1.(1)$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ (2)$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ (3)$\begin{pmatrix} 18 & 18 \\ 49 & 10 \end{pmatrix}$

2.$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

3.(1)$\begin{pmatrix} 35 \\ 6 \\ 49 \end{pmatrix}$

(2)$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 12 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(3)16

(4)$\begin{pmatrix} k_1a_{11} & k_1a_{12} \\ k_2a_{21} & k_2a_{22} \\ k_3a_{31} & k_3a_{32} \end{pmatrix}$

(5)$\begin{pmatrix} k_1a_{11} & k_2a_{12} & k_3a_{13} \\ k_1a_{21} & k_2a_{22} & k_3a_{23} \end{pmatrix}$

(6)$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$

(7)$\sum_{i}^{3}\sum_{j}^{3} a_{ij}x_ix_j$

(8)$\begin{pmatrix} k_1^n & & \\ & k_2^n & \\ & & k_3^n \end{pmatrix}$

(9)$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(10) $\begin{cases} \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} & n=2k, \quad k\in N \\ 5^{n-1}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} & n=2k+1, \quad k\in N \end{cases}$

(11) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -6 & -3 & -6 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}^n = 3^{n-1}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -6 & -3 & -6 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

(12)令 $A=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ，则有 $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E+A$，易得 $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$n\ge 3$ 时 $A^n=0$ 。考虑 $EA=AE=A$

则原式 $=(E+A)^n=\sum_{i=0}^{n} C_n^i E^i A^{n-i}=C_n^0 E+C_n^1 A+C_n^2 A^2$

代入以后得到答案 $\begin{pmatrix} 1 & na & nb+\frac{n(n-1)}{2}a^2 \\ 0 & 1 & na \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(13) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ & -1 & 2 \\ & & 1 \end{pmatrix}$ ， $A^2=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ ， $A^n=\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ & -1 & 2 \\ & & 1 \end{pmatrix} & (n=2k+1, k\in N) \\ E & (n=2k, k\in N) \end{cases}$

(14)原式 $=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}^{2n} & \\ & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{2n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 25^n & & & \\ & 25^n & & \\ & & 1 & \frac{4^n-1}{3} \\ & & & 4^n \end{pmatrix}$

提示： $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ & 2 \end{pmatrix}^{2n}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 4 \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} 1 & a_n \\ & 4^n \end{pmatrix}$，其中 $a_1=1$, $a_n=1+4a_{n-1}$

4.(1) -1 (2) 1

(3)原式 $=\left|\begin{pmatrix} -3 & 4 & & \\ 4 & 3 & & \\ & & -1 & 1 \\ & & -3 & 2 \end{pmatrix}\right|^{2n}=25^{2n}=5^{4n}$

5.(1)$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(2)$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{2} & & \\ & & \frac{1}{3} & \\ & & & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

(3)$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

(4)$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

6.$a_{ij}^* = A_{ji}$ ，$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

7.构造增广矩阵

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & & & & 1 & \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & & & & & 1 \end{array}\right)$$

通过对增广矩阵进行初等行变换把左边变成单位阵右边自然就是逆矩阵

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & & & & & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ & 1 & & & & \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & & 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ & & & 1 & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & & 1 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{array}\right)$$

8.解法很多，提一种简单的参考思路：

方程可以转写成 $A^{-1}\cdot\left(A-E\right)\cdot B=E$ 则有 $B=\left(A-E\right)^{-1}\cdot A$。然后分块求逆就完事了

答案是 $B=\begin{pmatrix}\frac{11}{12} & \frac{1}{6} & 0 & 0\\ \frac{1}{6} & \frac{7}{6} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 3 & -1\end{pmatrix}$

9.解法不唯一，参考思路

$\left|A\right|=4$,通过 $A^{-1}=\frac{A^*}{\left|A\right|}$ 改写方程得到 $\left(4E-2A\right)X=E$。算就完事了。

答案 $X=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$

10.提示 $A\left(E-C^{-1}B\right)^T C^T=C\left(E-C^{-1}B\right)A^T=\left(C-B\right)A^T=E$ 求逆

答案 $A=\begin{pmatrix}1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ 0 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$

11.(1) $\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$

(2)原式

$=\left(CB^T-E\right)B^{-T}A^T+\left(A^{-T}B^T\right)^{-1}$

$=CA^T-B^{-T}A^T+B^{-T}A^T$

$=CA^T$

$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

12. (1) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$ R=3

(2) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & a\\ 0 & 1 & -1 & b\\ 0 & 0 & 0 & a+b+c\end{pmatrix}$ 分情况讨论 a+b+c=0 R=2; a+b+c≠0，R=3

(3) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ x-2 & 0 & 0\\ 0 & y-6 & 0\end{pmatrix}$ 分情况讨论 x=2 且 y=6 时 R=1。x=2，y≠6，R=2。x=2，y≠6 时 R=2;

其他情况 R=3

(4)方法不唯一，举个栗子构造非奇异矩阵

$$P=\begin{pmatrix}A^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left|PQ\right|=\left|\begin{pmatrix}E & A^{-1}B\\ B^{T} & b\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}E & A^{-1}B\\ 0 & b-B^{T}A^{-1}B\end{pmatrix}\right|=b-B^{T}A^{-1}B$$

完事儿了。

13.(1)16 (2)16 (3)2 (4)1/16

14.$\left|A+B\right|=8\left|\left(\alpha+\beta,X,Y,Z\right)\right|=8\left|A\right|+8\left|B\right|=40$

15.略

16.略

17.略

18.略。提示：初等行变换可以用 $A_{m\times n}=P_{m\times m}B_{m\times n}$ 表示

19.$\left(E-A\right)\left(E+A+A^{2}+\cdots+A^{k-1}\right)=E-A^{k}=E$

20.反证法，过程略

21.$\left|M\right|=\left|A\right|\left|B\right|$ $M^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1}\\ & B^{-1}\end{pmatrix}$

22.答案不唯一，例子：$R\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}E & B\\ CA^{-1} & D\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}E & 0\\ CA^{-1} & 0\end{pmatrix}$

23.略。提示：$\left|A^{2}+AB\right|=\left|A\right|\left|A+B\right|=\left|B^{2}+AB\right|=\left|A+B\right|\left|B\right|$

24.(1)$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2n-2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3)−4

(4) $\frac{1}{2}A+\frac{3}{2}E$

(5)2

(6)0

(7)0

(8) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 22 & 61 & 43 \end{pmatrix}$

(9)1

(10) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(11)1

(12)0

(13) $\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\frac{1331}{100}$

25.CDACB ACBAC C

26.

(1.) F $A^2-A=A(A-E)=0$

(2.) F 比如 $A=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

(3.) T $R(AB)\le n$ 显然不满秩

(4.) F 显然不能在一般的 ABCD 方阵成立

(5.) T $B=A^*A$ $C=AA^*$ $b_{ij}=\sum_{k=1}^{n}A_{ki}a_{kj}=|A|\delta_{ij}$ $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=|A|\delta_{ij}$.（某一行（列）的元素与另一行（列）对应元素的代数余子式乘积之和等于 0）

(6.) T 参考上一题结论 $AA^{*}=|A|E$

(7.) T 令 $P=BA^{-1}$

(8.) F 显然错误，不明白的话好好复习行列式的知识

(9.) F 反例 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

(10.) F 反例 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

(11.) T 对于 n 阶方阵来说，r<n−1 时伴随矩阵是 0 矩阵

(12.) F 参考上一题

(13.) T 题目条件可以直接导出 n 个列向量线性相关，矩阵奇异

(14.) T 注意 A 和 B 的行数和列数