1.（1）

$$\alpha=3\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=\begin{pmatrix}9\\1\\7\\2\end{pmatrix}$$

（2）

$$\alpha=-2\alpha_1-5\alpha_2+2\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-15\\-13\\-10\end{pmatrix}$$

2.参考证明

必要性：令 $B=\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_K\right)$ 为了满足向量组线性无关条件，我们知道 $k\leq n$ 且

$R\left(B\right)=k$

$$R\left(AB\right)\leq\min\left(R\left(A\right),R\left(B\right)\right)=\min\left(n,k\right)=k$$

$$k=R\left(A^{-1}AB\right)\leq\min\left(R\left(A^{-1}\right),R\left(AB\right)\right)=R\left(AB\right)$$

$$R\left(AB\right)=k$$

$A\alpha_1,A\alpha_2,\ldots,A\alpha_k$ 线性无关是 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ 线性无关的必要条件。

充分性：$k\leq n$ 且 $R\left(AB\right)=k$

$$R\left(B\right)\leq\min\left(R\left(A^{-1}\right),R\left(AB\right)\right)=\min\left(n,k\right)=k$$

$$k=R\left(AB\right)\leq\min\left(R\left(A\right),R\left(B\right)\right)=R\left(B\right)$$

$$R\left(B\right)=k$$

$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ 线性无关是 $A\alpha_1,A\alpha_2,\ldots,A\alpha_k$ 线性无关的必要条件。

3.

(1)F 反例 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}1&1&0\end{pmatrix}$ $\alpha_3=\begin{pmatrix}1&1&0\end{pmatrix}$

(2)T 显然成立

(3)F 反例 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}$ $\alpha_3=\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}$

(4)F 反例同(1)

(5)T

(6)F 需要非零常数才能说线性相关

(7)T 这是一个重要的定理

(8)F $\alpha_1=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$ $\beta=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}$

4.令 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\right)$

$$\det\left(A\right)=\begin{vmatrix}a & 1 & \cdots & 1\\ 1 & a & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a-n+1 & 1 & \cdots & 1\\ a-n+1 & a & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a-n+1 & 1 & \cdots & a\end{vmatrix}=\left(a-n+1\right)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & a & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & a\end{vmatrix}$$

$$=\left(a-n+1\right)\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & a-1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & \cdots & a-1\end{vmatrix}=\left(a-n+1\right)\left(a-1\right)^{n-1}$$

$a=1$ 或 $a=n-1$

5.令 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k\right)=\begin{pmatrix}B_{k\times k}\\ C_{(n-k)\times k}\end{pmatrix}$

$$\det\left(B\right)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_k\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1^k & a_2^k & \cdots & a_k^k\end{vmatrix}=\prod_{k\geq i>j\geq 1}\left(a_i-a_j\right)$$

（这是一个典型的 Vandermonde 行列式）同时由于 $a_i\neq a_j, i\neq j$ 且 $k\leq n$，则有 $R\left(A\right)=R\left(B\right)=k$ ，因此向量组线性无关。

6.(1)

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 4 & 0 & 1\end{pmatrix}\overset{c}{\sim}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$R\left(A\right)=3$$

(2)不唯一。若选 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

(3)则 $\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$ $\alpha_5=\frac{1}{2}\alpha_1-\frac{1}{2}\alpha_2+\frac{1}{2}\alpha_3$

7.假设存在两个不同的表达式，分别为$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$ 和$\beta=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3$

$$(k_1-l_1)\alpha_1+(k_2-l_2)\alpha_2+(k_3-l_3)\alpha_3=\beta-\beta=0$$

若表达式不相同则说明$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，与题设矛盾，因此表达式是唯一的。

8.若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关必然存在不全为零的系数使得$l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3=0$，同时$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，两式相加得

$(k_1-l_1)\alpha_1+(k_2-l_2)\alpha_2+(k_3-l_3)\alpha_3=\beta$

当l_1,l_2,l_3不全为 0 时，必然导致β的表示不唯一与题设矛盾。

9.(1)$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关则必有$\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$\alpha_2,\alpha_3$线性无关且$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关则$\alpha_1$可以被$\alpha_2,\alpha_3$线性表示。

(2)假设α_4可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示为$\alpha_4=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$。考虑到(1)中结论，我们可以知道$\alpha_1=l_2\alpha_2+l_3\alpha_3$，代入$\alpha_4$的表达式$0=(k_1l_2+k_2)\alpha_2+(k_1l_3+k_3)\alpha_3-\alpha_4$，与$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关矛盾。

10.由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$线性无关，则$A_{n\times4}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta),(n\geq4)$，$R(A)=4$。设$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta)$,由于$B\underset{c_3-4c_4}{\overset{\substack{c_1-2c_4\\c_2-3c_4}}{\sim}}A\Rightarrow R(B)=R(A)=4$．$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta$线性无关。

11.由题可设，α 由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$表示为$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$。同时已知$\alpha$ 不可用α_1,α_2表示即得到$k_3\neq0$。据此可以给出$\alpha_3=\dfrac{1}{k_3}\alpha-\dfrac{k_1}{k_3}\alpha_1-\dfrac{k_2}{k_3}\alpha_2$，即得证。

12.设$A_{m\times n}=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n),B_{m\times n}=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$其中$m\geq n$并且存在矩阵系数$C_{n\times n}$ 使得$A=BC$ 。依题意有$R(BC)=R(A)=n$。$R(BC)\leq\min(R(B),R(C))$可知$R(B)\geq R(BC)=n$,同时对于$m\times n$ 矩阵 B 也必须满足$R(B)\leq n$。综上$R(B)=n$，得证。

13. $A=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n), R(A)=r$，增广矩阵 $B=(A,\beta)$，令 $x=(k_1,k_2,\ldots,k_n)$。根据题设 $R(B)=R(A)$ 是 $Ax=\beta$ 的解存在的充要条件，解存在等价于 β 能被 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性表示，表达式为 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$ 。

14. $A_{m\times n}=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n), B_{m\times n}=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$。取其中最大线性无关组组成新的矩阵 $A'_{m\times r}, B'_{m\times r}$ 根据题设存在矩阵 $C_{r\times r}$ 使得 $A'=B'C$，$R(B')=R(A')\le\min(R(B'),R(C'))=r$。因此 $R(C)=r$，矩阵 $C_{r\times r}$ 满秩，因此可逆，即得到 $B'=A'C^{-1}$。证毕

15. 充分性：由于 $A=BC$，写成分量形式则有 $\alpha_i=\sum_j^n C_{ij}\beta_j$ 即 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 线性表示。

必要性：由于 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 线性表示，考虑关系 $\alpha_i=\sum_j^n C_{ij}\beta_j$，写成矩阵形式得到 $A=BC$.

16. 令 $C=(k,l,m)$ 根据题设得到一组方程

$$\begin{cases} AX=k_1X+k_2AX+k_3A^2X \\ A^2X=l_1X+l_2AX+l_3A^2X \\ A^3X=m_1X+m_2AX+m_3A^2X \end{cases}$$

得到

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

17.开放题，列向量等价要求只能进行初等列变换。只要构造出 A 行变换成 B 以后秩不一样的矩阵即可。

18. 取 $a,b\in V_1$，$a+b=(a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots,a_n+b_n)$，满足条件

$x_1+x_2+\cdots+x_n=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\ldots+(a_n+b_n)=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i=0$

$\lambda a=(\lambda a_1,\lambda a_2,\ldots,\lambda a_n)$ 满足条件 $\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}\lambda a_i=\lambda\sum_{i=1}^{n}a_i=0$ 。V_1 对加法和乘法封闭，是向量空间。

$c\in V_2$，$\lambda c=(\lambda c_1,\lambda c_2,\ldots,\lambda c_n)$，$\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}\lambda c_i=\lambda\sum_{i=1}^{n}a_i=\lambda$，即 $\lambda c\notin V_2$,对乘法不封闭。因此 V_2 不是向量空间.

19.(1) $\det(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\neq 0, R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$ 则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关是 R^3 的基。

$\det(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\neq 0, R(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=3$ 则 β_1,β_2,β_3 线性无关是 R^3 的基。

（2）

$$P=A^{-1}B=\begin{pmatrix}-27 & -71 & -41\\ 9 & 20 & 9\\ 4 & 12 & 8\end{pmatrix}$$

(3)前一组基下的坐标 $(1,1,-1)$，后一组基下的坐标 $\left(-\frac{53}{4},\frac{19}{2},-\frac{31}{4}\right)$

20.生成空间 $V:\{x=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3\mid\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathrm{R}\}$ ，且 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$ 。

21. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)$，$B=(\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\ldots,\alpha_m)$

$R(A)=t\quad R(A\quad B)=s\quad R(B)\leq m-r$ ，根据 $R(A,B)\leq R(A)+R(B)$ 得到

$s\leq t+R(B)\leq t+m-r$ 即 $t\geq r+s-m$

22. $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 是一组基，向量在空间中分解得到 $\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$

$\langle\alpha,\alpha\rangle=\sum_{i=1}^{n}k_i\langle\alpha,\alpha_i\rangle=0$ ，得证。

23. $\langle\beta_1,\beta_2\rangle=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_j\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_j\delta_j^i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$

24.代入 23.题公式得到$\langle \beta_1, \beta_2 \rangle = 2 - 1 + 2 = 3$

25.过程略，结果$\beta_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}}{10} \\ -\frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{5} \\ \frac{\sqrt{10}}{5} \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{10}}{5} \\ \frac{\sqrt{10}}{5} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix}$

26.(1) $A^T A = E \Rightarrow \left(A^T A\right)^T = E^T \Rightarrow \left(A^T\right)^T A^T = E$

(2) $AB\left(AB\right)^T = ABB^T A^T = AA^T = E$

27. $A = \left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\right)$ $B = \left(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t\right)$

充分性 $R\left(B\right) \le \min\left(R\left(A\right), R\left(K\right)\right) \Rightarrow R\left(K\right) \ge t$ 又因为 $R\left(K\right) \le t$ 所以必然有 $R\left(K\right) = t$

必要性 $R\left(B\right) \le \min\left(R\left(A\right), R\left(K\right)\right) = \min\left(r, t\right) \Rightarrow R\left(B\right) \le t$ 同时使用 Sylvester 不等式得到 $R\left(B\right) = R\left(AK\right) \ge R\left(A\right) + R\left(K\right) - r = t$ 则有 $R\left(B\right) = t$

28. $A = \left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\right)$ $B = \left(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s\right)$存在系数矩阵$K$使得$B = AK$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & & & & 1 \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$R\left(B\right) = R\left(AK\right) = R\left(K\right)$。

$$\det(K)=\begin{vmatrix}1 & & & & 1\\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & 1 & 1\end{vmatrix}=1+(-1)^{s+1}$$

s 奇数无关，偶数相关

29. $n=R(E)=R(BA)\le R(A)$ 且 $R(A)\le n$ 则 $R(A)=n$ 无关

30. $A=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)$ $D=\det(A^TA)=\det(A^T)\det(A)=0$

31．

(1)充分性 $X^TAX=(X^TAX)^T=X^TA^TX=X^T(-A)X=-X^TAX\Rightarrow X^TAX=0$

必要性 $X^TA^TX=(X^TAX)^T=0$， $X^T(A+A^T)X=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}X_iX_j(A_{ij}+A_{ji})=0$ 为了对任意列向量成立，这要求 $A_{ij}+A_{ji}=0$ 则 $A^T=-A$

(2)构造满秩矩阵 $\begin{pmatrix}A^{-1} & \\ \alpha^T & 1\end{pmatrix}$ 并通过初等变换可以得到

$$R\begin{pmatrix}A & \alpha\\ \alpha^T & 0\end{pmatrix}=R\left(\begin{pmatrix}A^{-1} & \\ \alpha^T & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & \alpha\\ \alpha^T & 0\end{pmatrix}\right)=R\begin{pmatrix}E & A^{-1}\alpha\\ \alpha^TA+\alpha^T & \alpha^T\alpha\end{pmatrix}$$
$$=R\begin{pmatrix}E & A^{-1}\alpha\\ 0 & \alpha^T\alpha-\alpha^TAA^{-1}\alpha+\alpha^TA^{-1}\alpha\end{pmatrix}$$
$$=R\begin{pmatrix}E & A^{-1}\alpha\\ 0 & \alpha^T\alpha-\alpha^T\alpha+0\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}E & A^{-1}\alpha\\ 0 & 0\end{pmatrix}=n$$

32.设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$，可以取 n 个 $\beta_i=(\delta_1^i,\delta_2^i,\ldots,\delta_n^i)$。据此可得

$$\forall i=1,2,\ldots,n,\alpha_i=0$$

33.

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P=(\alpha_2,\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$$

$$P=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

坐标$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}$

34.

$$\begin{aligned}&(A-3E)(A-3E)^T\\&=AA^T-3A-3A^T+9E\\&=A^2-6E+8E+E\\&=E\end{aligned}$$

35.

(1)3

(2)-1

(3)27

(4)0

(5)-1

(6) $abc=1$

36.(1)C　(2)C　(3)A

37.

(1)F 反例：常数全为 0

(2)F 注意“全不为零”和“不全为零”的区别

(3)F 反例可以构造向量组包含一组标正基和一个零向量。其中一个基不能通过其他向量表示。

(4)F 显然错误

(5)F 显然错误

(6)T 符合定义

(7)F $s\neq t$ 矩阵规模不一样的时候不能说等价

(8)T 只要把系数写成矩阵形式就是C。完全等价。注意C可逆不是线性表示的必要条件。

(9)T 等价于这一组向量与空间内任意向量有关，通过矩阵的秩可以证明。

(10)F 显然错误。反例比如两个三维矢量确定的平面空间

(11)F 第一组线性相关。可以通过 3 阶系数矩阵不满秩简单判断。