1(1)

$$R\begin{pmatrix}2&4&-1\\1&-2&1\\3&6&-2\end{pmatrix}=3=R\begin{pmatrix}2&4&-1&6\\1&-2&1&4\\3&6&-2&-1\end{pmatrix}$$

有解

(2)

$$R\begin{pmatrix}2&4&-1\\1&-2&1\\3&6&2\end{pmatrix}=3=R\begin{pmatrix}2&4&-1&1\\1&-2&1&4\\3&6&2&9\end{pmatrix}$$

有解

2.

$$\det\begin{pmatrix}1&a&1\\a&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix}=3-3a^2=0\Rightarrow a=\pm1$$

3．

$$R(A)=R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=R\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&2\\2&3&a+2&4\\3&5&1&a+8\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&2\\0&0&a+1&0\\0&0&0&a+1\end{pmatrix}=\begin{cases}2,\ a=-1\\4,a\neq-1\end{cases}$$

$$R(A,\beta)=R\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&a+1&0&b\\0&0&0&a+1&0\end{pmatrix}=\begin{cases}4,a\neq-1\\3,a=-1\text{且}b\neq0\\2,a=-1\text{且}b=0\end{cases}$$

(1) 当 $a=-1,b\neq0$ 不能被线性表出

(2) 当 $a\neq-1$ 有唯一解

4.(1)根据题设得知基础解系维数 $n-r=4-3=1$

$\frac{1}{3}A(\alpha_1+2\alpha_2)=\beta$

$\frac{1}{6}A(2\alpha_2+4\alpha_3)=\beta$

则有 $A\left(\frac{\alpha_1+2\alpha_2}{3}-\frac{2\alpha_2+4\alpha_3}{6}\right)=0$ ，可以令基础解为 $\xi=\frac{\alpha_1+2\alpha_2}{3}-\frac{2\alpha_2+4\alpha_3}{6}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}\\ \frac{5}{3}\\ \frac{5}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$

(2)通解可以为 $x=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ 3\\ 3\\ \frac{4}{3}\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}\frac{1}{6}\\ \frac{5}{3}\\ \frac{5}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$

5.(1) 根据题设得

$$R\begin{pmatrix}3 & 2 & 3 & -2\\ 2 & 1 & 1 & -1\\ 2 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3}\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3}\end{pmatrix}=3$$

基础解系维数 $n-r=1$ 。令 $x_4=1$ 则有基础解系

$$\xi=\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\ -3\\ -\frac{4}{3}\\ 1\end{pmatrix}$$

通解为

$$x=k\xi=k\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\ -3\\ -\frac{4}{3}\\ 1\end{pmatrix}$$

(2)

$$R\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 26 & -22 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

基础解系维数$n-r=2$。令

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

代入以后可以得基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

通解

$$x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = k_1\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6.(1)

$$R\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

对应齐次方程的基础解系维数$n-r=2$.基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

特解

$$\eta^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

通解

$$x=\eta^{*}+k_1\xi_1+k_2\xi_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

(2)

$$R\begin{pmatrix}1&3&5&-4&0&1\\1&3&2&-2&1&-1\\1&-2&1&-1&-1&3\\1&2&1&-1&-1&3\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}1&0&0&0&-3&7\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&-5&10\\0&0&0&1&-7&14\end{pmatrix}$$

$$=R\begin{pmatrix}1&3&5&-4&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&0&0&1&-7\end{pmatrix}=4$$

对应齐次方程的基础解系维数$n-r=5-4=1$.基础解系

$$\xi=\begin{pmatrix}3\\0\\5\\7\\1\end{pmatrix}$$

特解

$$\eta^{*}=\begin{pmatrix}4\\0\\5\\7\\-1\end{pmatrix}$$

通解

$$x=\eta^{*}+k\xi=\begin{pmatrix}4\\0\\5\\7\\-1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}3\\0\\5\\7\\1\end{pmatrix}$$

7.

$$R\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 2a+1 & 3 & a+2 & 3 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1-a \end{pmatrix} = \begin{cases} 1, a=1 \\ 3, else \end{cases}$$

$$R\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 2a+1 & 3 & a+2 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1, a=1 \\ 2, a=-2 \\ 3, else \end{cases}$$

$a=1$ 无穷多解。$a=-2$ 无解。其他情况有唯一解。

无穷多解时的通解

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

10(1) $A\eta = \sum_{i=1}^{n} k_i A\eta_i = \sum_{i=1}^{n} k_i\beta = \left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right)\beta = 0\beta = 0$

(2) $A\eta = \sum_{i=1}^{n} k_i A\eta_i = \sum_{i=1}^{n} k_i\beta = \left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right)\beta = 1\beta = \beta$

11.(1)假设存在不全为 0 的系数 $\{k, k_1, k_2, \ldots, k_{n-r}\}$ 使得 $k\eta + k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} = 0$。

同时根据题设条件有：$A\left(k\eta + k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}\right) = k\beta + \sum_{i}^{n-r} k_i A\xi_i = k\beta$ 。因此

$k=0$，即存在不全为 0 的 $\{k_1, k_2, \ldots, k_{n-r}\}$ 使得 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} = 0$。这等价于基础解系各个向量线性相关，与题设矛盾。因此不存在不全为 0 的系数 $\{k, k_1, k_2, \ldots, k_{n-r}\}$ 使得 $k\eta + k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} = 0$。即 $\eta, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}$ 线性无关。

(2)首先证明它们是解向量

$$A(\eta + \xi_i) = A\eta + A\xi_i = \beta + 0 = \beta \quad (i = 1, 2, \ldots, n-r)$$

然后证明线性无关，根据(1)结论易得 $R(\eta, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}) = n-r+1$。进行初等列变化得到的矩阵秩不变，则 $R(\eta, \xi_1+\eta, \xi_2+\eta, \ldots, \xi_{n-r}+\eta) = R(\eta, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}) = n-r+1$ 。证毕

12.首先得到基础解系维数 $n-r = n-n+1 = 1$。设 $\xi = (A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1n})^T$ 。由于行列式某

一行（列）元素与另一行（列）对应元素代数余子式乘积之和为 0，易得

$$A\xi=\begin{pmatrix}\det(A)\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

13.略，通过基础解系构造矩阵 $B=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r})$ 即可。

14.首先，三条直线在同一平面内，并且不相互平行，则必然两两相交。可能的位置关系只有交点位置不重合和三条直线交于同一个点两种。由此可以列出方程并得到对应的增广矩阵

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&2\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a\\-b\\-c\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-a\\1&2&-b\\1&3&-c\end{pmatrix}$$

$R\begin{pmatrix}1&1&-a\\1&2&-b\\1&3&-c\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}1&1&-a\\0&1&a-b\\0&0&2b-a-c\end{pmatrix}=\begin{cases}2,2b=a+c\\3,else\end{cases}$。显然当 $2b=a+c$ 时方程有解，则三线相交于同一点，而其他情况下两两相交并且交点不重合。

15.假设三者线性相关，根据题设必定存在系数使得 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$。代入方程组得到

$$\begin{cases}k_1\left(a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2\right)+k_2\left(a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+a_{13}a_{23}\right)=0\\k_1\left(a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+a_{13}a_{23}\right)+k_2\left(a_{21}^2+a_{22}^2+a_{23}^2\right)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow k_1^2\left(a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2\right)+2k_1k_2\left(a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+a_{13}a_{23}\right)+k_2^2\left(a_{21}^2+a_{22}^2+a_{23}^2\right)=0$$

另外考虑到

$$\begin{aligned}\langle\beta,\beta\rangle&=k_1^2\alpha_1^2+2k_1k_2\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle+k_2^2\alpha_2^2\\&=k_1^2\left(a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2\right)+2k_1k_2\left(a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+a_{13}a_{23}\right)+k_2^2\left(a_{21}^2+a_{22}^2+a_{23}^2\right)\\&=0\end{aligned}$$

与 β 是非零解向量矛盾，因此 α_1,α_2,β 线性无关。

16.β 是基础解系，其维数为 $n-r=1$。则可以得到

$$A^T\beta=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\beta^TA=\begin{pmatrix}\beta^T\alpha_1&\beta^T\alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\end{pmatrix}$$

因此 α_1,α_2 是 $A^T\beta=0$ 的两个解，并且根据条件它们线性无关。并且该方程基础解系维数为 $n-r=2$。因此 A 是方程 $A^T\beta=0$ 的基础解系。

17. $R(A)=3$,基础解系维数为 1。根据题设条件得到基础解系和特解分别为

$$\xi=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}\quad,\quad \eta^*=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

通解为

$$x=\eta^*+k\xi=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$$

18.(1)D　(2)B　(3)A　(4)C　(5)D　(6)D　(7)C　(8)A

19.(1)

$$k\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}_{n\times 1}$$

(2)1

20.(1)
1)F 显然这个不是无解的充分条件
2)F 显然这个也不是无解的充分条件
3)F 这个条件不能保证增广矩阵的秩为 n，反例可以回头看看 12 题
4)T 这个条件能够保证增广矩阵的秩小于等于 m，进而保证系数矩阵与增广矩阵的秩相等

(2)

1)T $AX-\beta=0$ 可以说明存在不全为 0 的系数使得 $k\beta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-r}\alpha_{n-r}=0$

2)F 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性相关依旧可能出现 $R(A)<R(A,\beta)$

3)T 简单检验加法封闭性 $A(X_1-X_2)=0\neq\beta$,无法构成向量空间。

4)T 条件可以保证 $R(A)=R(A,\beta)=n$

(3)
1)T 基础解系是解集中的任何一个最大线性无关组，其向量数为解集 S 的秩 $n-r$ 。

2)T $R(AB)\le\min(R(A),R(B))=n-r$

3)F 这个显然错误

4)T $R(A)=R(A,\beta)$ 符合解存在的判定条件，解存在等价于 β 可以被 A 的列向量线性表示

(4)

1)T 这个没啥好说的

2)F k_1,k_2 的关系不确定，不能简单判断

3)T 唯一解条件 $R(A)=R(A,\beta)=n$，此时齐次方程只有零解。

4)T 无穷多解条件 $R(A)=R(A,\beta)<n$，此时齐次方程存在非零解 ξ，存在无限个解 $\eta+k\xi$

(5)

1)F 反例，两个方程都只有 0 解

2)F $A^T AX=A^T 0=0$

3)T (I)的解显然是(II)的解，如果 $R(A)=n$ 只存在零解，两者的解相同。如果存在非零解，

假设解使得 $A^T AX=0, AX=\beta$，考虑到 $X^T A^T AX=X^T 0=\langle\beta,\beta\rangle=0 \Leftrightarrow \beta=0$，即证

4)F 因为两方程同解

(6)

1)T 根据题设要求，需要有解空间维数 $n-R(A)\le n-R(B)$ 得证

2)F 显然错误

3)T 同解要求解空间维数相等即 $n-R(A)=n-R(B)$

4)F 显然错误