1.特征方程 $\det(A-\lambda E)=0 \Rightarrow (\lambda-2)^3=0$ 解得特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$。通过求齐次线性方程组的基础解系确定特征向量

$$(A-2E)x=0 \Rightarrow \xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

特征向量为

$$x=k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

2. 特征方程 $\det(A-\lambda E)=0 \Rightarrow (\lambda-1)^2(\lambda-10)=0$ 解得特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=10$。通过求齐次线性方程组的基础解系确定特征向量(不唯一)

$$(A-1E)x=0 \Rightarrow p_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, p_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \quad (A-10E)x=0 \Rightarrow p_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

将特征向量进行标准正交化得到变换矩阵(不唯一)

$$T=\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{15} & -\frac{1}{3}\\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

3．矩阵与一个对角矩阵相似，则对角矩阵元素为其特征值，因此通过特征方程可以确定 x 的值

$\det(A+5E)\equiv 0$ 并且 $\det(A-5E)=0 \Rightarrow 20(x-5)=-80$ 据此确定唯一解 $x=1$。据此再次利用特征方程 $\det(A-yE)=0 \Rightarrow y=-1$。

4.

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}A\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&1&-2\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$A^{2n}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}^{2n}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

5.(1)$\because A,B$相似 $\therefore \det(\lambda E-A)=\det(\lambda E-B)=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1)$

(2) $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-1$

(3) $\det(A)=\det(B)=-2$

(4) $tr(A)=tr(B)=2$

6.存在不为零的向量 x 使得 $Ax=\lambda x$

$$\begin{aligned}&\therefore A^m x=\lambda A^{m-1}x=\lambda^2A^{m-2}x=\cdots=\lambda^m x\\&\because A^m=A^{m-1}\\&\therefore \lambda^m x=A^{m-1}x=\lambda^{m-1}x\\&\therefore \lambda=0,1\end{aligned}$$

7. A 可逆，则有 $\lambda\neq 0$

$$\begin{aligned}&\because \det(\lambda E-A)=0\\&\therefore \lambda^n\det\left(E-\frac{A}{\lambda}\right)=0\\&\therefore \det\left(E-\frac{A}{\lambda}\right)=0\\&\therefore \left|E-\frac{A}{\lambda}\right|\left|A^*\right|=\left|A^*-\frac{A}{\lambda}A^*\right|=\left|A^*-\frac{|A|}{\lambda}AA^{-1}\right|=\left|A^*-\frac{|A|}{\lambda}E\right|=0\end{aligned}$$

8.

$$\because AX=\lambda X, AY=\mu Y$$
$$\therefore A\left(X+Y\right)=\lambda X+\mu Y$$

反证法：假设 $X+Y$ 是 A 的特征向量，则应有特征值 η 使得 $\eta X+\eta Y=\lambda X+\mu Y$ 改写该等式得到 $\left(\eta-\lambda\right)X+\left(\eta-\mu\right)Y=0$，考虑到题设 $\mu\neq\lambda$，因此存在不全为零的系数 $\left(\eta-\lambda\right)$ 和 $\left(\eta-\mu\right)$ 使得 $\left(\eta-\lambda\right)X+\left(\eta-\mu\right)Y=0$。这说明 X,Y 线性相关。与题设中要求 $\mu\neq\lambda\Leftrightarrow X,Y$ 线性无关 显然矛盾。

9.(1)根据题设，显然存在 $x=\left(1,1,\ldots,1\right)^T$ 使得 $A\left(1,1,\ldots,1\right)^T=k\left(1,1,\ldots,1\right)^T\Rightarrow Ax=kx$。符合特征值、特征向量定义，证毕

(2)

$$\because Ax=kx$$
$$\therefore A^{-1}x=\frac{x}{k}$$
$$\therefore \sum_{j=1}^{n}A_{ij}^{-1}=\frac{1}{k}\quad, i=1,2,\ldots,n$$
$$\therefore \sum_{j=1}^{n}\left(2A_{ij}^{-1}-3A_{ij}\right)=\frac{2}{k}-3k\qquad, i=1,2,\ldots,n$$

10. $BA=A^{-1}ABA$ 取 $P=A$ 符合相似矩阵定义 $BA=P^{-1}ABP$

11.(1)由题可知存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=\Lambda=diag\left(1,-1,2\right)$。因此可以得到

$$P^{-1}BP=P^{-1}\left(A^3-5A^2\right)P=\Lambda^3-5\Lambda^2=\Lambda_B=diag\left(-4,-6,-12\right)$$

由此我们得到 B 的相似对角阵为 Λ_B，根据相似矩阵性质的简单推论可以得出该对角阵元素是矩阵 B 的特征值，即 $\lambda_1=-4,\lambda_2=-6,\lambda_3=-12$。

(2) $A^*=\left|A\right|A^{-1}\Rightarrow A^{-1}+A^*=\left(1+\left|A\right|\right)A^{-1}$ 其中 $\left|A\right|=\left|\Lambda\right|=-2$，则 $A^{-1}+A^*=-A^{-1}$.

$P^{-1}\left(A^{-1}+A^*\right)P=P^{-1}\left(-A^{-1}\right)P=-\left(P^{-1}AP\right)^{-1}=-\Lambda^{-1}=diag\left(-1,1,-\frac{1}{2}\right)$ 因此三个特征值分别为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1,\lambda_3=-\frac{1}{2}$

(3) $|B| = \det(\Lambda_B) = -288$,$\left|A^{-1}+A^*\right| = \det\left(diag\left(-1,1,-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}$

12. 因为三个特征向量线性无关，同时 $\lambda = 2$ 是二重特征值，因此其对应特征方程的基础解系维数应为 2，即

$$n - r(2E - A) = 2 \Rightarrow r(2E - A) = 1$$

$$r(2E-A) = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -x & -2 & -y \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & x-2 & -x-y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

解得 $x = 2, y = -2$ 。因此得到 A 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

之后按照前面 1 的方法求特征值和特征向量，用特征值组成对角矩阵，并且将对应的特征向量组成矩阵即可得到 P .即可得到答案，答案不唯一。过程略。这里给其中一组标准正交化以后的解

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{14}}{14} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{14}}{7} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{3\sqrt{14}}{14} \end{pmatrix}$$

13.(1)

$$A\xi = \lambda\xi \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ a = -3 \\ b = 0 \end{cases}$$

(2)特征多项式 $\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda+3 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (x+1)^3$ 。$\lambda = -1$ 对应基础解系维数

$$3 - r(-E-A) = 3 - r\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 - r\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

则其几何重数为 $1 \neq 3$ 。因此无法通过相似变换化为对角阵。（PS: A 的 Jordan 标准型是

$J=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$，它无法进一步被化为对角阵)。或者用比较简单的说法就是 n 阶矩阵能被对角化的充要条件是由 n 个线性无关的特征向量。

14.(1) A,B 相似等价于存在可逆矩阵 P 使得 $A=P^{-1}BP$ 。

$$|\lambda E-B|=|P^{-1}||P||\lambda E-B|=|\lambda P^{-1}EP-P^{-1}BP|=|\lambda E-A|$$

(2)不唯一，最简单的例子

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

(3) A,B 是实对称矩阵必然存在正交矩阵 P,Q 使得 $P^{-1}AP=\Lambda_1=diag(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$，$Q^{-1}BQ=\Lambda_2=diag(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n)$.因为 A,B 特征多项式相等，所以可以知道 $\Lambda_1\sim\Lambda_2$ 。进一步考虑到 $A\sim\Lambda_1,B\sim\Lambda_2$ 则 $A\sim B$ 。

15. A 是实对称矩阵必然存在正交矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ 所以 $r(A)=r(\Lambda)$ 为非零特征值个数。 $P^{-1}A^2P=P^{-1}APP^{-1}AP=\Lambda^2$，所以 $r(A^2)=r(\Lambda^2)=r(\Lambda)=r(A)$

16.（1）直接用 9.题结论，可知 $\lambda_1=2$ 是其中一个特征值，其对应特征向量为 $\xi_1=(1,1,1)^T$，并且由于 $R(2E+A)=1$ 得知 $\lambda_2=\lambda_3=-2$ 其几何重数与代数重数均为二。对角矩阵为

$$\Lambda=\begin{pmatrix}2 & & \\ & -2 & \\ & & -2\end{pmatrix}$$

根据要求构造两个互相正交并且与 ξ_1 正交的特征向量 $\xi_2=(1,-1,0)^T$ $\xi_3=(1,1,-2)^T$ 组成正交矩阵 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}$，其逆矩阵为 $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$$A^m = P\Lambda^m P^{-1} = 2^m \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & (-1)^m & \\ & & (-1)^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= 2^m \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2}{3}(-1)^m & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(-1)^m & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(-1)^m \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(-1)^m & \frac{1}{3}+\frac{2}{3}(-1)^m & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(-1)^m \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(-1)^m & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(-1)^m & \frac{1}{3}+\frac{2}{3}(-1)^m \end{pmatrix} = \begin{cases} 2^m E, n = 2k \\ 2^m \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, n = 2k-1 \end{cases} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

17.(1) 24 (2) $\frac{|A|^2}{\lambda^2}+1$ (3) $n, 0, 0, \ldots, 0$ (4) 4

18.(1)D (2)B (3)C (4)B (5)D (6)C (7)B

19.(1)

1)T $\lambda^m x = \lambda^{m-1} Ax = \cdots = A^m x = 0$ ，该方程无法找到λ的非零解。可以证明

2)F 反例$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3)F 显然

4)T 单位正交矩阵特征值只能是 $-1 \; or \; 1$ 。证明思路 $Ax = \lambda x \Rightarrow x = A^T Ax = \lambda A^T x \Rightarrow \lambda^2 \langle x, x \rangle = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle = x^T A^T Ax = \langle x, x \rangle$ 注意这里特征向量必定非零，因此$\lambda = \pm 1$

(2)

1)T $AX = \lambda X \Rightarrow \frac{1}{\lambda} X = A^{-1} X$,考虑到可逆矩阵特征值λ不为零，X 符合特征向量定义。

2)T $A^{-1} AX = X = \frac{1}{\lambda} \lambda X = \frac{1}{\lambda} AX$

3)T $P^{-1} APP^{-1} X = P^{-1} AX = \lambda P^{-1} X$

4)F 这个结论不能直接得到

(3)

1)F 反例$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2)T 充要条件

3)F 反例见 16.题。

4)F 允许出现 A,B 相似然而都不能对角化的情况

(4)

1)F 没有必然联系

2)F 反例在 14.题第二问

3)F 没有必然联系

4)T 特征值互异可得特征向量线性无关，特征向量线性无关是能被相似对角化的充要条件，对角化以后的证明可以参考 14.题第三问