点：建立各虚位移之间的数量关系.