这次作业因为大部分题目解不唯一，所以有些题在改的时候可能有看错改错的情况，见谅！

再次说明：打分还是看作业完成的情况，题目对错本身不影响分数，本答案仅供参考

1.

$$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$$

$$\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$$

$$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$$

$$\overrightarrow{DA}=-\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$$

2.题目等价于证明原式是 a,b,c 共面的充分条件。

$$\because a\times b+b\times c+c\times a=0$$

$$\therefore\left(a\times b+b\times c+c\times a\right)\cdot c=a\times b\cdot c+b\times c\cdot c+c\times a\cdot c=\left[a\quad b\quad c\right]=0\cdot c=0$$

$$\therefore\left[a\quad b\quad c\right]=0$$

因此 a,b,c 共面

3.

$$\left(a+b+c\right)^2=a^2+b^2+c^2+2a\cdot b+2a\cdot c+2b\cdot c=3+2\left(a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c\right)=0$$

$$a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a=-\frac{3}{2}$$

4.（1） $S=\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right|=\left|\left(-2,-1,-2\right)\right|=3$

(2) $V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OA}\quad\overrightarrow{OB}\quad\overrightarrow{OC}\right]\right|=\frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&-2&0\\1&1&1\end{pmatrix}\right|=\frac{\left|-5\right|}{6}=\frac{5}{6}$

5.设 $d=\left(x,y,z\right)$

$$\begin{cases}2x-2y+z=0\\ \begin{vmatrix}x&y&z\\1&0&0\\0&1&-2\end{vmatrix}=0\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-2y+z=0 \\ 2y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

$$d=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right) or \left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

6.

$$\begin{aligned} &\left[(a+b)\times(b+c)\right]\cdot(c+a) \\ &=(a\times b+a\times c+b\times c)\cdot(c+a) \\ &=(a\times b)\cdot c+(b\times c)\cdot a \\ &=2(a\times b)\cdot c \\ &=4 \end{aligned}$$

7.标准方程

$$\frac{x-1}{2}=-y+1=\frac{-z+1}{3}\ \text{ or } \frac{x-3}{2}=-y=\frac{-z-2}{3}\ 等$$

参数方程

$$\begin{cases} x=2t+1 \\ y=-t+1 \\ z=-3t+1 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} x=2t+3 \\ y=-t \\ z=-3t-2 \end{cases} \quad 等$$

8.直线标准方程 $\frac{-x+3}{8}=\frac{y+2}{7}=\frac{2z}{11}$，方向向量为 $(-16,14,11)$

则根据题目要求平面方程为：$-16(x-2)+14y+11(z+3)=0$

（或者写成 $-16x+14y+11z+65=0$ 等

9．直线和平面法向的方向向量为

$$\begin{aligned} a&=(4,5,6) \\ b&=(7,8,9) \end{aligned}$$

所求直线的方向 $c=a\times b=3(-1,2,-1)$, $l:\frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-1}$

（也可以用两个平面方程表示

10.(1) $m=4,n=-1$

(2) $-8-2m+2n=0\Rightarrow n-m=4$ 符合条件的任意 m,n 都可以成立，不唯一。

(3)两条直线平行或者相交都可以判断其共面，平行的条件在（1）已有答案，现讨论相交条

件，将 L1 参数方程代入 L2：$\frac{-3-4t}{2}=\frac{3+mt}{-2}=\frac{3+2t}{n}$ 此时可以取定 t 的值求解 m 和 n，例如$t=0;n=-2,m=$任意实数。

(4) $\theta=\arccos\left|\left(\frac{(-4,-4,2)\cdot(2,-2,-1)}{6\cdot 3}\right)\right|=\arccos\left(\frac{1}{9}\right)$

11.(1)平行$(-2,-7,3)\cdot(4,-2,-2)=0$

(2)垂直

(3)直线在平面内

12.投影点 $A'=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\cdot(2,4,3)\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)=(3,3,3)$

距离$\left|\overrightarrow{AA'}\right|=\sqrt{2}$

13.简便方法：经过观察，L1 上的点 $M_1(-1,-3,2)$ 和 L2 上的点 $M_2(2,-1,1)$ 满足

$$\overrightarrow{MM_1}=(3,2,-1);\overrightarrow{MM_2}=(6,4,-2)$$

显然三点共线，则直接得到方程

$$L:\frac{x+4}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-3}{-1}$$

通用方法：通过平面束寻找过 M、L1 和 M、L2 的两个平面，通过两平面相交得到直线一般方程的形式

$$\begin{cases}x+3z-5=0\\-7x+13y+5z+22=0\end{cases}$$

14.根据题设条件，显然π平面的法向量满足形式$(a,b,0)$ ，$M_1(0,0,1)$ 在直线上。M_0 到直线的投影点满足

$$\overrightarrow{M_1M_0'}=(1,-1,0)\cdot\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{M_0M_0{}'}=\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)-(1,-1,0)=\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

要求平面过$\overrightarrow{M_0M_0{}'}$ 则得到法向量

$$-a+\frac{b}{2}=0$$
$$(1,2,0)$$

进而得到平面方程$(x-1)+2(y+1)+0(z-1)=0$ 化简$x+2y+1=0$

15.解法不唯一，举例：

平面法向量为$(4,-1,1)$，构造特殊的有轴平面束

$$(2x-4y+z)+\mu(3x-2z-9)=0$$

$$(3\mu+2)x-4y+(1-2\mu)z-9\mu=0$$

为了得到与题设平面垂直的平面方程，我们需要

$$4(3\mu+2)+4+(-2\mu+1)=0$$

得到$\mu=-\frac{13}{10}$。代入平面束方程可以得到投影直线方程

$$\begin{cases}4x-y+z=1\\ -\frac{19}{10}x-4y+\frac{36}{10}z+\frac{117}{10}=0\end{cases}$$

16.取直线上一点$M(1,0,1)$，将直线方程代入平面方程易得直线与平面的交点$Q(2,1,0)$。

平面单位法向量为$\left(\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$。$\overrightarrow{QM}=(-1,-1,1)$。投影点满足

$$\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{QM}\cdot\left(\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)。$$

$$\overrightarrow{QM'}=\overrightarrow{QM}-\overrightarrow{M'M}=\left(-\frac{4}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

易得$l_0:\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$ 或$\begin{cases}x-y+2z-1=0\\ x-3y-2z+1=0\end{cases}$

17.(1) $2x+2y-3z=0$

(2) $\frac{\pi}{2}$

18.(1)C

(2)C